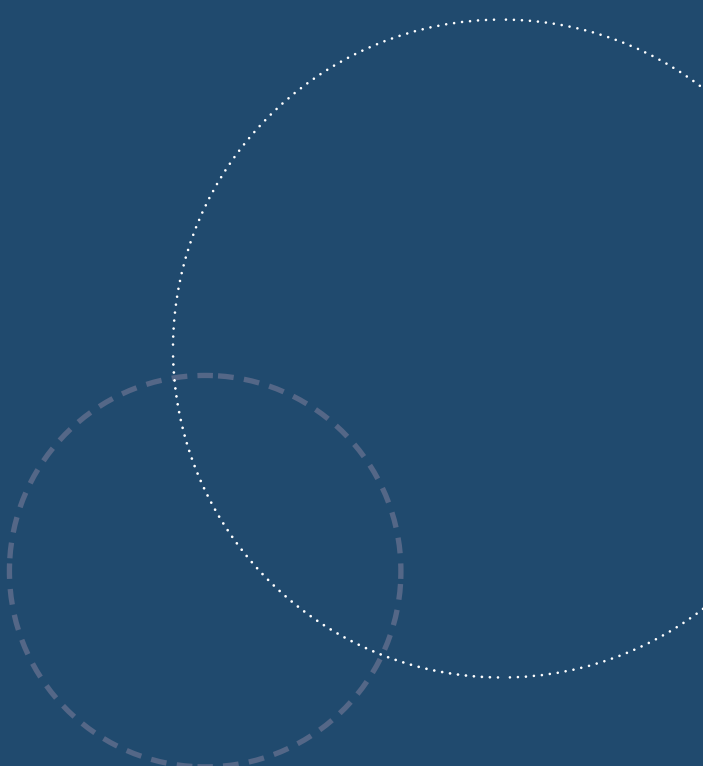
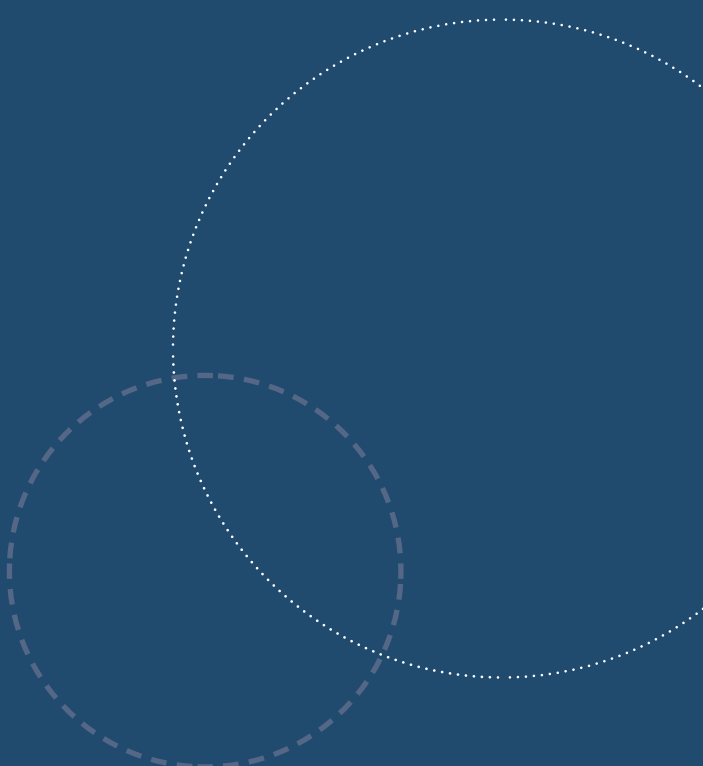


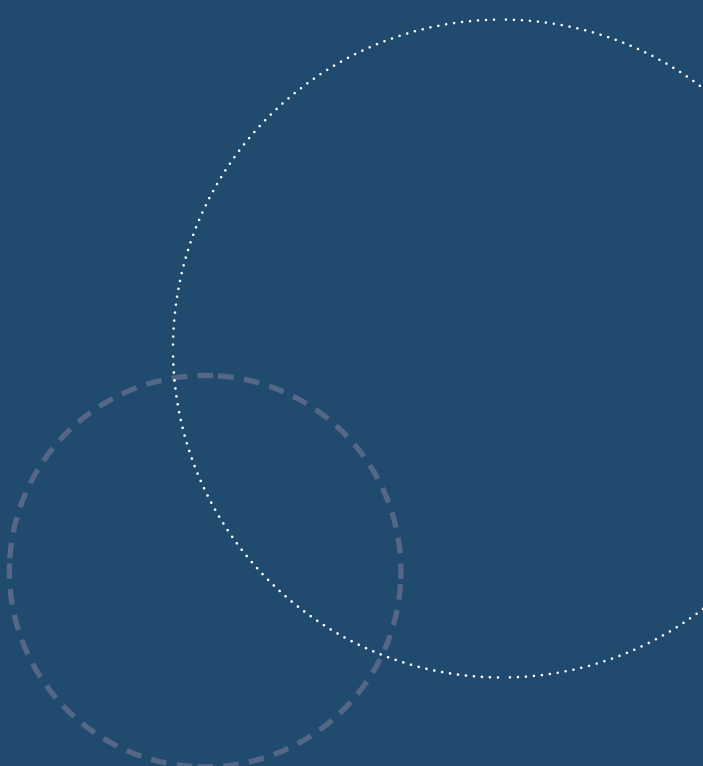


A MATEMATIKAI TUDÁS ONLINE DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉNEK TARTALMI KERETEI

Szerkesztette:

Csapó Benő • Csíkos Csaba • Molnár Gyöngyvér

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET



A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei

A MATEMATIKAI TUDÁS ONLINE DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉNEK TARTALMI KERETEI

Szerkesztette
Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projektazonosító: TÁMOP 3.1.9-11/1-2012-0001



Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szerzők:

Ambrus Gabriella, Csapó Benő, Csíkos Csaba, Józsa Krisztián, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Molnár Gyöngyvér, Sztányi Judit, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:

András Szilárd, Kelemen Rita, Kosztolányi József, Vancsó Ödön

© Ambrus Gabriella, Csapó Benő, Csíkos Csaba, Józsa Krisztián, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Molnár Gyöngyvér, Sztányi Judit, Zsinkó Erzsébet,
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2015

ISBN 978-963-19-7936-7

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc utca 6–8.
Tel.: (+36-1) 235-5508
Fax: (+36-1) 235-7202

A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató
Felelős szerkesztő: Simonyi Kata
Műszaki szerkesztő: Kóródiné Cukás Márta
Nyomdai előkészítés: Karácsony Orsolya
Raktári szám: NT-42701
Terjedelem: 25,38 (A/5) ív
Első kiadás, 2015.

Nyomda: Duna-Mix Kft., Vác
Felelős vezető: Szakolczai Lóránt ügyvezető igazgató

*Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem
ducha ludzkiego.*

*A matematika az emberi szellem legszebb
és leghatalmasabb alkotása.*

Stefan Banach

Tartalom

Bevezetés (Csapó Benő, Csikos Csaba és Molnár Gyöngyvér)	11
1. <i>Csikos Csaba, Molnár Gyöngyvér és Csapó Benő:</i>	
A matematika online diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek elméleti alapjai	15
1.1. Fejlemények a matematikatanítás kutatásában.....	16
1.2. A hazai neveléstudományi és matematikadidaktikai hagyományok.....	17
1.3. Feladatírói munka számítógép-alapú környezetben	18
1.4. A számítógépes tesztelési környezet.....	24
1.5. Irodalom.....	27
2. <i>Csikos Csaba, Józsa Krisztián, Lajos Józsefné, Szitányi Judit és Zsinkó Erzsébet:</i>	
A matematikai gondolkodás diagnosztikus értékelése	29
2.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei.....	35
2.1.1. Számok, műveletek, algebra	35
2.1.2. Relációk, függvények	43
2.1.3. Geometria	48
2.1.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika.....	53
2.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei.....	58
2.2.1. Számok, műveletek, algebra	58
2.2.2. Relációk, függvények	65
2.2.3. Geometria	74
2.2.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika.....	76

2.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei.....	82
2.3.1. Számok, műveletek, algebra.....	82
2.3.2. Relációk, függvények.....	90
2.3.3. Geometria.....	95
2.3.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	99
2.4. Irodalom.....	102
3. <i>Ambrus Gabriella, Csikos Csaba, Makara Ágnes, Sztányi Judit és Zsinkó Erzsébet:</i>	
A matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése.....	105
3.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei.....	112
3.1.1. Számok, műveletek, algebra.....	112
3.1.2. Relációk, függvények.....	120
3.1.3. Geometria.....	124
3.1.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	130
3.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei.....	133
3.2.1. Számok, műveletek, algebra.....	133
3.2.2. Relációk, függvények.....	145
3.2.3. Geometria.....	150
3.2.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	158
3.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei.....	164
3.3.1. Számok, műveletek, algebra.....	164
3.3.2. Relációk, függvények.....	169
3.3.3. Geometria.....	174
3.3.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	184
3.4. Irodalom.....	189

4. *Csíkos Csaba, Lajos Józsefné, Makara Ágnes, Sztányi Judit
és Zsinkó Erzsébet:*

A matematikatudás tartalmi területei a diagnosztikus

értékelés szempontjából191

4.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei.....	196
4.1.1. Számok, műveletek, algebra	196
4.1.2. Relációk, függvények	208
4.1.3. Geometria	211
4.1.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	224
4.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei.....	230
4.2.1. Számok, műveletek, algebra	230
4.2.2. Relációk, függvények	238
4.2.3. Geometria	242
4.2.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	249
4.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei.....	253
4.3.1. Számok, műveletek, algebra	253
4.3.2. Relációk, függvények	261
4.3.3. Geometria	265
4.3.4. Kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.....	276
4.4. Irodalom.....	280

A kötet szerzői281

Bevezetés

A diagnosztikus értékelési program alapvető célja egy olyan online mérési rendszer kidolgozása, amely lehetővé teszi, hogy a tanulók fejlődését az iskolába lépéstől a hatodik évfolyam végéig követhessük. A részletes feladatrendszer három fő területre, az olvasásra, a matematikára és a természettudományra terjed ki, azokra az ismeretekre, készségekre és képességekre, amelyek a későbbi iskolai és iskolán túli tanulás sikerességét alapvetően meghatározzák. Az olvasás-szövegértés, a matematika és a természettudomány alkotják a nemzetközi felmérési programok fő területeit is. Ebben a kötetben a matematika felmérésének tartalmi kereteit adjuk közre, egy hatéves munka eredményeként.

A diagnosztikus értékelés projekt második szakaszának egyik kiemelt feladata a mérések tartalmi kereteinek átdolgozása, felújítása volt. A fejlesztési program 2009-ben indult. Az első szakaszban viszonylag rövid idő alatt sok feladatot kellett egymással párhuzamosan megoldani. A technológiai lehetőségek felmérése a szakirodalom feldolgozásával és az elérhető rendszerek kipróbálásával kezdődött, majd végül megszületett a döntés egy teljesen új online platform kifejlesztésére. A technológiai alap felépítésével párhuzamosan – széles körű nemzetközi összefogással – kerestük a választ arra a kérdésre, mit lehet és mit érdemes felmérni az iskola kezdő szakaszában, feltéve, hogy egy gyakran alkalmazható, nagyon pontos mérőeszköz áll rendelkezésünkre. Mindemelllett, az idő szorításában, elkezdtük a feladatíró munkatársakat felkészíteni az új rendszerben létrehozandó feladatbank megalkotására. E felkészítésnek három komponense volt, egyrészt a méréselméleti-tesztszerkesztési tudás közvetítése, másrészt a technológiai készségek fejlesztése, harmadrészt pedig mérendő területek tartalmával kapcsolatos szakmai, tantárgy-pedagógiai tudás felfrissítése. Ebben a különböző folyamatok közötti szoros interakcióban született meg

a mérendő területeket definiáló, a tesztek és feladatok tartalmát részletesen leíró dokumentumok első változata.

A párhuzamosan végzett feladatmegoldásnak és a különböző munkacsoportok közötti együttműködésnek sok előnye volt, és a tartalmi kereteket kidolgozó teamek is hasznosíthatták a technológiai fejlesztés terén elért eredményeket és a továbbképzések tapasztalatait is. Ugyanakkor az egyidejűség eltért a mérési rendszerek kidolgozásának egymásutániságra épülő hagyományos logikájától, mely szerint először elkészülnek a felmérések tartalmának leírásai, majd sor kerül azok feladatokká alakítására, tesztekkel való leképezésére. A mérések tartalmi keretei nem a feladatírást megelőzően, hanem az első fejlesztési szakasz végén jelentek meg, mintegy összegezve az e téren végzett munka tapasztalatait. A diagnosztikus értékelés tartalmának ilyen alapos és részletes leírása nemzetközi téren is újdonságnak számított, és annak érdekében, hogy az eredményeinket szélesebb körben is elérhetővé tegyük, a szakértők tágabb körét bekapcsolhassuk a további fejlesztésekbe, a köteteket angol nyelven is megjelentettük.

Korábbi kutatásaink és az elméleti elemzőmunka eredményeként arra a megfontolásra jutottunk, hogy a tanulók tudását három fő dimenzióban célszerű felmérni. Ennek megfelelően a matematika területén egyrészt leírtuk – elsősorban az érvényben levő tantervre támaszkodva –, hogy mit tanulnak a diákok az iskolában, milyen tananyag elsajátítását lehet közvetlenül felmérni (tartalmi, tantervi dimenzió). Másrészt a matematika tudásának nagyon sokféle alkalmazási lehetősége van, és a korábbi hazai, valamint nemzetközi felmérésekből is ismert, hogy tanulóink ezen a téren kevésbé jól teljesítenek. A tudás alkalmazása, átvitele új területekre nem automatikus, erre fel kell készíteni a tanulókat. Az e téren végzett fejlesztést a diagnosztikus értékeléssel is segíteni lehet (alkalmazás dimenzió). Harmadrészt az iskola alapvető célja a tanulók értelmi képességeinek kiművelése, ahol a matematika iskolai tanulása kiemelkedően fontos szerepet játszik. Ennek megfelelően a matematikai gondolkodás alakulása a diagnosztikus mérések harmadik dimenziója.

A tartalmi kereteket bemutató korábbi kötetek öt fejezetre tagolódtak. Az első három fejezet részletesen bemutatta az előzőekben felvázolt három dimenzió tudományos alapjait. Ezeket az elméleti kereteket további munkánk szempontjából is meghatározónak tartjuk. A negyedik fejezetek összefoglalták az elméleti fejezetek részletes tartalmi kereteket és a fel-

adatok kidolgozására vonatkozó következtetéseit, míg az ötödik fejezetek részletesen leírták a mérések tartalmát a három említett dimenzióban.

A projekt második szakaszának megkezdésekor helyreállt a feladatírás és tesztfejlesztés szokásos logikája. A feladatírók képzésére, a feladatok kidolgozására, a feladatbank felépítésére már az elméleti alapok és a mérendő tartalmak részletes leírásai alapján kerülhetett sor. Közben elkészült az új, saját fejlesztésű online platform is. Az új eDia platform és rendszer kihasználja a szoftvertechnológia legújabb eredményeit, és reflektál a széles körben elérhető információtechnológiai eszközök gyors változásaira is. A hétköznapi életben mind gyakoribbá válik a vezetékek nélküli mobil eszközök alkalmazása, az érintőképernyők használata, ami új lehetőségeket kínál a tesztfeladatok megalkotására is. A matematikához elkészült közel 7000 feladat már figyelembe vette ezeket a lehetőségeket is.

Az itt felvázolt folyamatokra, eredményekre és tapasztalatokra építve készült el a matematika online diagnosztikus felmérések tartalmi kereteinek újabb változata. Ebben a kötetben a mérések tartalmának részletesebb leírása áll a középpontban. Egy-egy fejezet foglalkozik a felmérések három dimenziójával, külön-külön bemutatva a gondolkodás, az alkalmazás és a tantervi tartalom terén végezhető mérések részletes leírásait. Az egyes mérési dimenziók tartalmának részletes meghatározása már egyértelműen a technológiai mérések lehetőségeit veszi alapul. Az illusztrációk, feladatvázlatok egyaránt az online rendszerből származnak.

A korábbihoz hasonlóan ez a kötet is a fejlesztési szakasz végére készült el, felhasználva annak minden lényeges eredményét. Ugyanakkor ezt a munkát nemcsak a korábbi munka lezárásnak, hanem egy újabb folyamat kezdetének is tekintjük. Az online rendszer minden fontosabb funkciója működik, és már közel ezer iskolában került sor a kipróbálására. A következő években lehetőség nyílik a rendszerszerű használatra, a tanulók fejlődésének követésére. A tartalmi kereteknek ez az újabb változata nem csupán megalapozza a feladatbank továbbfejlesztését, hanem tájékoztatja a mérések minden érintettjét is azok tartalmáról.

A kötet megszületésében a szerzőkön kívül számos további munkatársunknak szerepe volt, akiknek ezúton is köszönetet mondunk. Külön is köszönjük a feladatokat kidolgozó kollégák, továbbá a projektet irányító team, *Molnár Katalin*, *Kléner Judit* és *Túri Diána* munkáját.

Csapó Benő, Csikos Csaba és Molnár Gyöngyvér

1.

A matematika online diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek elméleti alapjai

Csikos Csaba

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Molnár Gyöngyvér

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Csapó Benő

MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének bemutatását egyrészt korábbi, még nem kifejezetten technológiaalapú értékelésre fókuszáló kötetünk három elméleti fejezetére alapoztuk (*Nunes és Csapó, 2011; Csikos és Verschaffel, 2011; Szendrei és Szendrei, 2011*), másrészt az átdolgozás során figyelembe vettük, hogy a mérésekre online rendszerben kerül sor. A példafeladatok kivétel nélkül az eDia platformból származnak, ezáltal is demonstrálva a számítógép-alapú tesztelés nyújtotta lehetőségeket és előnyöket. Az átdolgozott tartalmi keretek reményeink szerint nem csupán a szakértők szűkebb körének és a feladatíróknak munkáját segítik, hanem valamennyi tanító és matematikatanár haszonnal forgatja majd a kötetet. E fejezet célja, hogy a három értékelési dimenzió szerint tagolt részletes tartalmi keretek felhasználásához négy szempont szerint nyújtson támpontot. Megmutatjuk, miként használtuk a nemzetközi kutatások eredményeit, mely hazai forrásművekre támaszkodtunk, és hogyan érvényesítettük a tartalmi keretek leírásában a számítógép-alapú tesztelési környezet lehetőségeit és kihívásait.

1.1. Fejlemények a matematikatanítás kutatásában

A matematika tanításában, miként más területeken is, a kutatók figyelme egyre korábbi életkorok fejlődésére és fejlesztésére irányul. A lemaradások, kudarcok okait gyakran az iskola előtti szakaszban vagy az első iskolaévekben lehet felfedezni, ezért mind több vizsgálat foglalkozik az óvoda-iskola átmenettel és az első iskolai évek matematikatanításával. A már hagyományos számolási készségekkel kapcsolatos elemzések mellett mind nagyobb teret kapnak a számérzékkal, a számfogalom kialakulásával, illetve ezek fejlődési zavaraival kapcsolatos vizsgálatok, és az e problémákra kiemelt figyelmet fordító tanítási módszerek (*Mooney, Briggs, Fletcher, Hansen és McCullouch, 2014; Clements és Sarama, 2014*).

A matematika tanításával kapcsolatos kutatások fontosságát, a tudományos megalapozás igényét jelzi, hogy már négy olyan nemzetközi folyóiratot tartanak nyilván, amelyek elsősorban a matematikai neveléssel kapcsolatos cikkeket közölnek. Emellett számos általános pszichológiai és pedagógiai folyóiratban szerepelnek matematikai tárgyú írások, kifejezve ezzel azt, hogy a matematika tanulása és tanítása során megfigyelt jelenségek szélesebb körű érdeklődésre is számot tarthatnak. A matematika jelenségvilága olyan pedagógiai megfigyelések és kísérletek lebonyolításához kínál terepet, amelyek a tanulás és tanítás tudományos vizsgálatát teszik lehetővé. Jelentősen bővült az utóbbi néhány évben az a publikációs bázis, amely a kutatók és fejlesztők munkáját segíti. Ebben a kibővült szakirodalmi bázisban a következő főbb tendenciákat látjuk.

- Jelentős hangsúllyal szerepel a vizualitás, a problémamegoldást segítő rajzolás, ábrázolás.
- Számos cikk vizsgálja a matematikai gondolkodás metakognitív folyamatait (pl. fejben számolás folyamatainak tudatossága, a matematikáról alkotott tanulói és tanári [tanárjelölti] meggyőződések vizsgálata).
- A szemmozgásvizsgálatot felhasználják például a mentális számegyenes vagy a szöveges feladatok megoldásának kutatásában.
- Továbbra is lényeges a matematikai tudás hétköznapi alkalmazhatóságának vizsgálata és az úgynevezett matematikai modellek alkotása.
- Az objektív viszonyítási pontok és nemzetközi tendenciák definiálásához nélkülözhetetlenek a nemzetközi rendszerszintű mérések tapasztalatai (PISA, TIMSS).

Ugyanakkor bizonyos témák, amelyek néhány évtizede élénk párbeszédet váltottak ki, majd háttérbe szorultak, a technológia adta új lehetőségek miatt ismét fókuszba kerültek, mint a geometria területe, amely az IEA-vizsgálatok megindulásának idején az érdeklődés homlokterében volt, majd átmeneti „hanyatlás” után a dinamikus geometriai szoftvereknek köszönhetően (Geogebra, Cabri) ismét a középpontban van. A matematikai bizonyítások pszichológiai és pedagógiai hátterének témaköre, ahol a máig meghatározó publikációk a nyolcvanas-kilencvenes években születtek, egy kevésbé aktív időszak után ismét gyakrabban szerepel a konferenciákon és folyóiratokban.

Mindhárom értékelési dimenzió (szaktárgyi, alkalmazási és gondolkodási) esetén megvannak azok az „alapművek” (túl az előző kötet elméleti fejezetein), amelyek koncepcionálisan segítenek a tájékozódásban. A matematikai képességek esetében a képességek faktoranalitikus modellje (Carroll, 1993), a matematikai tudás alkalmazása számára a PISA mérési keretrendszere és a holland realisztikus matematikai mozgalom alapművei, a diszciplináris dimenzió esetében a nemzetközi rendszerszintű mérések (tehát a PISA mellett a TIMSS-sorozat) jól definiált területei segítik a tájékozódást.

1.2. A hazai neveléstudományi és matematikadidaktikai hagyományok

A feladatírás hazai matematikadidaktikai forrásai közül kiemeljük a főiskolai tananyagként használt jegyzetet, C. Neményi és Szendrei könyvét (1994), valamint Török (2009) munkáját. Mindkét műben megtalálható a matematikai szöveges feladatok többszemponútú rendszerezése. A rendszerezés szempontja elsősorban matematikai, másodsorban pszichológiai. A formális, tesztelméleti, feladatírói szempontú csoportosítás nem jelenik meg ezekben a művekben, illetőleg rejtett üzenetük, a példák sokasága mutatja be az alsó tagozaton (és részben még 5–6. évfolyamon) megszokott, a matematikadidaktikai hagyományban gyökerező feladat-sajátosságokat. A feladatok részeként vagy a megoldás folyamatában különféle matematikai modellek fordulnak elő: táblázatok, grafikonok, rajzok, halmazábrák.

A matematikai feladatok hazai didaktikai előzményei között szükséges megemlítenünk a sokak által egyszerűen „teszt”-nek nevezett feladatokat, amelyek elsősorban a versenytesztek bevett feladataiként ismertek. Az országszerte ismert Zrínyi Ilona Matematikaverseny, amelyre 2014-től már 2. osztálytól lehet nevezni, a zárt, öt válaszlehetőséget felmutató feladatokat használja. Sajátos a pontozási rendszer, hiszen a válasszmegtagadás 0 pontot jelent, de a helytelen válasz pontlevonással jár. Azért említjük meg ezt a versenyformát, mert az alkalmazott feladattípus és pontozási rendszer egyrészt valamilyen felkészülési stratégiát (és némi rutint) igényel, másrészt pedig igazolja, hogy a zárt feladatok nem csupán könnyű, ismeretszintű vagy rutineljárást kérő feladatok mérésére alkalmazhatók.

A matematikai szöveges feladatok neveléstudományi szempontú tipizálására egy példát nyújt Csikos, Szitányi és Kelemen (2010), akik a számtani művelettel megoldhatóság, a műveletek száma és a feladat szövegében szerelő kulcsszavak szerepe szerint dolgoztak ki iskolai fejlesztő programot. Vincze (2003) kutatásának célja „a matematikai képesség” feltárása és intelligenciával való kapcsolatának vizsgálata volt. Matematikai tudást mérő tesztjei között szerepeltek egyszerű szöveges feladatok, amelyek egy-egy matematikai képesség működése mellett egyszerű fogalmak megértését és reprezentációját igényelték, valamint rejtvényjellegű és versenyfeladatok is. Rejtvényjellegű feladatokból felépülő matematikai teszttel Kontra (1999) a matematikai gondolkodás flexibilitását mérte. A kutatásában használt feladatok többsége belátásprobléma volt, amelyek megoldása során a megfelelő problémareprezentáció aha élménnyel jár. A szöveges feladatok mint az iskolában szerzett matematikai ismeretek és készségek alkalmazásának indikátorai alkalmasak annak mérésére, hogy a tanuló képes-e „realisztikus” választ adni egy feladat kihívására (Csikos, 2003).

1.3. Feladatírói munka számítógép-alapú környezetben

A feladatírásnak gazdag szakirodalma van mind a nemzetközi (pl. Roid és Haladyna, 1982; Nitko, 1996), mind a hazai mezőnyben. Nagy (1972) módszertani kézikönyve, Orosz (1993) monográfiájának néhány fejezete, a Falus szerkesztette kutatás-módszertani tankönyv egyik fejezete (Csapó, 2000), a Pedagógiai Diagnosztika két kötete főleg magával a feladat-

írás technológiájával foglalkozik. Nagy József úttörő kezdeményezései a készségek mérése (Nagy, 1971, 1973) terén pedig a tesztfeladatok gazdag példatáraként szolgálnak, hasonlóan az általa irányított, a témazáró tudásszintmérő tesztek kidolgozására irányuló programban megjelent kötetekhez. Az itt következő fejezetek építenek ezekre a munkákra, ugyanakkor nem céljuk a feladatírói munka szabályainak rendszerezése. Mindamellett a példafeladatokban megjelenő szabályszerűségek, tartalmi és stílári elemek jól segítik a technológiaalapú tesztek sajátosságainak, feladattípusainak megismerését.

A hazai matematikatanítási gyakorlatban a nyílt végű feladatok dominálnak. Az elhangzó utasítás vagy kérdés alapján a tanulónak kell megkonstruálnia a választ. A válaszadás sajátos módjai jellemzőek a matematikára már az alsó tagozattól kezdve. Találkozhatunk olyan taneszközzel, amely négy vagy hat pontban tanítja meg, „hogyan kell” szöveges feladatokat megoldani. Ezek a lépések valójában önmagukban, egyesével külön is tesztelhetők, mindegyik lépést átalakítva zárt formájúra (akár alternatív választásosra), azaz a nyílt végű feladatokban szokásosan elvárt és pontosított tudáselemek diagnosztikus értékelése számos esetben megoldható zárt feladattípusok segítségével.

A zárt feladatok a nemzetközi rendszerszintű felmérésekben az 1995-ös TIMSS-mérésig kizárólagosan fordultak elő (Csíkos és Vidákovich, 2011). Ezen belül az öt válaszlehetőség közül egy helyes válasz megjelölését kérő multiple choice (szó szerinti fordításban: többszörös választás; a hazai didaktikai fogalomhasználatban: egyszeres választásos) feladattípust használta az IEA első két matematikai felmérése. Az egyszeres választásos feladatok, leggyakrabban négy vagy öt opcióval, a későbbi nemzetközi felmérésekben is teret kaptak.

A PISA 2003-as matematikai felméréséről készült elemzés szerint a vizsgált tudásszint és az alkalmazott feladattípus között nem determinisztikus, de azért határozottan kirajzolódó összefüggés mutatkozott. A zárt feladatok elsősorban a rutinszerű matematikai eljárások esetén, míg a nyílt feladatok inkább a két magasabb szint esetén fordultak elő gyakrabban. A felismert összefüggés iránya a következőképpen értelmezhető. Mivel zárt feladatok (köztük egyszeres választásos feladatok) lényegében bármely szintű tudáselem tesztelésére felhasználhatók, a feladatíró döntésén, végső soron pedig a szakértők egyetértésén múlik, hogy a magasabb szintű gondolkodási folyamatok tesztelésére milyen mértékben lehetséges vagy

szükséges nyílt feladatok bevonása. A nyílt végű feladatok esetében több kihívást jelent a feladat online diagnosztikus feladatbankba illesztése. Például egy esszéfeladat javítása, pontozása (a matematikai területén tipikus esszéfeladat például egy tétel bizonyítása) egyelőre számítógéppel megoldhatatlan. Ugyanakkor a már említett, a hagyományok okán nyílt formátumú aritmetikai szöveges feladatok a mért tudásterület megőrzésével átalakíthatók zárt formátumúra, és ezek már teljes egészében lehető teszik a számítógép-alapú megvalósítást: a pontozásig bezárólag.

A számítógépes környezet – a papíralapúhoz képest – lehetőségeket ad és korlátokat támaszt (Molnár, Papp, Makay és Ancsin, 2015). A tesztelés jóságmutatói szerint górcső alá véve a problémakört, a feladatok objektivitása, tárgyyszerűsége egyrészt a feladat megoldása során biztosított azonos feltételek, másrészt a feladatok pontozása, javítása során megjelenő egyértelműség révén általában magasabb szinten biztosítható a számítógépes tesztelés során. Az adatfelvétel és a kiértékelés magasabb szintű objektivitása azon múlik, hogy lehetővé válik az „emberi tényező”, a feladatok megírását és javítását felügyelő és megvalósító személyek közötti különbségek eliminálása (Csapó, Molnár és Nagy, 2014). Összességében a számítógépes környezeten keresztül lehetővé válik a feladatjavító munka egyszerűsítése. Ennek eklatáns példáját jelentik azok a kombinatorikai feladatok, amelyeknél az összes lehetséges megoldás felsorolása a feladat. Az ilyen feladatok javítókulcsában (a papíralapú tesztkulturában) az összes helyes megoldás felsorolása mellett jellemzően a javító szakember számára ott szerepelt a mondat: „a sorrend tetszőleges”. Könnyen belátható, hogy az objektív és gyors javítás ez esetben a számítógép-alapú tesztelés mellett szól.

A tesztelés reliabilitására, megbízhatóságára vonatkozóan ugyanazok a kihívások és kritériumok érvényesek, mint a papíralapú tesztelés során. A validitás, érvényesség számos részterülete különböző mértékű kihívásokat és lehetőségeket nyújt a számítógépes tesztfeladatokkal szemben. Kulcskérdés, hogy a matematikai tudás számítógépes tesztelése során mért tudáselemekbe „ne mérjük bele” a számítógép-használatban szerzett jártasságot. A legújabb kutatási eredmények szerint egyedül kisiskolás diákok asztali számítógéppel való mérése-értékelése kapcsán merülhet fel ez a kérdés, idősebb diákok esetén teljes mértékben kizárható (Molnár és Pásztor, 2015; Pearson, 2009). Ugyanakkor a technológia adta előnyöket kihasználva érvényesebbé tehetjük a tesztelés menetét azzal, ha a diákoknak lehetőséget adunk a feladatok meghallgatására, ezzel a mérés során kizárva az olvasási képességük fejlettségi szintjéből adódó teljesítménykülönbségeiket.

A papíralapon és a számítógépen megjelenő feladatok közötti azonosság és különbség megragadható a feladatkijelölés (stimulus) és a válaszok felvétele (response capture), másrészt az alkalmazott feladattípusok szerint is. Míg a papíralapú feladatok esetében a feladatkijelölés főképp statikus szöveg és kép használatára korlátozódik, addig számítógép-alapon ez történhet statikus vagy digitális szöveggel (hiperlinkek használatával), képekkel, hanggal, animációval, videóval, szimulációkkal. Mindezekkel akár interakcióba is léphet a tesztet megoldó személy, aminek következtében akár dinamikusan változhat is a feladat, illetve a feladat megoldásához rendelkezésre álló információ.

A feladatokra adott válaszok felvétele is eltérő lehet a két tesztkörnyezet esetén. Míg papíralapon alapvetően karikázással, pipa vagy ikszek használatával, aláhúzással, összekötéssel, rajzolással vagy betűk, szavak, mondatok írásával adjuk meg a választ, addig számítógép-alapon a válaszadási lehetőségek egyrészt kibővülnek, másrészt az alkalmazott hardver jellegétől függően is változhatnak. Más-más válaszadási lehetőségeket rejthet egy tablet vagy egy asztali számítógép. Annak ellenére, hogy a technológiai fejlődés iránya egyértelműen a tabletek felé mutat, ahol már nincs szükség perifériás eszközök használatára, elterjedtsége miatt lényeges foglalkozni az asztali számítógépek adta válaszadási módokkal is, azaz a billentyűzet és az egér adta lehetőségekkel és a diákok, főképp a kisiskolás diákok egér- és billentyűzethasználati képességeinek fejlettségi szintjével.

Az egérrel történő válaszadás során a diákok (1) kattinthatnak űrlapelemekre (rádiógomb, jelölőnégyzet), (2) megadhatják válaszukat legördülő lista használatával, (3) kattinthatnak képekre, képek részeire, (4) szövegekre, szövegek részeire, (5) kattintással színezhethetnek alakzatokat, képeket vagy azok részeit, (6) a kattintás sorrendjét alapul véve sorszámozhatnak, (7) összeköthetnek vagy nyilat rajzolhatnak két feladatelem közé, (8) vonszolással mozgathatnak betűket, szavakat, mondatokat, szövegeket, számokat, alakzatokat, képeket, hangokat, videókat, animációkat, szimulációkat, gyakorlatilag bármely feladatelemet. A billentyűzet használatát kérő válaszadási formák között szerepelhetnek betűk, számok, szavak begépelését kérő beviteli mezők vagy hosszabb szövegek, mondatok begépelését kérő szövegdobozok, sőt akár bizonyos billentyűk ütemre történő lenyomásával ritmust adhatnak vissza. Mindezen túl mikrofon vagy videokamera használatával lehetőség van hang, esetleg videó (mozgás) mint válasz rendszerbe való feltöltésére is.

A jelen kötetben bemutatott elméleti kereteken nyugvó, eDia rendszerben futó matematika-feladatbankban is kihasználtuk a fenti lehetőségeket, aminek következtében a korábbiaknál változatosabb feladatformák alkalmazására nyílt lehetőség. Első, második és harmadik évfolyamon a feladatok utasításait nemcsak elolvashatják, hanem meg is hallgathatják a diákok, így a tesztek a még olvasni nem tudó vagy olvasási nehézségekkel küzdő diákok körében is használhatók. Ezáltal alacsonyabb évfolyamos diákoknál a matematikateszteken nyújtott teljesítményeket nem befolyásolja a tanuló olvasási képességének fejlettségi szintje, ami jelentős mértékben növeli a tesztek validitását és megbízhatóságát.

Feladattípusok szempontjából a fent ismertetett stimulusok és válaszok minden kombinációja kiközvetíthető, azonban minden egyes feladat pontozása, értékelése itemszinten visszavezethető az alternatív választás (igen-nem), valamint az egyszeres választás (pl. rádiógomb) típusú feladatokra. A válaszadás módja szerint a feladattípusok következő csoportosítási módját használhatjuk, ha a hagyományos papíralapú osztályozásból indulunk ki: zárt végű feladatok, nyílt végű feladatok.

A zárt végű feladatok közé sorolhatjuk az összes olyan válaszadási kombinációt, ahol a válaszlehetőségek valamilyen formában (betű, szöveg, szám, kép, hang, videó, szimuláció) adottak a feladat kiközvetítése során. A legismertebb formák az alternatív választásos, az egyszeres választásos, a többszörös választásos, az illesztéssel kivitelezhető, a csoportba sorolást kérő, a sorba rendezést igénylő feladatok, amelyek stimulus és válaszlehetőség jellegétől függően más-más feladatmegjelenést eredményeznek. A továbbiakban a teljesség igénye nélkül áttekintünk néhány gyakran alkalmazott feladatformát.

Az alternatív választásos feladatok során a diákoknak egy elemről kell eldönteni, hogy az például egy adott csoportba tartozik-e vagy sem, egy adott tulajdonsággal rendelkezik-e vagy sem, igaz-e rá a feladatban megfogalmazott állítás vagy sem. Ez a tipikusan igaz-hamis kérdéstípusnak nevezett feladattípus a papíralapú tesztekben is gyakran előfordul, azonban alkalmazási köre a használt stimulusok miatt jelentős mértékben kitérül számítógép-alapú tesztelés esetén. A leggyakrabban alkalmazott feladatforma a rádiógomb és a felirattal ellátott rádiógomb használata, de a rádiógombok kis mérete és a feladatok változatossága miatt alkalmazhatunk akár képeket (pl. zöld pipa, piros x) vagy egyéb feladatelemeket a válaszadás során. A matematika területén például megvalósítható az iskolába lépéskor

való képesség- és tudásszintmérés is, ugyanis a feladatokat ez esetben a diákok fülhallgaton keresztül hallgathatják meg. Kisiskolás diákok esetén a feladatadás és értékelés központilag alkalmazott alámondásával és kiértékelésével (a személyes adatfelvétel alkalmazása helyett) megbízhatóbb tesztelés valósítható meg (Csapó, Molnár és Nagy, 2014).

Az egyszeres választásos feladatoknál nem kettő, hanem több feladatelemből kell egyet választani, tipikusan négy elemből egyet. Ennek a feladattípusnak a legkézenfekvőbb alkalmazási módja szintén a rádiógomb alkalmazása, ugyanakkor számítógépen a válaszadás számos más formája is alkalmazható, mint például legördülő menü használata vagy képre, a kép egy részletére kattintás.

A többszörös választásos feladatokban több elemből nemcsak egyet, hanem többet kell kiválasztani. Pontozás tekintetében ez a feladattípus visszavezethető az alternatív választásos feladatokra, ahol minden egyes elemről külön-külön dönteni kell, hogy rendelkezik-e az adott tulajdonsággal, majd ezt jelölnie is kell a diáknak; vagy egy egységként pontozzuk a feladatot, és a választási lehetőségek számától függetlenül egy pontot adunk a helyes megoldásra, figyelmen kívül hagyva azt, hogy esetleg a feladat egyik felét helyesen oldotta meg a diák. Az előbbi opció esetén lényeges az elemenkénti jelölés, miután arra a rendszer nem ad pontot, ha valamit épp a helytelen feladatadás miatt egyébként helyesen nem jelölt meg a diák (ebben az esetben üresen végigkattintgatva a tesztet nem 0%-os teljesítményt érne el a diák).

A többszörös választásos feladatok megjeleníthetők választógombbal, elemenkénti rádiógombpárok megadásával, de dolgozhatunk egyéb feladatelemekkel is (pl. képekkel), amelyeken szintén változatos válaszadási lehetőségeket alkalmazhatunk (ponttal való megjelölés, kattintással színezéssel stb.).

Illesztésen és színezésen alapuló feladatokkal megvalósítható a manipulatív válaszadás is. Tipikus illesztéses feladatok a feladatelemek vonsozolására építő feladatok, ahol valamely feladatelemet ki kell egészíteni más feladatelemmel, elemekkel, vagy az egyes feladatelemeket sorrendbe kell állítani, vagy különböző szempontok szerint csoportba sorolni. Utóbbi esetben számos megoldás elfogadható (alak, nagyság, telítettség szerinti osztályozás is), amelyek mindegyikét kezeli az online rendszer. A drag-and-drop egy másik alkalmazása az egyszeres vagy többszörös választásos feladatokhoz áll közel, amikor előre adott lehetőségek közül kell választani és például egy sorozatot folytatni vagy egy másik feladatelemet kiegészíteni.

Színezés segítségével különböző típusú manipulatív feladatok szerkesztése is megvalósítható. Bármely kép, illetve kép része színezhető területnek jelölhető ki, ezáltal alkalmas a válaszadásra. A kombinatorikai típusú feladatok megoldása bármely sorrendben elfogadható.

A feladatokban a relációválasztást szintén különböző típusú feladatokkal oldhatjuk meg. Alkalmazhatunk csoportokba sorolt rádiógombokat vagy kattintással jelölést, színezést, vonszolást, vagy kattintással nyíl rajzolását. A billentyűzet segítségével relációs jeleket, betűket, számokat, szavakat vagy mondatokat, esetleg formulákat kérhetünk a nyílt végű feladatokban válaszként a diákoktól (a billentyűzetkezelési készségek fejlettségi szintjének befolyásoló hatását kiküszöbölve utóbbi alkalmazása kisiskolás diákok körében nem ajánlott *Molnár és Pásztor*, 2015). A válasz kiértékelése kapcsán meghatározhatjuk, hogy számítson-e a kis és nagybetű, az ékezet, vagy a plusz szóközők írása. Felsorolás, sorozatok vagy kombinatorikai feladatok esetén e választípus használata során definiálható, hogy lényeges-e az előre meghatározott elválasztójelekkel felsorolt betűk, szavak, számok sorrendje vagy sem. Ezekkel a megoldásokkal a nyílt végű feladattípusok jelentős része automatikusan értékelhetővé válik, azaz nem szükséges azok utólagos ember általi javítása, és megvalósítható a tesztelés végén az automatikus és azonnali visszacsatolás.

1.4. A számítógépes tesztelési környezet

A számítógépes oktatási környezet mind természetesebbé válik világszerte, így egyre nagyobb mértékben felhasználható a technológia adta környezet előnye pedagógiai értékelési célokra is. A legfontosabb értékek közé tartozik a tesztelés gazdaságossága, a tesztszerkesztés változatossága, a közvetítés és adatáramlás gyorsasága, az azonnali, objektív, standardizált visszacsatolás biztosításának lehetősége és az innovatív feladatszerkesztési lehetőségek. Elérhetővé válik az adaptív tesztalgoritmus, amelynek segítségével pontosabbá válik a tudás- és képességszintbecslés. Javulhatnak a tesztek jószágmutatói, bővül a tesztelésbe bevonhatók köre, és lehetővé válik a kontextuális adatok hatékony rögzítése és elemzése is.

A számítógépes tesztelési környezet alkalmazásával már nemcsak a diákok számára kis téttel bíró teszteknel, mint például a jelen keretrend-

szerre is épülő eDia diagnosztikus mérés-értékelési rendszer esetében vagy a nemzetközi szinten is ismert és közismert OECD PISA-mérések során találkozhatunk, hanem már nagy tétellel bíró tesztek kapcsán is (pl. SAT – amerikai érettségi vizsga vagy a grúz érettségi vizsga) jelen van. A kérdés ma már nem az, hogy megvalósítható-e, elterjeszthető-e (Molnár és Pásztor-Kovács, 2015; Molnár és Magyar, 2015), megbízhatóbb-e (Csapó, Molnár és Nagy, 2014), pontosabb képességszintbecslést nyújt-e a számítógép-alapú tesztelés, hanem az, hogy hogyan integráljuk a mindennapi tanulási-tanítási folyamatba. A kutatók és a fejlesztők ma már azokra a kérdésre keresik a választ, hogy hogyan használjuk ki minél hatékonyabban előnyeit, milyen új információhoz juthatunk a tesztelt személy kapcsán az adatfelvétel során rögzített log-adatok (pl. az egyes feladatokkal eltöltött idő) segítségével. Ilyen kérdésekre a hagyományos tesztelési mód alkalmazása mellett nem tudunk választ adni.

A technológia gyors fejlődése és terjedése következtében azok a mérés-értékelési platformok képesek lépést tartani a változással, amelyek nem igényelnek speciális követelményeket, az átlagoson, mindenhol hozzáférhetőn túlmutató szoftveres környezetet, ugyanakkor képesek az innovatív, a technológia adta előnyöket kihasználó feladattípusok kezelésére is, mindezt a hálózati sávszélesség különbözőségét kiküszöbölve. Használatuk igazodik a gyengébb és az erősebb hardveres, illetve technológiai környezethez is, miközben alkalmazásuk során biztosított a megfelelő szintű adatáramlási biztonság.

Az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport által kidolgozott és folyamatosan fejlesztett platform és rendszer, az eDia megfelel a fenti követelményrendszernek. Használatára nem igényel speciális hardveres vagy szoftveres környezetet, alkalmazásához mindössze egy internetes böngésző (Mozilla Firefox vagy Google Chrome) és internetkapcsolat szükséges. Az eDia nemcsak egy mérés-értékelési platform, hanem egy tartalommal feltöltött rendszer.

Az eDia rendszer közel 7000, elsőől hatodik évfolyamos diákok részére készült matematikafeladatot tartalmaz, mely feladatok elméleti alapjául e tartalmi keretek szolgáltak. A feladatok instrukciói első, második és harmadik évfolyamon meghallgathatóak, amivel egyrészt sikerült kiküszöbölni azt, hogy a matematikatudás értékelése során a diákok olvasási képességének fejlettségi szintjét mérjük, másrészt ki tudtuk bővíteni a tesztelésbe bevonható diákok körét, mert a feladatok jelen formájukban a még olvasni

nem tudó vagy olvasási nehézségekkel küzdő diákok körében is használhatók (Molnár, 2015b).

Az eDia rendszer alkalmazásával megvalósítható a diákok fejlődésének nyomon követése, sőt, ha elnyeri a rendszer végleges állapotát, akkor kivitelezhetővé válik az objektív viszonyítási pontokkal ellátott visszajelzés mellett a személyre szabott tesztelés is (Molnár, 2015a). Jelenleg a diákok a számukra kiközvetített teszt utolsó feladatának megoldása után visszacsatolásként grafikus környezetben megismerhetik képességszintjüket, miközben viszonyítási pontként látják az azonos évfolyamra járó többi diák átlagos képességszintjét, azaz el tudják helyezni magukat képességszint szerint kortársaik között. A pedagógus ezen túl a rendszeren belül ismerheti az osztály-, az iskola- és a tankerületszintű átlagos eredményeket is, amelyek további viszonyítási pontként szolgálhatnak a diákok fejlesztéséhez. Ezekkel a minőségi oktatás alapját képező kulcsfontosságú információkkal azonnali visszacsatolás mellett jelen pillanatban nem rendelkeznek a pedagógusok. Bár az intézményi és nem diákszintű értékelésre fókuszáló Országos kompetenciamérés eredményei hasonló információt szolgáltatnak a pedagógusok számára, de a hét hónapos visszacsatolási idő miatt azokra az eredményekre nem lehet a diákok hatékony fejlesztését építeni. Arra számítunk, hogy a gyors és objektív viszonyítási pontokkal ellátott, bármilyen gyakran alkalmazható online diagnosztikus értékelési rendszer, az eDia segíteni fogja a tanulási nehézségek korai azonosítását, és ezáltal segíti az oktatás minőségének javítását.

Az eDia rendszer szervesen illeszkedik a magyar és nemzetközi értékelési rendszerbe. Az eDia rendszer elsőtől hatodik évfolyamig tett nélkül folyamatos visszacsatolást biztosít a diákok matematikatudásának a matematikatudás három dimenzióján (gondolkodási, tantárgyi és alkalmazási) belüli fejlődéséről. Az eredmények a mérési azonosító használata következtében összekapcsolhatóak lesznek a hatodik, nyolcadik és tizedik évfolyamon zajló Országos kompetenciamérés matematika eredményeivel, majd a középiskolát lezáró matematikaérettségi eredményeivel is. Ezen átfogó rendszer segítségével remélhetően sikerül visszafordítani azt a matematika terén tapasztalható tendenciát, mely szerint a 15 éves diákjaink közel 30%-a analfabétának tekinthető a matematika terén, azaz alapvető matematikai műveletek elvégzésének módját sem ismerik (a PISA-felméréseken 2-es szint alatt teljesítenek).

1.5. Irodalom

- C. Neményi Eszter és Szendrei Julianna (1997): *Szöveges feladatok. Matematika tantárgypedagógiai füzetek*. Budapesti Tanítóképző Főiskola.
- Clements, D. H. és Sarama, J. (2014): *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach*. Routledge, New York.
- Csapó Benő (2000): Tudásszintmérő tesztek. In: Falus Iván (szerk.): *A pedagógiai kutatás módszerei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 277–316.
- Csapó, B., Molnár, Gy. és Nagy, J. (2014): Computer-based assessment of school readiness and early reasoning. *Journal of Educational Psychology*, **106**. 2. sz. 639–650.
- Csikós Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 1. sz. 35–55.
- Csikós Csaba, Sztányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia*, **110**. 2. sz. 149–166.
- Csikós Csaba és Lieven Verschaffel (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.
- Kontra József (1999): A gondolkodás flexibilitása és a matematikai teljesítmény. *Magyar Pedagógia*, **99**. 2. sz. 141–155.
- Molnár Gyöngyvér, Papp Zoltán, Makay Géza és Ancsin Gábor (2015): *eDia 2.3 Online mérési platform – feladatfelvételi kézikönyv*. SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport, Szeged.
- Molnár Gyöngyvér (2015a): *A képességmérés dilemmái: a diagnosztikus mérések (eDia) szerepe és helye a magyar közoktatásban*. Gênioz Műhely Kiadványok. 2. sz. 16–29.
- Molnár Gyöngyvér (2015b): Az óvoda és iskola feladatai az értelmi képességek fejlesztése terén. In: Kónyáné Tóth Mária és Molnár Csaba (szerk.): *Tartalmi és szervezeti változások a köznevelésben*. Suliszerviz Oktatási és Szakértői Iroda, Suliszerviz Pedagógiai Intézet, Debrecen. 179–190.
- Molnár Gyöngyvér és Magyar Andrea (2015): A számítógép alapú tesztelés elfogadottsága pedagógusok és diákok körében. *Magyar Pedagógia*, **115**. 1. sz. 49–66.
- Molnár Gyöngyvér és Pásztor Attila (2015): A számítógép alapú mérések megvalósíthatósága kisiskolás diákok körében: első évfolyamos diákok egér- és billentyűzet-használati képességeinek fejlettségi szintje. *Magyar Pedagógia*, **115**. 3. sz. 237–252.
- Molnár Gyöngyvér és Pásztor-Kovács Anita (2015): A számítógépes vizsgáztatás infrastrukturális kérdései: az iskolák eszközparkjának helyzete és a változás tendenciái. *Iskolakultúra*, **25**. 4. sz. 49–61.
- Nitko, A. J. (1996): *Educational assessment of students*. Prentice Hall, Englewood, NJ.
- Nunes, Terezinha és Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.
- Wang, H. és Shin, C. D. (2009): Computer-based and paper-pencil test comparability studies. *Test, Measurement and Research Services, Bulletin*, **9**. 1–6.
- Robitaille, D. F. és Garden, R. A. (1989): *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. Pergamon Press, Oxford.

- Roid, G. H. és Haladyna, T. M. (1982): *A technology for test-item writing*. Academic Press, New York.
- Szendrei Julianna és Szendrei Mária (2011): A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 99–139.
- Török Tamás (2009): *Szöveges feladatok és tanításuk. Tanítói kézikönyv, általános iskola 1-4. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Vincze Szilvia (2003): A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. *Magyar Pedagógia*, **103.** 2. sz. 229–261.

2.

A matematikai gondolkodás diagnosztikus értékelése

Csikos Csaba

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Józsa Krisztián

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Lajos Józsefné

Oktatási Hivatal

Szitányi Judit

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

Zsinkó Erzsébet

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

A matematikai gondolkodás diagnosztikus értékelése során a *Nunes és Csapó* (2011) által kifejtett elméleti alapokra építve, az iskolai matematikatanítás gyakorláthoz alkalmazkodva és a NAT-követelmények figyelembevételével járunk el. E három kiindulópont közül a középső, azaz az iskolai gyakorláthoz alkalmazkodás igényel előzetes értelmezést. A matematika, miként a többi iskolai tantárgy, a tartalomba ágyazott képességfejlesztés terepe lehet. Ez azt jelenti (*Csapó*, 2003), hogy az adott tantárgy hagyományos tananyához illeszkedően megvalósítható a gondolkodás általános, széles tartalmi körben transzferálható képességeinek fejlesztése. Melyek azok az általános gondolkodási képességek, amelyek matematikai tartalmakon is fejleszthetők, és amelyeknél ezzel együtt teljesül a matematikai tartalmakhoz kapcsolódás gyakorlati kritériuma? *Carroll* (1998) megneve-

zett számos olyan képességet, amelyek egy átfogó intelligenciamodell faktoraiként jelentkeznek, azonban ezek között több olyan van, amelynek az elnevezése (és ezzel együtt maga a képesség) nehezen egyeztethető össze a tantárgyi hagyományokkal. Ilyen például az átfogó auditív észlelés képessége, amelynek tartalma – mint látjuk *Dehaene* hármaskód-elméletéből (*Dehaene, Piazza, Pinel és Cohen, 2003; Dehaene, Molko, Cohen és Wilson, 2004*) – a számnevek hallás utáni percepciója kapcsán nyilvánvalóan fontos eleme a matematikai tudásnak.

Definiálható ugyanakkor néhány olyan átfogó gondolkodási képesség, amelyek nemcsak hogy releváns és azonnal látható matematikai kötődésűek, hanem ezen túl más tantárgyak fejlesztő feladataiban szerepeltetve megmutatják a matematikai(nak is nevezhető) képességek széleskörű jelentőségét. *Vidakovich (2008a)* áttekintése nyomán kiemelt matematikai képességeként tekintünk az induktív, deduktív, kombinatív, rendszerezési és korrelatív gondolkodásra. Ezek közül a kombinatív és a korrelatív gondolkodás direkt módon illeszkedik egy-egy részterülethez (a kombinatorikához és a statisztikához), míg a többi átfogóbban kapcsolódik a matematikához. Az induktív gondolkodás fogalmát a *Csapó Benő* kutatásaiban (pl. *Csapó, 2002*) mért folyamatokhoz kapcsoljuk: szabályfelismerést és szabályalkotást igénylő számsorozatok és más jelsorozatok folytatásával, kiegészítésével mérhetjük. Az arányossági gondolkodást (proportional reasoning) említjük még a szakirodalomban jellemzően matematikaiként definiált gondolkodási képességek között, amelynek egyrészt az induktív gondolkodáshoz való kötődése említésre méltó (*Schwartz és Moore, 1998*), másrészt kapcsolódása a valós világ modellezéséhez, mely átvezet minket a matematikai tudás alkalmazási dimenziójába.

Emellett számos olyan készség definiálható, amelyek – a készségek *Nagy József (2000)* által adott definíciójának megfelelően – egy szűkebb tartalmi területen a gondolkodás automatizálódott formáit jelentik. Szerencsés és optimális esetben készségszinten működik a számolás, a számlálás, az arányossági gondolkodás és a mértékváltás. Figyelembe véve a készségek és képességek fejlődésének jellemzően tartalomhoz kötött fejlődési útját (*Perkins és Salomon, 1989*), a készségek egy részét a matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése során fogjuk tárgyalni. Egy adott területen megszerzett készség más tartalmi területre transzferálódása nem automatikus folyamat, viszont oktatási módszerekkel elősegíthető.

Fejezetünkben öt matematikai gondolkodási képességre fókuszálunk (emellett más képesség- és készségelemekből is néhány példát említünk), hangsúlyozva azonban, hogy nincs véges, különösen nem ötelemű listája a matematikai képességeknek. Az online diagnosztikus értékelési projektben a deduktív, induktív, rendszerező, kombinatív és arányossági gondolkodást emeltük ki.

Deduktív gondolkodás

A logikus gondolkodás része a deduktív gondolkodás, amelyet a klasszikus kétértékű logika kétváltozós műveleteire épülő feladatokkal szoktak mérni. Ebben a rendszerben a kijelentés, vagyis modalitás szempontjából a kijelentő, állító mondat az alapegység, amelynek igazságértéke lehet igaz vagy hamis. A kétváltozós műveletekben két állítás összekapcsolásával képzünk összetett kijelentéseket, amiknek az igazságértéke szintén lehet igaz vagy hamis. A deduktív gondolkodást mérő feladatokban tíz műveletet mérünk, amelyeket valódi kétváltozós műveleteknek nevezünk. A logikus gondolkodás fejlesztése régóta megfogalmazott igénye az iskolai tanterveknek (Vidákovich, 2002).

A 2012-es Nemzeti alaptanterv matematikai műveltségterület részében 1–6. évfolyamra vonatkoztatva olvasható: „Az állítások megítélése igazságértékük szerint. Nyitott mondatok bezárása helyettesítéssel. Oksági kapcsolatok keresése, megértése. Következtetés további igazságokra.” (NAT, 2012. 67–68. o.) A deduktív gondolkodás fejlődésének egy jelentős szakasza már óvodáskorban lezárul, hiszen az óvodások már többféle következtetési típust képesek használni (Vidákovich, 2008b). 1–2. évfolyamon a deduktív gondolkodás vizsgálatára rendelkezésre áll a DIFER vonatkozó modulja, melynek felvételét szóbeli feladatkitűzés kíséri. 3–4. osztályra a tanulók olvasási képessége, valamint a nyelv logikai elemeinek a helyes használata kezdi elérni azt a fejlettségi szintet, hogy lehetővé válhat deduktív gondolkodást mérő matematikai szöveges feladatok megoldása.

Induktív gondolkodás

A gondolkodási műveletek közül az induktív gondolkodás egy olyan komplex kognitív képesség, melyet úgy is értelmeznek mint a kritikai gondolkodás egyik alapvető összetevőjét (Sternberg, 1985) vagy mint a tanulási képességek egyikét (Csapó, 1997). A fogalom definíciója szerint az induktív gondolkodás nem más, mint szabályszerűségek és rendellenességek

megtalálása úgy, hogy relációkat, tulajdonságokat összevetve keresünk és ismerünk fel hasonlóságokat és különbségeket. Az induktív gondolkodás lényege tehát tulajdonképpen az összehasonlítási feladatokban ragadható meg: dolgok jegyeinek hasonlóságát vagy különbözőségét kell azonosítani, az egymáshoz való viszonyokat felismerni (Csapó, 2002, 2004). Nagymintás keresztmetszeti vizsgálatok (Molnár és Csapó, 2011; Csapó és Molnár, 2012) és fejlesztő kísérletek (Molnár, 2011) segítségével bőséges adataink vannak a kisiskolás korosztály induktív gondolkodásának fejlődéséről és fejleszthetőségéről.

Az induktív gondolkodást mérő feladatok fejlesztik a divergens gondolkodást, hiszen nem minden esetben csak egy úton juthat el a tanuló a jó megoldáshoz. Továbbá a feladatok megbeszélése, a gondolkodás verbalizálása fejlesztheti a kommunikációs készséget, a problémamegoldó és deduktív gondolkodást.

Rendszerezőképesség

A gondolkodási képesség egyik összetevője a rendszerezőképesség, amely „a dolgok és viszonyaik, illetve a meglévő információk és viszonyaik (relációik) felismerésével, elrendezésével teszi lehetővé az új tudás létrehozását” (Nagy, 2003, 271. o). A rendszerezőképesség összetevőit az alábbi öt készségben határozhatjuk meg. (1) A fogalomképzés egyszerű fogalmak megalkotásában, kialakításában játszik szerepet. (2) A besoroló-készség segít eldönteni egy adott dologról, hogy a kiválasztott fogalomhoz tartozik vagy sem. (3) A definiálókészség nyolcfajta definíció létrehozását teszi lehetővé, általa a dolgokat fogalmi szinten tudjuk azonosítani. (4) A sorképzés az elemek valamilyen szempont szerinti sorba rendezését segíti. (5) Az osztályozás az összetett fogalmak konstruálásában, működtetésében játszik szerepet, aminek három fajtáját különböztetjük meg, a felosztást, a sorképző osztályozást és a hierarchikus osztályozást (Nagy, 2003). Ahogy fentebb említettük, a rendszerezőképesség egyik részkészsége a sorképzés, amelyhez szinte minden tantárgyból lehet feladatokat alkotni. Sorképzéskor tehát a felsorolt elemeket valamilyen szempont szerint sorba kell rendezni a tanulónak. A matematikán belül számos lehetőség nyílik ilyenfajta viszonyfelismerést igénylő feladatok alkalmazására.

Kombinatív képesség

A kombinatív képesség az a gondolkodási képesség, amely lehetővé teszi, hogy megadott elemekből meghatározott feltételeknek megfelelően konstrukciókat tudjunk összeállítani (Csapó, 1988). A gyermekek már óvodáskorban találkozhatnak olyan tevékenységekkel, melyek matematikai háttérben ismétlés nélküli kombináció áll. Ilyenek például színezéssel feladatok, a kétszínű zászló sávjainak különböző színre festése, amihez három színből választhat a gyermek. Az ilyen és ezekhez hasonló feladatokban az ismétlés nélküli kombinálást tudjuk mérni, ami a kombinatív képesség kevésbé bonyolult szintje. Ebben az életszakaszban még nem az bír jelentőséggel, hogy összesen hány különféle lehetőség van, hanem egyáltalán a lehetőségek keresése, egy újabb, az addig feltártaktól különböző lehetőség megtalálása jelenti a tevékenység lényegét, a kihívást (Csikos és Csapó, 2011). A 2012-es Nemzeti alaptanterv 1–4. évfolyamra kombinatorikából néhány elem sorba rendezését, a lehetőségek próbálgatással való megtalálását fogalmazza meg. 4. osztály végére már a kombinatív képesség minden elemét mérjük, az ismétlés nélküli és ismétléses kombinálást és az ismétlés nélküli és ismétléses variálást. Ezekhez a feladatokhoz kezdetben manipuláció kapcsolódik (színezés, rakosgatás), mely megalapozza a későbbi szimbólumokkal, számokkal végzendő tevékenységet.

Arányossági gondolkodás

Az arányossági gondolkodás alapja annak megértése, hogy két mennyiség együttesen változik (Adey és Csapó, 2011). Bár matematikai szempontból a lineáris összefüggések egyszerűnek hatnak, ezek felismerése és megértése is hosszú fejlődési folyamat eredménye, és az arányossági gondolkodás az analógiás és induktív gondolkodás más folyamataival együtt, sokféle tartalommal előfordulva fejlődik. Az arányossági gondolkodásra mind a hétköznapi élet, mind az iskolai tanulás során szükség van, fontos pillérét képezi a tudásnak. Arányosságszámítási készségnek nevezzük az arányos osztást, az arányszámítást, a mértékváltást, az arányosságok kezelését, a százalékszámítást. Az arányosságszámításnak fontos előfeltétel-készségei vannak, mint az elemi számolás, műveleti számolás és a törtek fogalma (Varga, Józsa és Pap-Szigeti, 2007). A Nemzeti alaptanterv (2012) alsó tagozatra az arányossági gondolkodásnak ezeket az előfeltétel-készségeit veszi számba, és csak 5. évfolyamtól kezdődően jelenik meg az egyenes arányosság és a fordított arányosság. Az arányossági gondolkodásnak a legegyszerűbb,

tapasztalati formája már óvodáskorban kezd kialakulni. Az általános iskolai oktatás során gyakran előkerülnek a rész-egész fogalmi, viszonyi, az egész bizonyos részeinek színezése különböző geometriai alakzatokon, az első mértékegységek. Az arányossági gondolkodás fejlődése lassú folyamat, és nagy egyéni különbségeket mutat. A tanítási tapasztalatok azt jelzik, hogy az arányokkal való műveltséghez nem feltétlenül kapcsolódik arányossági gondolkodás, hiszen bizonyos feladatok más algoritmussal is megoldhatóak. Ezért is kiemelkedő fontosságú az arányossági gondolkodás és az előfeltétel-készségek fejlesztése, ehhez pedig olyan feladatok szükségesek, melyek a tanulók képességét mérik arányossági gondolkodást igénylő helyzetekben (Varga, Józsa és Pap-Szigeti, 2007).

Ha a gondolkodási képességek iménti áttekintését azzal a céllal vesszük sorra, hogy az iskolai évfolyamok szerint melyiknek „mikor jön el az ideje”, a számolási készség korai kitüntetett szerepe elvitathatatlan. Az is nyilvánvaló, hogy a deduktív gondolkodás fejlődéséhez alapvető logikai kötőszavak egy része is már jól ismert és megfelelően használt a kiskorúak korosztályában is (Vidákovich, 2002). Más készségek és képességek viszont későbbi évfolyamokon jutnak főszerephez, így pl. a mértékváltás készségének fejlődésében az alsó tagozat végéig maradnak tartalékok, az arányossági és kombinatorikus gondolkodás fejlődése is felsőbb évfolyamokon gyorsul föl. Valamennyi készség és képesség fejlődésének menetére jellemző ugyanakkor a több évre elnyújtott, lassan induló, majd fölgyorsuló, végül a plafoneffektus hatására lelassuló fejlődésmenet (Molnár és Csapó, 2003). Ennek a fejlődésmenetnek a támogatásához a taneszközök és az oktatási módszerek jelentős átalakítása szükséges. Másképpen fogalmazva: ha valódi célként jelenik meg egy készség- vagy képességjellegű tudáselem fejlesztése, akkor a matematikán belül is, de más tantárgyakban is hosszabb időn keresztül, ismétlődő gyakorlással remélhető a megfelelő fejlesztő hatás.

2.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

2.1.1. Számok, műveletek, algebra

Az alsó tagozatos fejlesztés során a jól megtervezett konkrét cselekvő tevékenységekből, a diákok által megtapasztalt valóságból kiindulva, a valóságot bemutató vizuális, audiovizuális ábrázolásokon át jutunk el az absztraktabb rajzos, verbális, végül a jelekkel, szimbólumokkal való megfogalmazásokig. A valóság, a fogalom és a szimbólum (jel) helyes összhangba hozása, egymásnak való kölcsönös megfeleltetése sok-sok tevékenységgel történik. Már az óvodáskorban elkezdődik annak a képességrendszernek a fejlesztése, amelyet az egész számok értő használata jelez. Az egész számok mint matematikai gondolkodáselem a megfelelő szintű fejlettségnek egyik feltétele, ha az iskolába lépő tanuló számára világos, hogy nagyobb mennyiséget nagyobb szám reprezentál.

A következő feladat már óvodáskorban is megoldható (feltételezve, hogy a jobb és bal oldalak fogalmát már érti a gyermek), és egyúttal láthatjuk az online értékelésnek azt a tulajdonságát, amelyet a feladatkitűzés dinamikus elemei jelentenek. Ahogyan a bevezető fejezetben említettük, a tanulók számára nem okoz gondot a dinamikus feladatelemek kezelése. Jelen esetben a téglalapok alatt található kört kell a „fogd és vidd” módszer többszöri használatával a jobb oldali téglalap fölé húzni, ahol az minden egyes egerhúzás után újabb képként ott marad. Amikor a tanuló úgy érzi, hogy már több karika van a jobb oldalon, a „Következő” gombra kattintva jelzi, hogy készen van a feladat. A *G1. feladatban* a több-kevesebb reláció biztos tudását mérjük.

G1. feladat

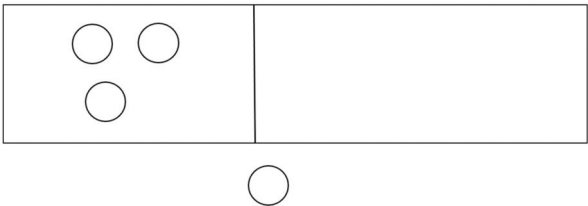
Húzz több karikát a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldali keretben látsz!

Vissza Tovább

Az első osztályban kiegészítjük az előző feladat utasítását, vagyis nem egyszerűen több karikát, hanem pontosan 3-mal (vagy más egyjegyű számmal) több karikát kérünk a jobb oldalra (*G2. feladat*). Emellett egy nyílt végű feladatrész is megjelenik, amelyben szöveggént, billentyűzetről kell a tanulóknak bevenniük a képen látható mennyiségek közötti összefüggést. Több jó megoldás lehetséges, így a $3 + 3 + 3 = 9$ vagy a $3 + 6 = 9$, sőt akár a $3 + 3 = 6$ is megfelelő.

G2. feladat

Húzz 3 karikával többet a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldalon látsz!



Írd le számtannyelven is, amit az ábrán látsz!

Vissza Tovább

Második osztályban tovább bővül ugyanehhez az alapfeladat-ötlethez kapcsolódóan a tevékenységek matematikai tartalma:

1. Rajzolj annyi kört a jobb oldalra, hogy az ábrán összesen 18 kört lássunk!
2. Írj összeadásokat, kivonásokat az ábráról! (Megoldás: $18 - 3 = 15$; $3 + 3 + 12 = 18$; $15 - 3 = 12$; stb.)
3. Piros színnel kerítsd körül úgy a köröket, hogy minden kerítésen belül ugyanannyi kör legyen! (Megoldás: 1×18 kör vagy 2×9 kör vagy 3×6 kör vagy 6×3 kör vagy 9×2 kör vagy 18×1 kör.)

A közös élmények, tapasztalatok, az együtt végzett matematikai tevékenységek egyfajta közös hivatkozási alapot jelentenek egy osztály/csoport számára. Ez a hivatkozási alap minél gazdagabb, annál biztosabb, hogy

a később elhangzó kérdések, állítások, egyéb megfogalmazások során minden tanulónál ugyanazt a képzetet, cselekvéssort, emléket, gondolatot hívjuk elő. A jelenség, amelyet Csikos és Verschaffel (2011) a Brousseau-i didaktikai egyezmény kapcsán tárgyal, az osztályközösségek közös, íratlan szabályrendszerének létrejöttével aposztrofálható, egy szükséges fázis a matematikai tudás fejlődésében. Ugyanakkor a didaktikai egyezmény szabályai az iskoláztatás évei alatt változhatnak, adaptívvá, rugalmassá válhatnak.

Számok

Az óvodából érkező gyermekeknek friss emlékeik vannak arról, hogy tárgyakat, képeket hasonlítottak össze, tulajdonságokat vizsgáltak, kapcsolatokat kerestek, viszonyokat próbáltak megfogalmazni az óvodában végzett tevékenységeik alatt. Az iskolában folytatódnak a jól előkészített és változatos tevékenységek, tudatosulnak a fogalmak tartalmi jegyei. A tanulók ezáltal megértik és jól alkalmazzák a több-kevesebb (pl. kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésekkel), ugyanannyi (pl. párba állításokkal, mely párosítás e kapcsolat értő kialakításának módszere), kisebb-nagyobb, hosszabb-rövidebb, illetve magasabb-alacsonyabb (pl. összemérésekkel), stb. relációkat. A relációkhoz kapcsolódó jeleket ($>$; $<$; = szimbólumokat) a gyermeki környezethez, a mesevilághoz kapcsolódó elnevezéssel illetik (pl. a róka szája arra nyílik, mert ott lát több tyúkot), de van, ahol a „relációs jel” megnevezést használják. Általánosságban igaz, hogy óvatosan kell bánni a matematikai kifejezések korai bevezetésével, mert előfordulhat, hogy emiatt rosszul (pl. szűkebb tartalommal) rögzülnek, s ez később hátrányt, meg nem értést okozhat a gondolkodásban. Toluk Ucar és Yavuz (2011) kutatása arról a problémáról tájékoztat, hogy az egyenlőtlenségelek értelmezése gyakran műveletként, az egyenlőségjel értelmezéséhez hasonlóan (erre vonatkozóan ld. Ginsburg, 1998) fejlődik, és később nyer relációs tartalmat. A magyar matematikatanításban alkalmazott „relációs jel” kifejezés amellett, hogy kritikával illelhető más szempontból, alkalmas lehet a fent említett török kutatók által jelzett, késői fejlődési út rövidítésére.

A megfigyelések, összehasonlítások sorozata képessé teszi a tanulókat a megkülönböztetést segítő lényeges tulajdonságok felismerésére, megnevezésére, fokozatos absztrahálásra. A különbségek, változások megfigyelése, megbeszélése, tudatos kiemelése egyfajta előkészítés a műveleti szimbólumok számára.

A tanulói tevékenységek között egyfajta „számlálást” jelent például a konkrét képeknek, ábráknak, rajzoknak jól választott mozgással (pl. sorozatok képzésekor felállás, leülés, különböző kéztartások), versikék szótagoló elmondásával (pl. egy elem kiválasztása „kiszámolókkal”), hangokkal (pl. dobbantás, koppantás, taps vagy akár valamely előénekelte hang) való leolvasása:

Jelöljön a ♣ egy tapsot a ♥ pedig egy lábdobbantást.

Az alábbi képet „olvassuk le” a jeleknek megfelelően!



Találjatok ki mozgások, hangok segítségével különböző leolvasásokat!

Rajzos jelek és matematikai jelenségek megfeleltetésének értékelése során a papíralapú tesztelés korlátait képes meghaladni az online tesztelés legalább két szempontból. Egyrészt a számítógép képes tárolni a beérkező információ időbeliségét, és a tanuló által bevitt adatok sorrendisége is pontosítható. Másrészt az adatbevitel már a billentyűzet felhasználásával is sokszínűvé tehető, és további perifériák segítségével megközelíthetjük a manipulatív, mozgásos tevékenységek gyakorlati értékelésének szintjét. A számítógép-alapú értékelés során az iménti tanulói tevékenységek átfogalmazhatók például billentyűk lenyomásával.

G3. feladat

Bogyó és Babóca csoportjában testnevelésóra van.

A kérdések után **írd be** a választ **számjegyekkel** az üres téglalapokba!

☐ a) 6 kisgyerek hulahoppkarikázott, feleannyian labdázta.
Hányan labdázta?

☐ b) A csoportból 4 gyerek a fekvőtámaszt gyakorolta, feleannyian a felülést.
Hányan gyakoroltak felülést?

☐ c) A kötélhúzásban a kötel egyik oldalán 4-en álltak.
Hány fő játszott kötélhúzást, ha mindkét oldalon egyenlő számú gyerek állt?

☐ d) 12 gyerek harmadrésze kötelet is mászott.
Hány gyerek mászott kötelet?

A *G3. feladat* az egyenlő és a fél fogalmak segítségével a mennyiségek összehasonlítása képességelem mérésére alkalmas.

A számlálás ugyanazon kép vagy szám esetén is többféle módon történhet. A számfogalom kialakítását, fejlesztését általában három irányból közelítjük meg, összhangban a neuropszichológia egyik nagy hatású modelljével, az említett hármaskód-elmélettel. Az elmélet három, egymástól elkülöníthető, ám egymással szoros kapcsolatban lévő agyi területhez köti a számok mentális reprezentációját. A számjegy, a szám neve és a számmal jelzett mennyiséghez kapcsolódó belső képek, képzetek összekapcsolódása, rugalmas kapcsolatai jelentik az alapot a számoláshoz, a számláláshoz és az egyszerű aritmetikai műveletek elsajátításához.

Minden olyan feladat, amely a számok háromféle reprezentációja közötti összefüggések gyors felismerésére épít, felhasználható a számolás pszichikus struktúráinak diagnózisára. Ha a három reprezentációs szempontot páronként vizsgáljuk, a következő alapeladatok adódnak. (1) A számjegy képének a szám nevéhez illesztése (a szám neve lehet betűvel írt vagy akár hangfájlból érkező); (2) a számjegy képének valamilyen mennyiség-reprezentációhoz illesztése: például tárgyak, körök, négyzetek számosságát számjegyhez kapcsolni; és (3) a szám nevének mennyiségi reprezentációhoz kötése.

G4. feladat

A gyermeknapon minden gyerek kapott zsetont. Akinek páros szám volt rajta, az ugrálóvárba mehetett. Aki páratlan számot kapott, az a trambulínon ugrálhatott.

Húzd a gyerekeket a megfelelő helyre!



Vissza Tovább

A számreprezentáció egyik fontos eleme a számok párosságának eldöntése, mely tudáselem értékelését a *G4. feladat*ban látott módon összekapcsolhatjuk a rendszerezőképesség értékelésével

Műveletek

A matematikai képességrendszerben additív gondolkodásnak nevezett jelenségen belül (Nunes és Csapó, 2011) az egész számokkal végzett matematikai műveletek meghatározóak a fejlesztés és az értékelés szempontjából egyaránt. Maga az additív jelző szótárilag összeadásra utal, azonban tágabb értelemben idetartoznak a mennyiségek, számosságok összehasonlítását megvalósító tudáselemek. Ezek a tudáselemek teszik lehetővé annak megértését, hogy adott mennyiségből valamennyit elvéve, majd ugyanazt hozzátevé a kiinduló mennyiséghez jutunk.

A számfogalom fokozatos kialakítását, mélyítését szolgáló tanulói tevékenységek során előkészítjük az összeadás és a kivonás műveletének matematikai tartalmú fogalmát a számok különböző leolvasásával, az összegalakok (pl. 5 dió és 2 alma ugyanannyi darab mint 3 alma és 4 dió) és különbségalakok leolvasásával.

A pótlás, azaz valamennyit valamennyire kiegészíteni (pl. $3 + \triangle = 7$) és a bontás, azaz valamennyi két vagy több részre osztása (pl. $8 = \triangle + \triangle$) – bár tartalmilag elsősorban az összeadáshoz kapcsolódik, – matematikai hátterét tekintve valójában egy nyitott mondat megoldását jelenti. A bontás lehetővé teszi egy szám sokféle előállítását, de egy szám előállítható pótlással és elvétellel is. A 4-es szám például 1-ből, 2-ből, 3-ból pótlással, míg 5-ből, 6-ból stb. elvétellel állítható elő. A változatos kirakások, a képes, szöveges szituációk során szerzett, még jellemzően szóban megfogalmazott tapasztalatok a műveletvégzés algoritmusát is jól előkészítik. Mire megjelenik az írásbeli lejegyzés, a műveleti jelek, szimbólumok értése, alkalmazásuk biztos tudása a tanult számkörben jól megalapozott. Az első két évfolyamon elsősorban az összeadás, a kivonás fogalmát alapozzuk meg és mélyítjük fokozatosan, valamint kialakítjuk a tevékenység közben és azt követően végzett önellenőrzés igényét.

Kiemelt szerepet tulajdonítunk a számegyenes segítségével végzett műveletértelmezésnek is. Erre mutat példát az alábbi feladat (*G5. feladat*).

G5. feladat

A számegyeneseken bizonyos szabály alapján követik egymást a bejelölt számok. Melyik számnál lesz a következő jelölés? Kattints a számegyenes megfelelő pontjára!

Vissza Tovább

A számegyenesen való kétirányú lépegetések összekapcsolják a műveletet és annak megfordítását. Ehhez hasonlóan nyilakkal és azok irányával tudunk hozzáadást és elvételt jelölni számsorozatokban is. A G6. feladatban a nyilak jobbra mutatva a hozzáadást, balra mutatva az elvételt jelölik. Jól szemléltetik, hogy a 4-nél 3-mal nagyobb a 7, és a 10-nél 3-mal kisebb a 7.

G6. feladat

Folytasd a sorozatokat a megadott szabály szerint!
Húzd a halmazban lévő számokat a megfelelő helyre!

a) 1, 4, 7, 10, __, __, __ c) 0, 5, 1, 6, 2, __, __, __

b) 18, 16, 14, 12, __, __, __ d) __, __, 8, 11, 14, __, __

Vissza Tovább

A számegyenes használatát a műveletvégzésben megalapozza a mentális számegyenesnek, azaz a fejünkben lévő képi mennyiségi reprezentációknak a kialakulása, melyben *Opfer* és *Siegler* (2007) szerint a száz-as számkörben a logaritmusos és a lineáris mentális számegyenes is elérhető számukra.

Tevékenységek sorával készítjük elő a szorzás (egyenlő tagok összeadása), részekre osztás (pl. megjelenítéssel, jelölés [pl. $20:4$ bevezetésével]), bennfoglalás (megjelenítés, jelölés [pl. $20:4$]), maradékos osztás (kirakással, maradék megjelölésével) fogalmi jellemzőit. A szorzás egyenlő tagok összeadásával, a részekre osztás és bennfoglalás képi megjelenítéssel, a maradékos osztás manipulatív tevékenységgel: kirakással, a maradékra rámutatással szemléltethető.

A műveletek jellemzőinek, kapcsolatainak vizsgálata során az első évfolyamon mindenekelőtt az összeadás tagjainak felcserélhetőségét, csoportosíthatóságát fedeztetjük fel a diákokkal, és kapcsolatot keresünk az összeadás és a kivonás között. A második évfolyamon a tagok változtatása és az eredmény változása közötti összefüggést, a szorzás és az osztás közötti kapcsolatot is megfigyeljük, és konkrét tárgyi tevékenységről leolvassuk a tényezők felcserélhetőségének értelmezését.

Algebra

A matematikatudomány-szemponitú tartalmi felosztásban az algebrai jelek és eljárások külön egységet képeztek a Számok, számrendszerek tudásterületén. *Schliemann* és *Carraher* (2002) számos példával szemlélteti, hogy a konkrét számok felől a számok adott halmazáig és az azt jelölő algebrai kifejezésekig többféle fejlődési út lehetséges. Az iskolai gyakorlat számára ezért nem könnyű tudományosan megalapozott fejlesztési elveket megfogalmazni. *Ginsburg* (1996) esettanulmánya arra hívja föl figyelmünket, hogy a látszólag legnyilvánvalóbb, és első osztálytól széleskörűen használt egyenlőségjel megértésében jelentős fejlődésbeli lépésekre van szükség iskoláskorban. Kezdetben az egyenlőségjel a matematikai gondolkodás folyamatának azt a pontját jelenti, amikor „most az eredmény következik” ponthoz értünk, és a tanulók fejében később válik mennyiségek közötti egyenlőség, majd az ekvivalencia reláció kifejezőjévé.

A *G7. feladat* ahhoz az alapvető képességhez tartozik, miszerint azonos dolgokat azonos jeleknek feleltetünk meg

G7. feladat

Dani a betűkártyákból a színek nevét rakta ki. Minden szó annyit ér, ahány betűből áll.

Példa: p i r o s = 5 k é k = 3

Írd be, mennyi a **fekete** és a **zöld** szó értéke!

f e k e t e = z ö l d =

Pótold a példa alapján a hiányzó számokat!

Példa: piros + kék = 8

fekete + piros =

fekete - zöld =

Vissza Tovább

2.1.2. Relációk, függvények

A Relációk, függvények témakör kiemelt szerepet játszik egyes gondolkodási képességek fejlesztésében. A multiplikatív gondolkodás elemei között említhetjük az induktív gondolkodást, azon belül a számsorozatokat, a szám- és szóanalógiákat, amelyek a Relációk, függvények témakörhöz tartoznak. Hasonlóan, az arányossági gondolkodás fejlesztése során megjelenik az egyenes arányosság függvényként való értelmezése.

A számlálás készségének fejlesztéséhez kapcsolódóan a tanulóknak csökkenő és növekvő számsorozatokat kell tudni folytatniuk a természetes számok körében, százas számkörben. Egyenletesen változó sorozatok szabályait is föl kell ismerniük (G8. feladat).

Fejlesztési cél, hogy a tanulók képesek legyenek felismerni periodikusan ismétlődő mozgásokat, követni és folytatni tudjanak megismert ritmusokat. Számsorozatokat esetében elengedhetetlen annak azonosítása, hogy csökkenő, növekvő vagy periodikus sorozatról van-e szó (G9. feladat).

G8. feladat

Folytasd a számsorokat 3-3 taggal! **Írd** be a számokat a négyzetekbe!

a) 68, 69, 70,

b) 14, 18, 22,

c) 90, 80, 70,

d) 23, 32, 41,

e) 57, 52, 47,

[Vissza](#) [Tovább](#)

G9. feladat

Törpökös két számsorozatot írt fel a törpöknek. Néhány számot virággal takart le, illetve két szám helyét üresen hagyta. **Írd** az üres mezőkbe a hiányzó számokat!



89	78	67						
19	28	37						

[Vissza](#) [Tovább](#)

Az induktív gondolkodás számsorozat-típusú feladatai kiválóan illusztrálják, hogy a diagnosztikus értékelés és a gondolkodási képességek fejlesztése összekapcsolódik. Az induktív gondolkodás során nyert következtetés két lépcsőjének egyike, a szabály megalkotása valószínűségi jellegű, míg a megalkotott szabály alapján a sorozat folytatása már egyértelműen meghatározott. Mivel a számsorozatok folytatásának diagnosztikus értékelése során a szabály leírását ritkán követeljük meg, az értékelés során olyan feladatok szerepeltetése célszerű, amelyeknél várhatóan egyféle, az adott korosztály számára optimális kihívást jelentő szabály alkotható. A képes-

ségfejlesztés során ugyanakkor mind a szabályalkotás rugalmassága és az oda vezető út megfogalmazása, mind pedig a fegyelmezett szabályalkalmazás célkitűzéssé válik.

A multiplikatív gondolkodás alkalmazási területét jelentik az olyan feladatok, amelyekben számsorozatok vagy egyéb tárgyakból, egyéb elemekből álló sorozatok vagy egy táblázat elemei közötti összefüggéseket keresünk. A tanulók induktív és deduktív gondolkodási képességeit egyaránt méri és fejlesztik ezek a feladatok (*G10. és G12. feladat*). A képességfejlesztés és a megoldások elbírálása szempontjából egyaránt fontos a szabályok sokféle megfogalmazási lehetőségét megbeszélni, megvitatni, értelmezni.

G10. feladat

Sára mindig balról jobbra haladva, szabály szerint színezi az alakzatokat.



Milyen színű lesz a következő négyzet? Kattints a megfelelő színre!

Milyen színű lesz az utolsó négyzet? Kattints a megfelelő színre!



Milyen színű lesz a következő csillag? Kattints a megfelelő színre!

Milyen színű lesz az utolsó csillag? Kattints a megfelelő színre!

Vissza Tovább

Egy adott sorozat szabályának a felismerése önmagában sem mindig egyszerű feladat. Főleg akkor okozhat nehézséget, ha egyszerre több sorozat is megjelenik párhuzamosan egyetlen feladaton belül (ld. *G11. és G12. feladat*).

G11. feladat

Zsófi egy szabály alapján bohócokat színezett.
Az utolsó bohóc színezését elrontotta.



a) Milyen színű legyen a bohóc sapkája?

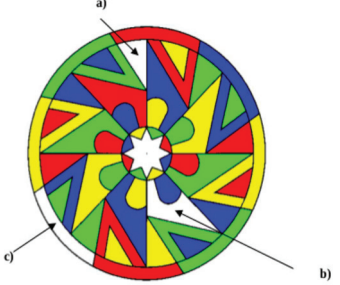
b) Milyen színű legyen a bohóc nyakkendője?

c) Milyen színű legyen a bohóc kabátja?

d) Milyen színű legyen a bohóc nadrágja?

G12. feladat

Az alábbi mandalát négyféle színnel színeztük ki úgy, hogy a színek mindig sorban egymás után következnek.



Mely színek hiányoznak a betűkkel jelölt helyeken? Kattintással add meg a helyes választ!

a)

b)

c)

A G12. feladat nehézségét az adja, hogy az azonosan színezett alakzatok egymással átellenesen helyezkednek el. A tanulóknak képeseknek kell lenniük 2. osztály végére olyan sorozatok szabályainak megállapítására és a sorozat folytatására is, amelyben a számsorozat tagjainak különbségéből

célravezető a szabály megfogalmazása. Az ilyen feladatok gyakran tehát egy újabb sorozat megalkotásán keresztül oldhatók meg. Két kérdés vetődik föl. Egyrészt az online tesztelés során használható eszközök alkalmasak-e a vázlatkészítésre, a firkálásra, a rész megoldások lejegyzésére. (Hiszen nagy segítség lehet a feladatmegoldás közben egy jegyzetlap használata.) Másrészt a „különbségek sorozatából újabb sorozat készítése” stratégiának a tanítása hatékony eszköze lehet-e a gondolkodás fejlesztésének? Vannak olyan feladatok, amelyeknél egy művelet eredményével mint részeredménnyel kell újabb műveletet végeznünk, hogy a keresett végeredményt megtalálhassuk (*G13. feladat*). A feladat rendkívül nehéz, ugyanakkor az intelligenciatesztekben megszokott módon kevés fogalomra és számos képességelemre épít.

G13. feladat

A felismert szabály alapján írd be az alakzatokba a hiányzó számokat!

The diagram consists of two rows of shapes. The top row contains five triangles. The bottom row contains five pentagons. Each shape contains numbers in specific positions, with some positions being empty boxes for the user to fill in.

Shape	Top Left	Top Right	Bottom Left	Bottom Right	Center
Triangle 1	6		4	8	
Triangle 2	5		7	3	
Triangle 3	12		22	2	
Triangle 4			7	9	
Triangle 5	40		20		
Pentagon 1	2	3	5		
Pentagon 2	5	5	24		
Pentagon 3	8	7	55		
Pentagon 4	3	9			
Pentagon 5				41	7

Vissza Tovább

A legtöbb számsorozat esetén létezik egy kézenfekvő szabály, amelyet a legkisebb kognitív erőfeszítéssel meghatározhatunk. Az induktív gondolkodás képességének egyik eleme éppen az, hogy a tanuló fölismerje az információelméleti szempontból „gazdaságos”, emiatt kézenfekvőnek vagy legintelligensebbnek nevezhető megoldást. A *Csapó* (2002) által alkalmazott induktív gondolkodási teszt utasításai ezt a következőképpen fogalmazzák meg: azt a szót vagy számot kell leírni, „amelyik a legjobban illik” a kérdőjel helyére vagy a vonalra.

Az induktív gondolkodás képességének fejlesztése mellett a divergens gondolkodás alakításának követelményéből következik, hogy minden olyan szabályt el kell fogadnunk megoldásként, amelyet a tanuló képes ra-

cionálisan levezetni. Az iménti feladat esetében például a számok közötti különbség mindig eggyel nő, vagyis a következő tag 6-tal lesz nagyobb, mint 15. A leegyszerűsítő, a sorozat információtartalmát nem kihasználó szabályalkotást is el kell ismernünk, azonban a tanórán megmutatjuk ilyen esetekben, hogy „több” van a sorozatban. Egy lehetséges leegyszerűsítő szabály lehet például, ha azt egyszerű, monoton sorozatként azonosítjuk, ahol a soron következő tag nagyobb az előzőnél. Ha ezt a szabályt alkotjuk meg, akkor a folytatásban bármely két természetes szám megfelelő, amelyek a sorozat monotonitását biztosítják. Egy másik leegyszerűsítő szabály, ami gyakran előfordul kisiskolásoknál, hogy periodikusnak ítélnék meg egy számsorozatot, amelyet a feladat kitűzője nem annak szánt. Ebben az esetben a 15-öt az 1 és a 3 követné. A feladatok kitűzése során tehát vagy eleve adjuk meg a sorozat folytatásának szabályát, vagy legalább utaljunk a megállapítandó szabály típusára, vagy pedig a szabályalkotás elválaszthatatlan lesz a sorozat folytatásától.

2.1.3. Geometria

A matematikai gondolkodás rendszerében két képességet emelünk ki, amelyek szorosan kötődnek geometriai tartalmakhoz. Az intelligenciakutatás egyik élénken vizsgált képességterülete a térbeli gondolkodás, vagyis az embernek az a képessége, hogy mentálisan, gondolataiban képes elforgatni síkbeli és térbeli alakzatokat, és azokkal műveleteket, például geometriai transzformációként értelmezett forgatást végezni. A geometria egyik részterületéhez, a méréshez pedig a multiplikatív gondolkodás részeként értelmezett arányossági gondolkodás kapcsolható. Mind a terület- és térfogat-számítás, mind a mértékváltás területén adhatók olyan feladatok, amelyek lényegében az arányossági gondolkodás fejlettségét vagy annak hiányosságát jelzik. A térbeli gondolkodáshoz e korosztályban a következőkben leírt tartalmak kapcsolódnak.

A transzformációkkal létrejövő számtalan minta, valamint a természetben, a népművészetben, az épített környezetben, különböző emberi alkotásokban található minták megfigyelése előkészíti a szimmetriák, ismétlések, ritmusok, periodicitások matematikai értelmezését. A tanórai manipulatív és képi szintű tevékenységek elősegítik, hogy a tanulók képessé váljanak

a szimmetriák felismerésére tapasztalati (manipulatív és képi) szinten. Le-
gyenek képesek megkülönböztetni a tükörképet az eltolt vagy elforgatott
képtől az eredeti képhez viszonyítva (*G14. feladat*).

G14. feladat

A felső sorban lévő járművek tükörképét a vonal alatt látod.

Jelöld igen-nel, vagy nem-mel, hogy helyes-e a tükörkép!

Helyes a tükörkép?

☐ Igen ☐ Nem ☐ Igen ☐ Nem ☐ Igen ☐ Nem

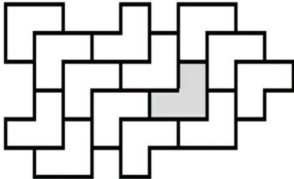
☐ Igen ☐ Nem ☐ Igen ☐ Nem ☐ Igen ☐ Nem

☐ Vissza ☐ Tovább

A geometriai tudás jellegzetes képességrendszerét jelenti a térszemlé-
let. A térbeli képességnek (*spatial ability*) is nevezett képességrendszerünk
teszti lehetővé, hogy a téri információt feldolgozzuk, a téri ingereket kódol-
juk, felidézzük és átalakítsuk (Séra, Kárpáti és Gulyás, 2002). A térszemlé-
let bizonyos tesztjei az alsó tagozatos korosztály számára is megoldhatók,
mint ahogyan Chan (2007) vizsgálatában történt. Az ott használt teszt, mi-
ként a hazai fejlesztésű Séra–Kárpáti–Gulyás-teszt (2002) is az idősebb,
14 éven felüli korosztályok számára lettek kifejlesztve. A térbeli képesség
mérése régóta integrált része az intelligenciateszteknek, és akár Gardner
többszörös intelligenciamodellje (Gardner és Hatch, 1989), akár a vizuális
érvelés kibontakozó paradigmája felől indokolható, hogy iskolai keretek
között is diagnosztizáljuk a térszemlélet fejlettségét. A *G15. feladat* a térbe-
li képesség tesztelésének egyik jellegzetes elemét mutatja be.

G15. feladat

Válassz ki a legördülő listából, hogy folytatható-e a képen látható parkettázás a megadott lapokkal!













[Vissza](#)
[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: Folytatható / Nem folytatható

A feladatban a harmadik alakzat kivételével az összes többi alkalmas arra, hogy hozzáillesszük a megadott lapokhoz, ám a feladat a parkettázás folytatásáról szól, és ezért az első és az ötödik elem a választandó. Egyébiránt a feladatot a matematikai tudás alkalmazási dimenziójához tartozóként is kezelhetjük, hiszen implicit módon tartalmazza azt az információt, hogy a parkettázás során jellemzően egybevágó síkidomokat használunk.

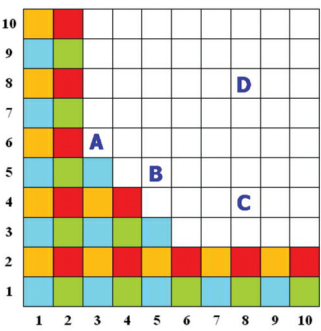
Az induktív gondolkodás geometriai tartamon keresztüli mérésére a *G16. és G17. feladatokat* mutatjuk be.

Figyelemre méltó jellemzője az eDia felület feladatírói lehetőségeinek a „fogd és vidd” módszer alkalmazása, amely kiegészül a megoldás automatikus értékelésével. Az online diagnosztikus tesztelés jelenleg is a geometria területén küzd a legnagyobb kihívásokkal, hiszen nemcsak a feladatki-tűzés, hanem a válaszadás is gyakran vizuális eszközök használatát igényli, azonban az iménti feladatból jól látható a lehetőségek fejlődése.

A geometriai tartalmak lényegében minden matematikai képesség fejlődésének mérésére és fejlesztésére is alkalmasak. A *G18. feladat* a rendszerezőképeség méréséről szól. A feladat, amennyiben a pontos fogalomhasználatot kívánjuk vele mérni, a matematikai tudás diszciplináris dimenziójához is tartozhat.

G16. feladat

Petra a 10 x 10-es táblát – a bal alsó saroktól kezdve – egy szabály alapján kezdte színezni.



Milyen színű lesz az A-val jelölt négyzet?
Kattints a megfelelő színre!

Milyen színű lesz a B-vel jelölt négyzet?
Kattints a megfelelő színre!

Milyen színű lesz a C-vel jelölt négyzet?
Kattints a megfelelő színre!

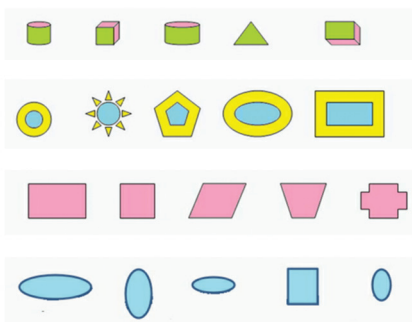
Milyen színű lesz a D-vel jelölt négyzet?
Kattints a megfelelő színre!

Vissza

Tovább

G17. feladat

Mindegyik sorban van egy kakukktójás. Melyik az? Kattints rá!



Vissza

Tovább

G18. feladat

Húzd a következő alakzatokat a halmazábra megfelelő részébe!






Egyenes vonallal határolt zárt alakzat

Alakzatok

Görbe vonallal határolt zárt alakzat

Vissza
Tovább

Vannak olyan feladatok, amelyekben a szabálykövetés mérésének lehetősége és az eDia felület „fogd és vidd” módszere egyaránt megtalálható. A G19. feladat remekül reprezentálja a két módszer ötvözésének lehetőségét.

G19. feladat

Rendezd növekvő sorrendbe a gyümölcsöket tömegük szerint!
Húzd a képeket a megfelelő helyre!

_____ < _____ < _____ < _____






Rendezd csökkenő sorrendbe az állatokat tömegük szerint!
Húzd a képeket a megfelelő helyre!

_____ > _____ > _____ > _____






Rendezd növekvő sorrendbe a tárgyakat aszerint, hogy mennyi folyadék fér bele!
Húzd a képeket a megfelelő helyre!

_____ < _____ < _____ < _____






Rendezd csökkenő sorrendbe a vonalakat hosszúságuk szerint!
Húzd a képeket a megfelelő helyre!

_____ > _____ > _____ > _____






Vissza
Tovább

2.1.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

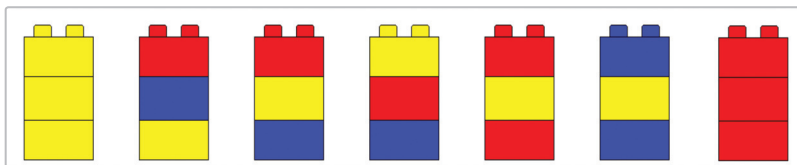
A kombinatív gondolkodás műveletei részben a kombinatorika matematikai tudásterületének elemeihez köthetők. A permutálás, a variálás és kombinálás matematikai jelenségeinek pszichikus megfelelőit feltárva számos olyan további képességelemhez jutunk, amely az iskolai matematikaoktatásban nem tipikusan a kombinatorika része. Ilyen például egy adott halmaz összes részhalmazának megkeresése vagy a Descartes-féle szorzathalmaz generálása. A matematikai gondolkodás elemei között azonban ez utóbbiak is kétségtől a multiplikatív gondolkodás megnyilvánulásai, pszichológiai szempontból pedig a kombinatív gondolkodáshoz sorolhatók.

Általában a 2. évfolyam végére a tanulók fejlődésükben nem jutnak el az önálló kombinatív képességrendszer kiépítéséhez, hiszen ez feltételezne valamely struktúrában való gondolkodást, ami viszont magas matematikai absztrakciós képességet igényel. Ezért a mérés során sem célszerű felvetni ilyen jellegű problémákat, hanem érdemes kis elemszám esetén értékelni a részképességek fejlettségét.

A G20. és G21. feladat segítségével mutatjuk be a kombinatorikai tudás elemeinek egymásra épülését az alapozó szakaszban:

Piros, sárga és kék legóelemekből háromemeletes tornyokat építettem. Milyen tornyokat építhettem még? Rajzolj további, a bemutatottaktól a színek elrendezésében különböző tornyokat!

G20. feladat

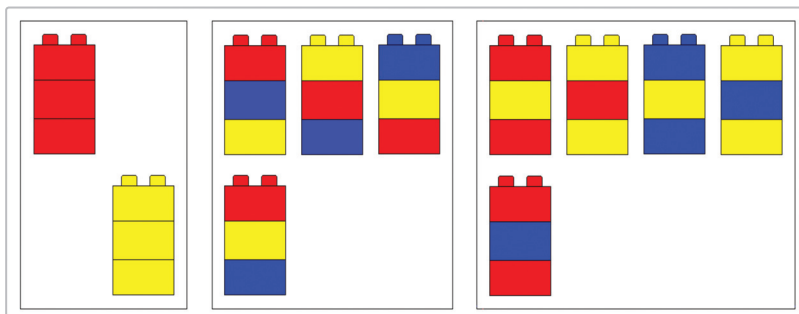


Ebben a feladatban a problémát a szempont megtartása jelenti. A feladatmegoldónak minden új ötlete esetén ellenőriznie kell, hogy a kitalált torony megfelel-e a feltételeknek, azaz háromemeletes és piros, kék vagy sárga színek alkotják. Emellett azzal is törődnie kell, hogy az új torony nem szerepel-e már a korábbiak között. A tanulók tudásának felmérése szempontjából fontos, hogy ki mennyi új objektummal bővítette a készletet, ki-

nek sikerült a meglevőktől és egymástól is különbözőt alkotni. Nehezítést jelenthet a feladat másfajta megfogalmazása, amikor a lehetséges esetek három csoportjából szerepel néhány megadott eset.

G21. feladat

Piros, sárga és kék legóelemekből tornyokat építettem. Ezután három csoportba rendeztem azokat:



Milyet építhettem volna még? Rajzolj további tornyokat a megfelelő helyekre!

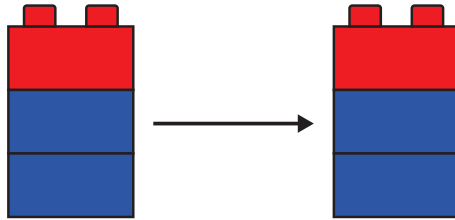
A G21. feladatban a rajz, és nem a szöveg mutatja a rendszerezés szempontját. A szempont megfejtése a feladat lényeges eleme. Ebben az elrendezésben azonban a teljes rendszer átláthatósága kérdéses. Kérdéses továbbá az is, hogy található-e más szempont is a megoldáshoz.

A második csoport elrendezése azt mutatja, hogy az egymás alatt lévő elemek a tornyok „megfordításával” jöhetnek létre. Ez a stratégia itt nagyon jól működik. Nem vihető viszont tovább a harmadik csoportra, hiszen itt a példák sorából kimaradt néhány jellemző elem, ezért nem tűnhet fel az esetleges hiány. Elképzelhető, hogy valaki a harmadik csoportban lévő elemek elrendezésében érez valamiféle szabályosságot, nevezetesen, hogy az elemek egymás inverzei. Ebben a rendszerben viszont nem garantált az összes elem megtalálása, hiszen a rajz nem mutat példát a következő típusra:



A feladatban tehát más-más stratégiát kell alkalmazni az egy-, két-, illetve háromszínű elemek megtalálásához. Elképzelhető, hogy valakinek épp a megoldási stratégia jelenti a szempontrendszer alapját, és a fenti elemet a második csoportba rajzolja, hiszen

ebből a toronyból: ez a torony megfordítással jön létre.



A fenti feladat bemutatásával a kombinatorikai gondolkodás sokszínűségét szeretnénk volna illusztrálni, melynek egyenes következménye, hogy az értékelés során ebben a szakaszban meg kell elégednünk az adott feltételrendszerbe illeszkedő további néhány elem megtalálásával.

A kombinatorika témakör – noha alkalmas valamennyi matematikai képesség fejlesztésére – a mérés során leginkább a kombinatív képességhez kötődik. A *G22. feladat*ban a deduktív gondolkodás és a kombinatív gondolkodás nyilvánvalóan egyaránt szerepet kap.

G22. feladat

Bence két dobókockával játszott egyszerre, közben állításokat fogalmazott meg. **Csoportosítsd** a Bence által dobókockával kidobott két számra vonatkozó állításokat aszerint, hogy azokra mi igaz: „lehet”, „biztos” vagy „lehetetlen”!

Húzd a mondatokhoz tartozó betűket a megfelelő halmazba!



a

A két szám összege nagyobb lesz, mint 2.

b

A két szám szorzata nagyobb lesz, mint 36.

c

A két szám összege páros lesz.

d

A két szám különbsége legfeljebb 5 lesz.

lehet

biztos

lehetetlen

Vissza
Tovább

A G23. feladat a képi szintű feladatkitűzésre példa. A matematikai tananyagok és tesztfeladatok manipulatív, képi és szimbolikus típusai felelevenítik azt a több évszázados didaktikai vitát, amely a három típus sorrendjére, az elsajátítás nehézségére és logikájára vonatkozik. A probléma már a hetvenes években is a kutatási eredmények szintézisét ihlette (Suydam és Higgins, 1977), és a mai napig nincs átfogó és egyszerű válasz arra a kutatási kérdésre, amely így hangozhat: igaz-e, hogy a matematika tanulása során is először konkrét anyagokkal, manipulatív tevékenységekkel célszerű kezdeni a fogalmak kialakítást, majd ehhez képi és más érzékszervi reprezentációk társulnak, végül eljutunk a nyelvi és matematikai jelekkel leírt fogalmakig?

A Suydam és Higgins (1977) által áttekintett számos kutatás között voltak, amelyek megerősítették a manipulatív-képi-szimbolikus elsajátítási sorrendre vonatkozó hipotézist, de voltak, amelyek cáfolták. Álláspontunk szerint a tanulási és kognitív stílus is meghatározza, hogy milyen egyéni eltérések vannak a fogalmak kialakulásában, így azt tartjuk helyesnek, ha az online diagnosztikus mérés feladatai között szerepelnek mindhárom absztrakciós szintet érintő feladatok.

G23. feladat

A kancsóba 1 liter folyadék fér.

Húzd a különböző mennyiségű folyadékokat a megfelelő halmazba!



8 dl



100 cl



= 1 liter



7 és fél dl



15 dl

Belefér a kancsóba.

Nem fér bele a kancsóba.

Vissza
Tovább

G24. feladat

A tanító néni két dobókockát tett az asztalra.



Azt kérte a gyerekektől, hogy egyszerre dobjanak mindkettővel és tippeljék meg, hogy öt dobásból HÁNYSZOR LESZ A DOBOTT PONTOK ÖSSZEGE PÁROS ÉS HÁNYSZOR LESZ AZ ÖSSZEG KÉTJEGYŰ SZÁM.

Aki végrehajtotta a feladatot, négylevelű lóherés nyomdát kapott, aki nem hajtotta végre, fekete macskás nyomdát kapott.

Olvasd el a következő állításokat! Kattintással jelöld, ki milyen nyomdát kapott!

 	Peti megtipelte, hogy hányszor lesz a dobott pontok összege páros és megtipelte, hányszor lesz az összeg kétjegyű szám.	☐
 	Lili megtipelte, hogy hányszor lesz a dobott pontok összege páros és nem tippelte meg, hányszor lesz az összeg kétjegyű szám.	☐
 	Zoli nem tippelte meg, hogy hányszor lesz a dobott pontok összege páros és megtipelte, hogy hányszor lesz az összeg kétjegyű szám.	☐
 	Szonja nem tippelte meg, hogy hányszor lesz a dobott pontok összege páros és nem tippelte meg, hogy hányszor lesz az összeg kétjegyű szám.	☐

Vissza
Tovább

Befejezésül egy olyan feladatot mutatunk be, amely tartalma révén a kombinatorika területhez kapcsolódik, ám a benne értékelt gondolkodási képesség elsősorban a deduktív gondolkodás. Emellett – a fejlesztő értékelés lehetőségét szem előtt tartva – a *G24. feladat* a kombinatív gondolkodást is érinti, hiszen a két logikai kijelentés és kétféle igazságérték egymásra vetülése négy kombinatorikai lehetőséget ad.

2.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

2.2.1. Számok, műveletek, algebra

A számfogalom fejlődésében az egész és a racionális számok megfelelő reprezentációja kulcsfontosságú. Az additív gondolkodás megjelenési formái között szerepelnek olyan képességek, amelyek elvezetnek a racionális számok reprezentációjához. A racionális számoknak a gondolkodásunkban való egyik megjelenése a számláló és a nevező közötti viszony mentális leképezése. Már óvodáskortól előkészítjük a részekre osztás segítségével a törtszámok tapasztalati bázisát.

Az egész egyenlő részekre osztásával különféle mennyiségek (hosszúság, tömeg, űrtartalom, terület, szög, idő) segítségével alakul az egységtört fogalma, majd az egységtörtekből több rész egybefogásával készülnek a kis nevezőjű törtszámok. Kétirányú tevékenységet végeznek ennek során a gyermekek. Vágással, tépéssel, hajtogatással, színezéssel, a részek összeillesztésével egységtörtök többszöröseit állítják elő, illetve az egészhez viszonyítva megneveznek előállított törtrészeket. Különféle mennyiségekből előállított törteket összehasonlítanak, nagyság szerint rendezik azokat, keresik az egyenlőket. Az összeadás műveleti tulajdonságairól a gyermekek folyamatosan szereznek tapasztalatokat (*G25. feladat*).

Kirakások, szám- és szöveges feladatok kínálnak lehetőséget a zárójel egy számmá összekapcsoló szerepének gyakorlására, az összeg tagonkénti sorozhatóságára (*G26. feladat*).

G25. feladat

Micimackó és barátai távolugróversenyt rendeztek. A verseny során megmérték, ki hány ugrással képes eljutni a 120 méterre levő fához.

Fülesnek 24 ugrásra volt szüksége.

Malacka feleakkorát tud ugrani, mint Füles.

Róbert Gidának 30 ugrásra volt szüksége.

Kanga, a kenguru kétszer nagyobbat ugrik, mint Róbert Gida.

Írd a megfelelő számot a téglalapba!

- a) Hány ugrással jut el Kanga a célba? ugrással
- b) Hány ugrással ér Malacka a fához? ugrással
- c) Milyen messze van az a fa, amelyet Füles 12 ugrással érne el? méterre
- d) Melyik állítás HAMIS az alábbiak közül? **Kattints rá!**

• Füles kétszer akkorát ugrik, mint Malacka.

• Malacka tudja a legkisebbet ugrani.

• Róbert Gida kétszer akkorát ugrik, mint Kanga

• Róbert Gida 4 méteresekeket ugrik.

Vissza

Tovább



G26. feladat

A húsvéti nyúl a kerek erdő 7 lakóját lepte meg színes tojásokkal. Mindenki 3 darab csíkos és 5 darab virágmintás tojást kapott.

Kattintással jelöld meg az alábbi nyitott mondatok mellett, hogy melyik felel meg a feladat szövegének és melyik nem!

$$7 \cdot (3 + 5) =$$

Megfelel

Nem felel meg

$$3 + 5 \cdot 7 =$$

Megfelel

Nem felel meg

$$7 \cdot 3 + 7 \cdot 5 =$$

Megfelel

Nem felel meg

$$7 \cdot 3 + 5 =$$

Megfelel

Nem felel meg

Vissza

Tovább

Az írásbeli szorzás során a tanulók tudatosan alkalmazzák a műveleti tulajdonságokat.

A G27. feladat játékos formában ellenőrzi a szorzótábla ismeretét.

G27. feladat

A sárkányeregető versenyen mindenki több papírsárkánnyal is rajthoz állhatott. Húzd a papírsárkányokat ahhoz a gyerekekhez, akinek a rajtszáma megoldja a papírsárkányon lévő nyitott mondatot!

$x \cdot x = 16$

$9 \cdot 8 = 16$

$3 < 2 < 6$

$4 < 5 < 6$

8

7

Vissza

Tovább

Az írásbeli műveletek közül a legnehezebb eljárás az írásbeli osztás. 4. osztályban eszközhasználatlaltal ismerkednek meg a gyerekek az egyjegyű számmal való osztással.

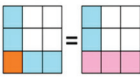
A műveletvégzések során biztonságot ad a gyerekeknek a többféle ellenőrzési módszer, amelyekkel az eljárás tanulásakor megismerkednek. Az ellenőrzés módszerei között megtalálható a becslés, a visszaszorzás, az osztandó tagokra bontása, valamint a zsebszámológép használata.

Negyedik osztályban már általában lehetőséget teremtünk többféle megoldási mód keresésére és a megoldások összevetésére. Ily módon fejleszthető a modellek között létező kapcsolat felismerésének képessége. Tudatossá válik a gyerekekben a különböző modellekben megjelenő adatok azonossága, az ábrázolások és a műveletek összekapcsolása. A különféle megoldási módok megismertetése, ezek értő alkalmazása a biztosítéka annak, hogy új helyzetekben, megváltozott feltételek esetén is tudják a gye-

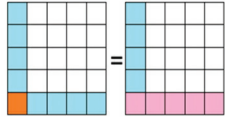
rekek ezeket az eljárásokat aktivizálni, szükség esetén a problémához illően módosítani. Így lesz a tanulók ismerete könnyen továbbfejleszthető. A többféle megoldási mód megismerése, összehasonlítása során a gyerekek megítélhetik azok célszerűségét, hatékonyságát is. A *G28. feladattal*, majd a szövegtörzsben két példát mutatunk be egy feladat többféle módon való megoldására:

G28. feladat

A páratlan számokat a rajzok alapján kétféle alakban írhatjuk fel.



PÉLDÁK: $5 = 2 \cdot 2 + 1 = 2 + 3$



$9 = 2 \cdot 4 + 1 = 4 + 5$

a) Melyik szám illik az alábbi számban a helyébe? Írd be!

$2 \cdot 6 + 1 = 6 + \text{ }$

b) Melyik szám illik az alábbi számban a helyébe? Írd ide!

$2 \cdot \text{ } + \text{ } = \text{ } + 9$

c) Mennyi az alábbi páratlan szám értéke? Írd be az = elé!

 = $2 \cdot \text{ } + \text{ } = \text{ } + 12$

d) Tíbi a tanult módszerrel a 43-at bontotta fel. Milyen számot írt a helyébe? Írd ide!

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

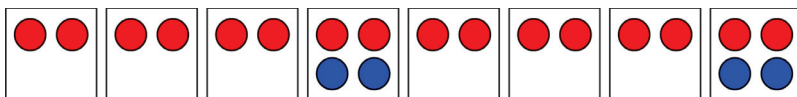
◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀ ▶ ◀ ▶

◀



A kérdésre a választ a kialakult kép alapján fogalmazzák meg: 6 kétszemélyes és 2 négy személyes kabinban utazott a 20 fős társaság.

2. megoldás: próbálgatással, táblázat alkalmazásával

A kétszemélyes kabinok száma	1	2	3	4	5	6
A négy személyes kabinok száma	7	6	5	4	3	2
A kétszemélyes kabinokban utazók száma	2	4	6	8	10	12
A négy személyes kabinokban utazók száma	28	24	20	16	12	8
Összes utazó száma	30	28	26	24	22	20

Ebből a megoldásból több információ is leolvasható, olyan kérdésre is választ kapunk, amit az eredeti probléma nem fogalmaz meg. Pl. 30 fő hogyan utazhat fel a hegyre nyolc kabinban?

3. megoldás: nyitott mondat segítségével

Jelölje a felhasznált kétszemélyes kabinok számát: $\square$

Ezek szerint a felhasznált négy személyes kabinok száma: $8 - \square$

A kétszemélyes kabinokban utazók száma: $\square \times 2$

A négy személyes kabinokban utazók száma: $(8 - \square) \times 4$

Az összes utazó száma: $\square \times 2 + (8 - \square) \times 4 = 20$

Ebből meghatározható, hogy a kétszemélyes kabinok száma 6. (A gyerekek ennek meghatározásához a tervszerű próbálgatás módszerét alkalmazzák.)

A felhasznált négy személyes kabinok száma 2.

Az iménti feladat három lényegesen különböző megoldási módja példa arra, hogy nem várhatjuk a gyerekektől egyetlen séma alapján a problémák megoldását, nem ragaszkodhatunk szigorúan betartandó lépések követéséhez. Ezért jó, ha értékelésünk a helyes modellválasztásra, és a modellen belüli problémamegoldásra irányul.

A rendszerezőképeség mérésének alábbi példája negatív és pozitív számok sorba rendezését kívánja. A negatív számokkal 3–4. évfolyamon kezdenek el ismerkedni a gyermekek, sorképzési feladattal (G29. feladat) ellenőrizhetjük a bevezetett fogalom megértését.

G29. feladat

◀ Húzd a következő hőmérsékleti értékeket a relációs jeleknek megfelelő helyre!

+5 °C 0 °C -6 °C -2 °C

_____ < _____ < _____ < _____

◀ Húzd a következő hőmérsékleti értékeket a relációs jeleknek megfelelő helyre!

-8 °C +8 °C +1 °C -1 °C

_____ > _____ > _____ > _____

A számok valamilyen szempont szerinti besorolása, halmazba foglalása is gondolkodási művelet, ez is a rendszerező képesség része. A besoroló készség sajátosságok felismerésével működik. A besorolás négy egyszerűbb készséggel funkcionál attól függően, hogy hány besorolandó elem és besoroló jellemző van jelen. A G30. feladatban több besoroló tulajdonság és több besorolandó elem is jelen van, ezt szortírozásnak nevezzük. A tanulónak a célhalmazok közül kell megtalálnia azt, amelyikbe a besorolandó elem tartozik.

G30. feladat

◀ Húzd a következő számokat a táblázat megfelelő részébe!
(Egy cellába akár több számot is húzhatsz!)

450 551 550 500

	Százásokra kerekített értéke 500	Százásokra kerekített értéke nem 500
PÁROS		
PÁRATLAN		

A 3–4. osztályos aritmetika témakör következő példafeladatában az arányossági gondolkodás fejlettségét mérjük.

G31. feladat

A lakótelepen egy tömbben 60 lakás található. Ennek egyharmad része egyszobás lakás. **Hány egyszobás lakás van ebben a tömbben?**

Válaszd ki a felsoroltak közül a helyes választ!

10 lakás.

15 lakás.

20 lakás.

25 lakás.



Egy emeleten 6 lakás található. **Hány emeletes a ház?**

Írd be a válaszdodat, (egy számot) az üres téglalapba!

A lakók egynegyed része már kicseréltette az ablakokat hőszigeteltre. **Hány család nem cseréltette még ki az ablakait?**

A legördülő listából **válaszd ki** a helyes választ!

A családok egy része már szereltetett fel légkondicionáló berendezést is, összesen tizet számoltunk meg. **Hányad része ez az összes lakásnak?**

Kattintással válaszolj!

A fele.

A harmada.

A negyede.

A hatoda.

Vissza

Tovább

Legördülő lista szövege: 35 család / 40 család / 45 család / 50család

A G31. feladatban több készség megléte, egyidejű működése is szükséges a sikeres feladatmegoldáshoz. Mivel szöveges feladatról van szó, fontos, hogy a tanulók olvasási képessége olyan szinten legyen, hogy tudják értelmezni a mondatokat és a teljes szöveget. Kell, hogy megértsék a feladat matematikáját, azaz reprezentálniuk kell a megfogalmazott matematikai problémát. A szövegből át kell tudniuk ültetni a kérdést számokra, formulákra. Ezt követik a számolási műveletek a jó eredmény megadása érdekében. Továbbá át kell látniuk, hogy a feladatok kapcsolódnak egymáshoz. Végül a G32. feladatban egy újabb feladatot mutatunk az arányossági gondolkodás témájához.

G32. feladat

A nyári strandtábor 2 turnusába összesen 48-an jelentkeztek. Mindkét turnusban ugyanannyian voltak. **Hány gyerek volt egy-egy turnusban?**

Írd be a választ számjegyekkel az üres helyre!



A gyerekek különböző korosztályúak voltak. Az összes résztvevő nyolcad része még óvodás. **Hány gyerek iskolás a strandtáborosok közül?**

Kattints a helyes válaszra!

☐ 30
 ☐ 40
 ☐ 42
 ☐ 44

A gyerekek felügyeletét 1-1 turnusban 4 tanító néni látta el. **Hány gyerek jutott egy tanító néni-re, ha mindegyik csoportban ugyanannyi gyerek volt?**

Válassz a legördülő listából!

A strandtáborba a 48 gyerek közül 16-an úgy jöttek, hogy még nem tudnak úszni. **Hányad része nem tudott úszni a teljes létszámnak?**

Válassz a felsoroltak közül!

☐ fele
 ☐ harmada
 ☐ negyede
 ☐ hatoda

Vissza

Tovább

Legördülő lista szövege: 4 gyerek / 5 gyerek / 6 gyerek / 8 gyerek

2.2.2. Relációk, függvények

Elvárás, hogy 3–4. osztályban a tanulók tudjanak egyszerű grafikont készíteni, arról adatokat visszaolvasni. Képesek legyenek szöveggel, képekkel adott helyzethez matematikai modellt keresni, azt az adatoknak megfelelően. Szükség esetén többféle matematikai modellt (sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok, grafikonok) használhatnak a szöveges feladatok megoldásához.

Az egyszerű összefüggéseket a tanulók felismerik, kifejezik példákkal, elemi általánosítással. Az összefüggéseket felismerhetik, a kapcsolatokat leolvashatják ábráról, táblázatból.

A megtanult ismeretek, a készségek, képességek értékelésére kezdetben az egyszerű utasítással megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben általában egy megtanult, begyakorolt lépés vagy lépéssor elvégzésére kérjük a tanulót. Előfordul, hogy még nem matematikai szimbólumokat használunk a feladat megadásakor, hanem rajzot, ábrát, és gyakran az elvégzendő

lépéseket sem „matematikai” formában, hanem rajzban, valamilyen módon szemléltetve, sőt a mindennapi gyakorlatban valamilyen tevékenység formájában várjuk. A következőkben néhány példafeladattal szemléltetjük, milyen változatos tartalmú feladatok nyújtanak lehetőséget az induktív szabályfelismerés és -követés gyakorlására.

G33. feladat

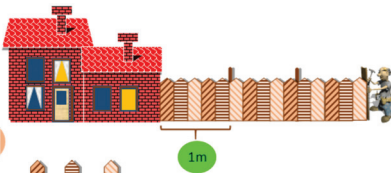
A kerítés készítéséhez a mester háromféle mintázatú, de azonos szélességű léceket használ.

a) Pontosan 5 méter kerítéssel készült el a mester. Melyik fajta léce következik?
Írd ide a betűjelét: 

b) Melyik fajta léccel fejeződik be a kerítés
4. méteres szakasza? Írd ide a betűjelét: 

c) Az első méter után hányadik métert
kezdi a mester az A jelű léccel? Írd ide: 

d) Öt méter kerítés elkészítéséhez hány darab
A jelű léceket használt fel a mester? Írd ide: 



1m

A B C

Vissza Tovább

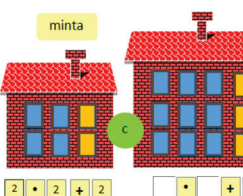
A G33. feladatban a képi illusztráció szorosan kapcsolódik a feladat szövegéhez, ezen belül a képek információtartalmának kezelése része a feladat megértésének. Így a Berends és van Lieshout (2009) által definiált kategóriák közül az „alapvető illusztráció” típusával van dolgunk. Hasonló a helyzet a G34. feladatban. A G35. feladat játékos, a gyerekek által megszokott stílusú.

G34. feladat

A minta szerint **töltsd ki** a fehér négyzeteket!
A d) feladatban hiányzó műveleti jeleket **húzással** pótolod!

a)  $2 \cdot 2 - 1$ $\square \cdot \square - \square$

b)  $2 \cdot 2 - 2$ $\square \cdot \square - \square$

c)  $2 \cdot 2 + 2$ $\square \cdot \square + \square$

d)  $2 \cdot 2 + 2$ $\square \cdot \square + \square$

[Vissza](#) [Tovább](#)

G35. feladat

Éva és Ádám titkosírást fejtenek. Számjegyekhez betűket, betűkhöz számjegyeket kell megtalálniuk. Két sort már megfejtettek.

Írd be Éva és Ádám további megfejtéseit!

a)

M		K		⇒		2		4
---	--	---	--	---	--	---	--	---

b)

R	É			⇒		6	3	4
---	---	--	--	---	--	---	---	---

c)

		P	A	⇒	1	6	7	
--	--	---	---	---	---	---	---	--

d)

A			Ó	⇒		7	1	
---	--	--	---	---	--	---	---	--



[Vissza](#) [Tovább](#)

A *G36. feladat* a geometria tárgyköréhez is tartozhat. Itt azonban a szabálykövetésen van a hangsúly, emiatt a függvények témakörben szerepeltetjük. A feladat jól illusztrálja, hogy egyetlen képernyőképnyi felületen dús információtartalom helyezhető el már e korosztály számára is. A *G37. feladat* képi reprezentációkkal megadott induktív szabály felismerését várja el a tanulóktól.

G36. feladat

Tanítás után Kata, Panna, Luca és Sári kerékpárra ült. A térképen nyílal jelöltük, hogy merre indultak. Leírtuk, hogy **minden egyes kereszteződésnél** hogyan haladtak tovább.

Kata: jobbra - balra - balra - jobbra - jobbra - balra - egyenesen
 Panna: egyenesen - jobbra - egyenesen - balra - jobbra - balra
 Luca: egyenesen - jobbra - jobbra - balra
 Sári: egyenesen - egyenesen - jobbra - jobbra - balra - jobbra - jobbra

Ki hová érkezett?
Húzd a nevüket a megfelelő halmazba!

Mézeskalács
cukrászdához

Peti pékségéhez

Egyik helyre sem

Kata

Panna

Luca

Sári

Vissza
Tovább

Az arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. A mértékváltás és az egyenletes mozgás matematikai fogalmára építve vagy különböző kontextusokhoz kötődően, mint például vásárlás, munkavégzés, számtalan lehetőség adódik feladatkitűzésre. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, nagyítás, stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására. A számok, műveletek és algebra fejezeteiben is szerepelnek hasonló matematikai szerkezetű vagy tartalmú feladatok; az itteni megjelenést az indokolja, hogy ezeknél a feladatoknál a matematikai mélystruktúra kifejezetten adatpárok vagy függvények kezelését igényli (*G38., G39. és G40. feladatok*).

G37. feladat

Az alakzatpárok között minden sorban van egy kakuktktojás.

Melyik az? Kattints rá!

Vissza Tovább

G38. feladat

Kati és Peti tulipánhagymákat ültetnek.
Összesen 24 hagymát raknak egy virágágyásba.
A hagymákat sorokba ültetik. Megbeszélték,
hogy minden sorba ugyanannyi hagymát raknak.
Többféle elrendezésre is gondoltak.

Melyik igaz állítás és melyik hamis? Írj I (igaz) vagy H (hamis) betűt a négyzetekbe!

☐ Amikor kétszer annyi sorba ültetnek, egy sorba kétszer annyi hagyma jut.

☐ Ha 2 sor helyett 6 sorba ültetnek, egy sorba harmadannyi hagyma jut.

☐ Ha a sorok számát felére csökkentik, egy sorba kétszer annyi hagyma kerül.

☐ Amikor 12 sor helyett 3 sorba ültetnek, egy sorba negyedannyi hagyma kerül.

Vissza Tovább

G39. feladat

Az iskolában tanszervásárt rendeztek, hogy a szülők és a gyerekek fel tudjanak készülni a következő tanévre. A vásáron nagyon sokféle árucikket találhattak az érdeklődők. A legegyszerűbb golyóstoll 45 Ft-ba került.



Hány forintot fizetett 6 db golyóstollért a vevő?

Válaszd ki a választ a felsoroltak közül! ☐ 240 ☐ 270 ☐ 300 ☐ 330

Hány forintot fizetett volna, ha 4 darabot vásárol?

Írd be számjegyekkel a válaszüdat az üres téglalapba!

Egy másik vevő 3 darabot vett ebből az olcsó termékéből. Mennyit fizetett ő?

Válaszd ki a legördülő listából!

Gabi édesanyja 250 Ft-ot adott a pénztárban a golyóstollakért. Hány darab tollat vett ő, ha a lehető legtöbb tollat vette meg ezért a pénzéért?

Írd be számjegyekkel a válaszüdat!

Hány forintot kapott vissza, ha a lehető legtöbb tollat vette meg ezért a pénzéért?

Kattints arra a válaszra, amelyik szerinted a helyes! ☐ 20 ☐ 25 ☐ 30 ☐ 35

Legördülő lista szövege: 12 Ft / 125 Ft / 130 Ft / 135 Ft

G40. feladat

Nagymama Misi születésnapjára áfonyás kockát süt. A hozzávalók egy 24 cm és 22 cm oldalú téglalap alakú tepsire a következők:

4 tojás
20 dkg cukor
25 dkg liszt
4 dkg tejszín



Mennyire van szükség a hozzávalókból, ha nagymama három tepsivel akar sütni?

Írd be a megfelelő számot a téglalapba!

tojás
 dkg cukor
 dkg liszt
 dkg tejszín

G41. feladat

Amikor Panni született, az édesanyja 25 éves volt.

Hány éves most az édesanyja, ha Panni 9 éves? Írd ide!

Hány éves lesz akkor Panni, amikor az anyukája 50 éves lesz? Írd ide!

Mikor lesznek ketten együtt összesen 99 évesek? Írd ide!

[Vissza](#) [Tovább](#)

A szöveges feladatok között nagy jelentőségűek azok, amelyek hétköznapi jelenségeket, valamilyen mozgást, változást írnak le. Gyakran hőmérsékleti változást, növekedést, mozgást írunk le. Ezeket a változásokat kell a tanulóknak felismerniük, esetleg szemléltetniük, kapcsolatokat, összefüggéseket, szabályosságokat keresniük. A jelenségek leírásakor, szemléltetésekor lehetőség van a különféle helymeghatározás értékelésére. A következő feladatsorozat az összefüggések felismerésének és a szabálykövetésnek változatos tartalmú lehetőségeit illusztrálja. Az egyenletes változást leíró szöveges feladatok (G41. és G42. feladatok) az arányossági gondolkodás mérésére jól felhasználhatók.

G42. feladat

Két város közötti távolság 190 km. Mindkét városból reggel 8 órakor indul el a másik város felé egy vonat. Az egyik vonat 50 km-t tesz meg egy óra alatt, a másik pedig 45 km-t. **Állapítsd meg**, mikor találkoznak!

Egy tározóban 4800 hl víz van. Egy szivattyú percenként 8 hl vizet emel ki belőle, egy csővezetéken keresztül pedig percenként 2 hl víz folyik bele. **Mikor ürül ki a tározó?**

Vissza

Tovább

G43. feladat

Lali, Márta, Anna és Pali társasjátékában az a feladat, hogy a játéktábla rácshálóján mozogva kell eljutni a megfelelő helyre. A gyerekek mozgását nyilak jelölik egy nyíl egy lépést jelent a megfelelő irányba).

Lali mozgása: → → → ↓ ↓ → → ↑

Márta mozgása: → → → ↑ ↑ → → ↑ ↑

Anna mozgása: → → ↓ ↓ ↓ → → ↑ ↑ → ↑

Pali mozgása: ↑ ↑ ↑ → → → ↑ ← →

Ki hova jutott? **Húzd** a neveket a megfelelő helyre!

Bankba

Postára

Anna
Lali
Márta
Pali

Vissza

Tovább

A G43. feladat is absztrakt, ráadásul képi reprezentációval megadott szabály követését méri. A korosztály számára a nehézsége egyrészt a szokatlan megjelenésében rejlik, másrészt feltételezzük, hogy az ilyen feladat

képi reprezentációk felhasználásával nehezebb, mint manipulatív tevékenységgel vagy akár verbális utasításokkal.

A matematika területén kiváló induktív gondolkodást mérő feladatok a számsorozatok. Ezekben a feladatokban jellemzően egy megkezdett számsort kell folytatni, amihez fel kell ismerni a számokat összekapcsoló szabályszerűséget (*G44. feladat*). A számsorozatok az induktív gondolkodáson kívül a divergens gondolkodás fejlesztésére is lehetőséget nyújtanak, ezért fontos, hogy minden jó megoldásra rámutasson, és minden jó megoldást elfogadjon a pedagógus. Szükséges ismételten hangsúlyozni, hogy azokban az induktív gondolkodásra épülő feladatokban, amelyekben a szabály megalkotása is a feladat része, általában több jó lehetséges megoldás születet. A tanórán a többféle megoldás egymás utáni megtárgyalása kiváló lehetőség a képességfejlesztésre, azonban az online diagnosztikus értékelés során szélsőségesen nehéz feladat lenne minden egyes ésszerű szabályalkotás és annak megfelelő számsorozat-folytatás programozása. Emiatt gyakran élünk azzal a szófordulattal, amely a *Csapó* (2002) által kifejlesztett induktív gondolkodási tesztekben jól működött: a *legjobban odaillő* folytatást keressük. A legjobban odaillő kifejezés látszólagos szubjektivitása a szakértők közötti egyetértés alapján feloldható, és objektív, programozható javítókulcs készíthető.

G44. feladat

Folytasd a megkezdett sorozatot a leginkább odaillő tagokkal!

a) 2 4 7 9 12 14

b) 2 6 18 54

◁ Vissza
Tovább ▷

Szintén induktív gondolkodást mérő feladat a *G45. feladatban* a számok analógiája, ahol valamilyen összefüggés alapján számpárok kapcsolódnak össze. Az összefüggés felismerése után kell a tanulóknak egy következő számpárt alkotni, ahogyan a következő feladat mutatja.

G45. feladat

Keresd meg a számok közötti összefüggéseket, majd a megtalált szabályok alapján írd be a hiányzó számokat!

a) 9 ----> 25 18 ----> 34 21 ---->

b) 3 ----> 36 7 ----> 84 4 ---->

[Vissza](#) [Tovább](#)

2.2.3. Geometria

Célkitűzés 3–4. osztályban, hogy a térbeli képességhez tartozó tudáselemek révén a tanulók képessé váljanak síkbeli sorminták, terület minták, parkettaminták létrehozására kirakással, színezéssel, sablonnal és hálón való rajzolással.

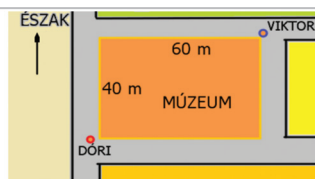
A mérés területén megjelenik a mértékváltás követelménye. A mértékegységek átváltását a tanulóknak csak olyan esetekben kell tudniuk, amelyekhez – elvileg – reális tapasztalat kapcsolódhat. Így ugyanis a mechanikus számolás technikáját (és ezzel együtt biztonságát) a valós tapasztalatokban gyökerező arányossági gondolkodás veheti át.

A geometriai terület valamennyi matematikai gondolkodási képesség fejlesztésére jól használható. A G46. feladatban bemutatott példánk deduktív gondolkodást mérő feladat, amely geometriai tartalomra épül.

A feladatban az állítások logikai tartalmát kellett azonosítani a tanulóknak, és ennek megfelelően kell kiválasztania a helyes megoldást. A gyermekek akkor képesek biztonsággal megoldani ezeket a feladatokat, ha értik az ÉS, VAGY, HA... AKKOR stb. kötőszavakkal kifejezett kijelentéslogikai műveleteket az összetett mondatokban. Mindkét bemutatott feladatban a deduktív gondolkodás képességét értékeljük. Az ilyen és ezekhez hasonló feladatok gyakoroltatásával képessé válik a gyermek arra, hogy a megtanulandó anyagról strukturált, szervezett, új helyzetekben is előhívható tudása legyen.

G46. feladat

Dóri a múzeum sarkánál áll.
Viktorral szeretne találkozni, aki az épület
átellenes sarkán várja.



Dórinak 40 métert kell haladnia Észak felé, és 60 métert kell megtennie Kelet felé haladva.

Melyik állítás igaz, és melyik hamis az alábbiak közül? Jelöld az állítások igazságértékét!

- a) Dóri 40 métert halad Észak felé, és NEM 60 métert halad Kelet felé. ☐ Igaz ☐ Hamis
- b) Dóri 40 métert halad Észak felé, és 60 métert halad Kelet felé. ☐ Igaz ☐ Hamis
- c) Dóri NEM 40 métert halad Észak felé, és NEM 60 métert halad Kelet felé. ☐ Igaz ☐ Hamis
- d) Dóri NEM 40 métert halad Észak felé, és 60 métert halad Kelet felé. ☐ Igaz ☐ Hamis

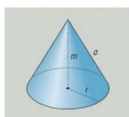
☐ Vissza

Tovább ☐

G47. feladat

Írd ide annak a mértani testnek a betűjelét, amelyik a kérdőjel helyére illik!

Úgy viszonyul a kör a négyzethez, mint a gömb a



A



B



C



D

☐ Vissza

Tovább ☐

A *G47. feladatban* induktív gondolkodást értékelünk a geometria tananyagrészhöz tartozó mértani alakzatok viszonyfelismerésével. Az effajta feladatok jól alkalmazhatóak új ismeret feldolgozásában, hiszen a meglévő tudás transzferálását és aktív gondolkodást igényelnek.

Összefoglalóan, a geometria területén is megjelenhet az induktív gondolkodás mérése. Az 1.2.3. fejezetünk amiatt lehet tömör és rövid, hogy az 1–2. évfolyamon már bemutatott példafeladatok egyszerű fogalmi bővítéssel vagy akár változatlan formában alkalmasak a 3–4. osztályos korosztály matematikai gondolkodási képességeinek mérésére.

2.2.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

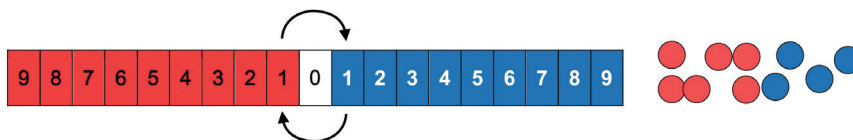
A kombinatorika és valószínűségszámítás témákban ezekben az évfolyamokban a rendszerezőképeség fejlesztése kerül a középpontba. Például a tanórán a gyerekek feladata lehet, hogy alkossanak háromszintes tornyokat, próbáljanak minél többfélét építeni. Keressék az összes lehetőséget. Az órán a tanító megkéri a gyerekeket, hogy gyűjtsék össze azokat az ötleteket, melyek alapján meg tudják állapítani: elkészült-e az összes lehetséges torony. Szükség lehet a tanító problémafelvetésére, segítségére: van-e még másmilyen, vagy ennyiféle van, és nincs több. Ennek egy fontos és jó lehetősége, hogy az elkészített tornyokat valamilyen alapelv szerint elrendezik maguk előtt. Néhányan esetleg arra figyelnek, hogy milyen színű a torony alsó eleme, s külön rakják azokat, amelyeket pirossal kezdtek építeni, külön a kék és külön a sárga aljú tornyokat. Ez esetben ráérezhetnek arra, hogy a három csoportban ugyanannyi toronynak kellene készülnie, s ez támpont lehet a hiány megállapításához, esetleg a hiányzó építmény megkereséséhez is.

A valószínűségi szemlélet fejlesztése során rengeteg játék kipróbálható. Például korongokkal. A játékot párban játsszák. A pár tagjai a játéktáblán oldalt választanak maguknak, és egy, a 0-ból (fehér mező) induló bábút mozgatnak. Jobbra léphetnek egyet, ha a 10 korong feldobása után több a piros, mint a kék, és egyet léphetnek balra, ha több a kék, mint a piros korong. (Ha ugyanannyi, akkor nem lépnek.)



Példánkban jobbra lehet lépni egyet. A játékot az nyeri, akinek az oldalán áll a bábu mondjuk 20 dobás után. (Ha éppen 0-nál áll, akkor döntetlen.) A játék egyszerű, a valószínűségi érzés azt diktálja, hogy ugyanolyan jó választás a kék oldal, mint a piros. Amikor osztályszinten összevetik tapasztalataikat, ugyanezt állapíthatják meg.

Egy másik alkalommal két bábuval és 10 koronggal játszanak úgy, hogy „A” akkor léphet, ha a piros korongok száma páros, „B” pedig akkor, ha a kéké páros. Mindkét játékos a saját bábuját mozgatja.



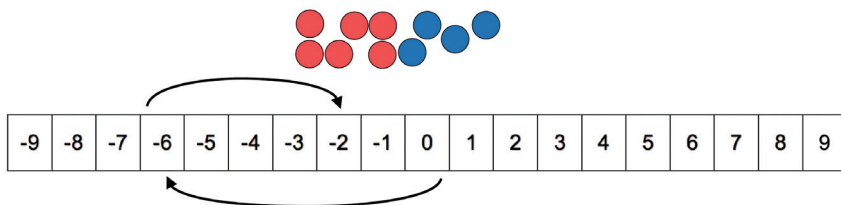
Példánkban mindkét játékos lép egyet. Néhány játékot le kell játszaniuk ahhoz, hogy megfigyeljék: a játék mindenképpen döntetlen lesz, hiszen vagy mindkét játékos léphet, vagy egyik sem. Érdemes azonban megtréfálni a gyerekeket ezzel a problémával, hiszen így válik sajátjukká az a gondolat, hogy a 10 csak olyan összegre bontható, melynek mindkét tagja páros, vagy mindkét tagja páratlan.

Ha a korongok számát most 9-re változtatjuk, ismét olyan játékot játszunk, ahol a valószínűségek megegyeznek.

További megfigyeléseket tehetnek, ha a problémát általánosítják. Például más páros vagy páratlan számú koronggal játszanak. A fejlesztés során a tanulók számára sokkal inkább motiváló feladat tapasztalatot szerezni a páros és páratlan számok összegre bontásáról egy ilyen játék kapcsán, mint mechanikusan végzett műveletekkel.

Más didaktikai céllal ismét páronként 10 koronggal játszanak. Egy bábu 0-ról indul, de most a játéktáblát a számegyenes váltja föl. A korongok feldobása után annyit lépjenek negatív irányba, amennyi piros korong esett az asztalra, és annyit a pozitív irányba, amennyi kék korong esett az asztalra!

Például ezt dobtam:



Negatív irányba lépek hatot, majd onnan, ahová érkeztem, pozitív irányba négyet. Léphettem volna előbb a kék irányba négyet, majd a piros irányba hatot. (A végén vajon ugyanoda érek? Vagyis a kommutativitás működik akkor is, ha negatív számok is szerepelnek?)

Most tízet dobunk egymás után úgy, hogy a bábu mindig onnan lép tovább, ahol az előző dobás után megállt. A gyerekeknek a játék megkezdése előtt tippelniük kell arra, hogy 10 dobás után hová érkezik a bábu ezek közül a leggyakrabban: -6 , -3 , -1 , 1 , 3 , 8 . Lehetséges, hogy a 8 -ba? Vagy a -3 -ba? A játék megkezdése előtt minden lehetséges. A valószínűségről alkotott képünk azt diktálja, hogy a sok dobás valahogyan kiegyenlíti egymást, és valahol a 0 közelében érdemes tippelni. Igen ám, de most a 0 nem szerepel a lehetséges tippek között, ezért az 1 vagy a -1 esetleg a 3 vagy -3 is jó lehet.

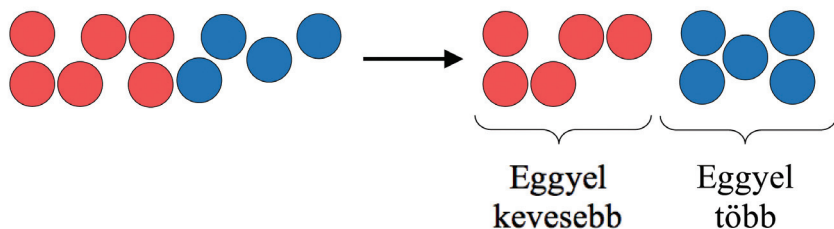
Ha lejátszottak néhány játékot, és a tanító végigkérdezi a gyerekeket, hogy melyik pár hova jutott, például a következő feljegyzéseket készíthetik: -2 , -8 , -2 , -4 , 0 , 0 , 6 , 6 , 4 , 8 , 2 , 2

Vajon véletlen, hogy mindenki páros számra jutott?

Egy újabb kör megerősítheti a sejtést, elkezdődhet a magyarázatok keresése. Összegyűjthetjük a lehetséges dobásokat, és az egy lépés hosszára vonatkozó lehetőségeket:

$$\begin{array}{ll}
 10 p = -10 & 10 k = 10 \\
 9 p + 1 k = -8 & 9 k + 1 p = 8 \\
 8 p + 2 k = -6 & 8 k + 2 p = -6 \\
 7 p + 3 k = -4 & 7 k + 3 p = 4 \\
 6 p + 4 k = -2 & 6 k + 4 p = 2 \\
 5 p + 5 k = 0 & \\
 \dots &
 \end{array}$$

Vagy egyszerűen csak azt figyelik meg, hogy mi történik, ha egyetlen kék korongot pirosra változtatunk:



Megint egy olyan összefüggés, amelyet ha a gyerekek maguk fedezhetnek fel, sokkal inkább magukénak érzik, mint a tanár szájából elhangzott mondatot: „Ha a kisebbítendőt egygel csökkentem, és a kivonandót egygel növelem, a különbség kettővel csökken”.

Akárhogyan is dobunk tehát a 10 koronggal, az első dobás után mindenképpen páros helyre érünk. A további dobások során pedig minden esetben páros sokat lépünk. A lépegetés során a gyerekek tapasztalathoz juthatnak a pozitív számok ellentettjének értelmezéséhez szükséges tevékenységről, pozitív és negatív számok összeadásáról, valamint arról is, hogy az összeg paritására vonatkozó összefüggés a negatív számok körében is érvényes marad. A valószínűségről alkotott fogalmak tekintetében élményszerűbb tapasztalathoz juthatnak *lehetetlen eseményről*, mint egy olyan elcsépeelt és túlságosan átlátható példával, hogy két kockával dobva a dobott számok összege 13 nem lehet.

Következő példánk kombinatorikai tartalommal a deduktív gondolkodás mérésére alkalmas. Amiatt fontos bemutatnunk ezt a példát (*G48. feladat*), mert talán a kombinatorika, statisztika, valószínűségszámítás tartalmi területen tűnik leginkább korlátozottnak a mért matematikai gondolkodási képességek köre – hiszen a kombinatív képesség és a kombinatorika témakör kapcsolata kézenfekvő.

A következő feladatban (*G49. feladat*) képek segítik a diákokat a kombinatorikai feladat megoldásában. Ebben a feladatban a feltett kérdésnek megfelelően kell a kombinációkat megalkotni. A feladat elején meg van adva, hogy csak két összetételből állhatnak a konstrukciók. A gyermekek gyakran hajlamosak figyelmen kívül hagyni a lényeges információkat, ezért a pedagógusnak fontos felhívnia a figyelmüket, hogy alaposan, akár többször olvassák el a feladat utasítását.

G48. feladat

Petra a neve betűit 3 x 3 -as négyzet alakú papírlapokra rajzolta, majd leolvasta a nevét az ábrákról az összes lehetséges módon. Összesen 10 esetet talált.
Testvére kék és rózsaszín színekkel színezte ki a neveket.

Petra megállapította:

CSAK AKKOR TUDOM KIVÁGNI
EGY DARABBAN A NEVEMET,
HA A RÓZSASZÍNNEL
KISZÍNEZETT NEVEKET VÁGOM
KI, DE AKKOR BIZTOSAN.

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

P	E	T
E	T	R
T	R	A

Kattints az IGAZ gombra, ha a nagybetűs (eredeti) kijelentés igaz és **kattints** a HAMIS gombra, ha a nagybetűs (eredeti) kijelentés hamis!

Petra a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket ki tudta vágni egy darabban.

☐ Igaz

☐ Hamis

Petra a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket NEM tudta kivágni egy darabban.

☐ Igaz

☐ Hamis

Petra NEM a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket ki tudta vágni egy darabban.

☐ Igaz

☐ Hamis

Petra NEM a rózsaszínnel kiszínezett neveket vágta ki. A neveket NEM tudta kivágni egy darabban.

☐ Igaz

☐ Hamis

☐ Vissza

☐ Tovább

G49. feladat

A 4. osztályosok rajzórán 3 szín (K, S, P) felhasználásával képeket színeznék ki. Egyféle színnel a mackót, egyféle színnel a ruháját és egyféle színnel a hátteret.

Írd be számjegyekkel az üres négyszögbe a kérdésekre adott válaszaidat!



Hányféleképpen színezhetik ki...

...Micimackó figuráját bármely két szín felhasználásával?



...a képet, ha a háttér színe mindig kék színű lesz?



...a képet, ha Micimackó ruhája mindig piros színű lesz?



...a képet, ha a ruhája piros lesz és a háttér nincs kiszínezve?

☐ Vissza

☐ Tovább

A következő feladatban (*G50. feladat*) már nem alkalmazunk képi segítséget. Tovább nehezíti a feladatot, hogy nemcsak a táblázatot kell kitölteniük a tanulóknak, hanem – a fenti feladathoz hasonlóan itt is – megadott kérdésekre is választ kell adniuk. Abban az esetben tudják jól megválaszolni a feladat második részét, ha a táblázatot jól töltötték ki a tanulók, illetve értik a megfogalmazások közötti különbségeket.

G50. feladat

Nyári táborozás során a gyerekek éjszakai akadályversenyen vesznek részt. Minden csapatot egy pedagógus segít.

csapatok összetétele (jele)	pedagógus segítők neve (jele)
csak lányok (L)	Anna néni (A)
csak fiúk (F)	Tóni bácsi (T)
vegyesen (V)	Marci bácsi (M)

A következő táblázat összefoglalja az összes lehetséges párosítási lehetőséget. **Egészítsd ki** a táblázat hiányzó részeit!

A csapat összetétele	L	F	V	V	L	V		F	F
A csapat segítője	A	T	M	A	M	T	T		A

A kísérő pedagógusokat is figyelembe véve **hány lehetséges csapat...**

c) tagjai között vannak lányok is? ☐

d) tagjai között vannak mindkét nem képviselői? ☐

e) Ha Anna néni biztosan a lányok csapatát segíti, akkor hányféleképpen alakulhat párosítás? ☐

A szöveges feladatokban sokszor nem is a kombinatorikai dimenzió nehéz, hanem az, hogy rá kell jönnie a tanulónak, hogy nem csak egy megoldás lehetséges. Ez is mutatja a kombinatorikai feladatok fontosságának okát: hogy hangsúlyos bennük a teljességre, minden lehetőség átgondolására való törekvés. Ez jelenti ezekben a feladatokban az egyik legnagyobb kihívást a tanulók számára, ezért a pedagógusnak oda kell figyelnie, hogy rávezető, problémafeltevő kérdésekkel segítse a sikeres feladatmegoldást.

Végül egy olyan feladat, amely a matematikai tudás alkalmazási dimenziójában is helyet kaphatna, hiszen a valóságból vett plusz információ szükséges a megoldáshoz. A 631 oldalas könyv is vastagnak számít ebben a korosztályban, azonban a számjegyek ismétlődésének elvi lehetőségét ig-

norálja, hogy ezer oldalasnál vastagabb könyv nemigen fordul elő a korosztály olvasmányai között.

Sarolta megjelöl a kedvenc könyvében két oldalt. Az első ezek közül a 163. oldal. Melyik lehet a 2. oldal, ha az is ugyanezeket a számjegyeket tartalmazza?

2.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

2.3.1. Számok, műveletek, algebra

5–6. osztályban az egész számok (pozitív és negatív egészek egyaránt) tetsozolegesen nagy abszolút értékig megjelennek a tanórán, vagyis a számosságok korábbi évfolyamokban jellemző tapasztalati bázisát megtartva ki kell alakítani a „nagy” számok reprezentációit is. Matematikai szempontból tekintve ennek eszköze a számok normálalakja, pszichológiai szempontból nézve pedig az additív gondolkodás képességei. Az additív gondolkodás elemeként kialakul a számok nagyságára vonatkozó összehasonlításban a „kisebb, mint” és „nagyobb, mint” relációk egymással felcserélhetősége.

A tapasztalati bázishoz kapcsolható számok körében természetesen 5–6. osztályban is folytatódnak a változatos és céltudatos tevékenységformák: kirakások, vágások, bontások, helyiérték-táblázatok készítése, kitöltése, ezekből számok kiolvasása, szóban kimondott számok leírása, számegeyenesen való ábrázolások, leolvasások, összehasonlítások stb. A sokoldalú tapasztalás segíti például a tört, tizedes tört, negatív szám fogalmának mélyítését, ugyanazon értékek sokféle megjelenítését (például bővítésekkel, egyszerűsítésekkel), és ugyanazon értékek különböző formában való megjelenítését (például tört tizedestört alakja és fordítva).

A *G51. feladat* a törtek egyszerűsítésének témakörét kapcsolja össze az induktív gondolkodás diagnosztikus értékelésével.

Csak a sokszínűen megtapasztalt fogalmak, tartalmak lesznek maradandóak, mozgathatóak, előhívhatóak. A *G52. feladat* az induktív gondolkodás segítségével oldható meg, és az egész és tört számok reprezentációjához kapcsolódik az írásbeli osztás műveletén keresztül.

G51. feladat

Mindegyik sorban találsz egy oda nem illő számkártyát. Melyik az? Kattints rá!

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{28}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{30}{11}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{24}$

G52. feladat

Melyik művelet nem illik a sorba?

Kattints arra, amelyik szerinted nem illik a sorba!

A törtelnél is nagyon fontos láttatni (sok hajtogatással, kivágással, egyforma kockákból való kirakásokkal, változatos egységválasztással, rajzolásal stb.) azt, hogy valamely egységet egyenlő részekre sokféleképpen oszthatunk, így egy adott törtértéket sokféleképpen jeleníthetünk meg.

Jól szemlélteti a G53. feladatban lévő ábra, hogy az $1/4 = 2/8 = 4/16$. Ha ezek a körlapok egyforma tortákat ábrázolnának, akkor az $1/4$ részní tortát elfogyasztó gyerek ugyanannyi tortát enne, mint a $2/8$ részt vagy a $4/16$ részt elfogyasztó gyerek. Egyikük egy darab, másikuk kettő egyenlő,

ám kisebb, a harmadik gyerek négy egyenlő, de még kisebb szeletet kapna ebből a tortából.

A törtfogalomra épülve az arányossági gondolkodást méri a *G54. feladat*.

G53. feladat

Az alábbi ábrán három oszlopban azonos sugarú körlapokat osztottunk fel 4, 8, 16 egyenlő részre. **Kattintással válaszd ki** oszloponként azt, amelyiken a kör negyedrésze van kiszínezve!

Vissza Tovább

Sok ilyen feladat megalapozza a törtek bővítése és egyszerűsítése folyamatának megértését és az alkalmazás során történő átalakítások, ezen belül a közös nevező keresésének indokoltságát. A *G55. feladat* ennek a tudáselemnek mérésére mutat példát.

Az egészek és törtek számegyenesen való ábrázolása jól szemlélteti a számok egymáshoz való viszonyának megértését, a számok növekvő, csökkenő sorrendiségét.

A számegyeneshez kapcsolódó kérdések megválaszolása a számfogalom és műveletfogalom megértését is mélyíti. Ehhez a követelményhez tartozik a *G56. feladat*.

G54. feladat

Igaz vagy hamis?

Döntsd el és kattints az általad helyesnek ítélt válaszra!

a) A képen a piros és sárga négyzetek aránya: 1:4



☐ Igaz

☐ Hamis

b) A képen a kék és zöld négyzetek aránya: 1:10



☐ Igaz

☐ Hamis

c) A képen a lila és fehér négyzetek aránya: 9:1



☐ Igaz

☐ Hamis

d) A képen a narancssárga és zöld négyzetek aránya: 2:3



☐ Igaz

☐ Hamis

☐ Vissza

Tovább ☐

G55. feladat

Döntsd el az alábbi törtokről, hogy egyszerűsíthetők-e vagy nem!

Húzd a törtszámok mindegyikét a neki megfelelő halmazba!

$$\frac{27}{48}$$

$$\frac{37}{45}$$

$$\frac{42}{39}$$

$$\frac{192}{621}$$

Egyszerűsíthető

Nem egyszerűsíthető

☐ Vissza

Tovább ☐

Cél, hogy a tanulók képesek legyenek a tanult számok számegyenesen való ábrázolására, illetve a számegyenes egy pontjához tartozó szám pontos vagy közelítő meghatározására, a számok nagyság szerinti összehasonlításra. A felső tagozat első két évfolyamán is törekszünk arra, hogy szóbeli és írásbeli műveletek helyes sorrendű, jó eredményt adó elvégzése mellett a számolásokat egyszerűsítő, gyorsító módszereket, eljárásokat is megismertessünk (pl. a műveleti tulajdonságok, a zárójelek felhasználásával). Ez is erősíti a fogalmak mélyítését, a műveleti algoritmusok tudatosítását.

A 6. évfolyam végére a tanulók megismerkednek a racionális számkörben végzett alpműveletekkel.

A számológépek tanórai használatát csak az alpműveleti számolási algoritmusok megértésének, a végeredményt illetően kellően pontos becslés nyújtása képességének birtokában engedélyezzük. A papír-ceruza tesztelés gyakorlatában általában nem engedjük a számológép használatát. Ennek több oka közül az egyenlőtlen technikai feltételeket (és esetleg a számológépnek látszó, de annál jóval többet tudó technikai eszközök használatának problémáját) emeljük ki.

G56. feladat

Két szám összegét jelöli az ábra:



a) Mennyi a két szám aránya? Gépeld be a téglalapba az arányból hiányzó számot!

A : B = : 2

b) Ha a B szám 12, mennyi az A szám? Válaszd ki a lenyíló menüből az A számnak megfelelő értéket!

A =

c) Az A szám 70. Mennyi a B szám? Jelöld meg kattintással a B számot!

B =

d) Ha a B szám 25, mennyi az A szám? Gépeld be a megfelelő értéket!

A =

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: b) 120 / 84 / 60 / 30 c) 14 / 20 / 28 / 50

A különböző „tudású” zsebszámológépek akkor szolgálják tanítványaink érdekét, ha nem vállalják át a gondolkodás fejlesztéséhez szükséges lépések, műveleti elemek elvégzését idő előtt. A problémák megoldásának modellje fejben születik, a kivitelezéshez nyújtott eszköz lehet a számológép. Például, amikor az egyenletek megoldását tanítjuk, akkor fejben és írásban dolgoznak a gyerekek, mert megértetni és megtanítani szeretnénk a megoldás algoritmusát. A nehezebb szöveges feladatok esetén a matematikai modell felállítása a kihívás, ha a modell már megvan, akkor esetleg használható a számológép, a számítógép egyenletmegoldó programja. Ha például a becslőt vagy kiszámított eredmény helyességét szeretnénk gyors visszahelyettesítéssel ellenőrizni, akkor szintén indokolt lehet a számológép használata. A konkrét feltételek ismeretében dönthetünk csak helyesen arról, hogy mikor és miért hagyjuk használni a számológépeket, számítógépeket. A használat vagy annak tiltása indokoltságát mindig értelmes pedagógiai érvek támasszák alá.

A fejlett informatikai környezet alkalmazása szükségessé teszi a jó becslőképesség kialakítását. Ha technikai okok miatt nem működnek a gépek, akkor a jó becslőképesség biztonságérzetet ad (pl. a kifizetendő/visszajáró összeg kiszámításában).

A szöveges feladatok megértésének új elemei

Az 5–6. évfolyamon a folyamatosan bővülő ismeretek – így például a racionális számkörre kiterjesztett műveletek, a műveleti sorrend, az egyenes és fordított arányossággal és százalékszámítással kapcsolatos ismeretek – lehetővé teszik összetettebb szöveges feladatok megjelenését. Elvárásként fogalmazódik meg a megoldások igényesebb kivitelezése (lejegyzési, esztétikai szempontból), tudatosul, hogy a kerekítés szabályait felülírhatja a valóság (pl. ha a méterben kapható drótkerítésből 56,3 méter kell, akkor 57 métert veszünk, ha a konkrét számított terület alapján a burkoláshoz 37,2 darab csempe kell, akkor minimum 38 darabot és még néhányat veszünk), fejlődik a becslési készség és az ellenőrzés, önellenőrzés igénye.

A szöveges feladatok ezen a két évfolyamon is elsősorban a következtetési gondolkodás fejlesztését (pl. egyszerű elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása következtetéssel, lebontogatással) az arányos következtetések fejlődését (pl. szabványmértékek átváltása, egyenes és fordított arányosság, egyszerűbb százalékszámítási feladatok), a problémamegoldó képesség (problémafelismerés, problémaazonosítás és -megoldás) fejleszt-

tését, az értő-elemző olvasás fejlesztését szolgálják. A G57. feladat az arányossági gondolkodás mérésére alkalmas.

G57. feladat

Laci nagymamája farsangkor farsangi fánkkal lepte meg.

Hozzávalók:

10 dkg cukor	
50 dkg liszt	1 csomag vaníliás cukor
3 dkg élesztő	3 dl tej
4 tojássárgája	1 evőkanál rum aroma
10 dkg margarin	fél citrom reszelt héja

Ezekből a hozzávalókból nagymama 30 fánkot süített ki. Segíts nagymamának kiszámolni a megfelelő adagokhoz a hozzávalókat! **Válaszolj a kérdésekre! Írd be számmal a választ a szövegdobozba!**

a) **Hány darab fánkhoz szükséges 20 dkg cukor?** darab fánkhoz.

b) Nagyiékhoz vendégek érkeztek, ezért 90 darab fánkot süített.
Hány dkg lisztre van szükség 90 darab fánk elkészítéséhez? dkg lisztre.

c) A 90 darab fánk hatod részét Laci és két testvére ette meg.
Hány darab fánkot evett meg összesen Laci és két testvére? darab fánkot.

d) A három vendég 12 fánkot evett, az általuk elfogyasztott fánkok aránya
Peti : Misi : Imi = 1 : 2 : 3.
Hány darab fánkot evett Misi? darab fánkot.

☐ Vissza ☐ Tovább



További feladatötletek, amelyek online diagnosztikus értékelés során változatos feladatokká alakíthatóak:

Keress összefüggést az alábbi mennyiségek között!

- Karácsonyfa ára és magassága*
- Az autó menetideje és sebessége (Az úthossz legyen 20 kilométer!)*
- Egy születésnap torta szeleteinek száma és a szeletek nagysága (egyenlő szeleteket vágunk)*
- A zöldborsó mennyisége és ára*
- A négyzet oldala és kerülete*
- A fagylalt ára és a gombócok száma*

Megoldás: *A mennyiségek közötti helyes összefüggések felfedezése, megfogalmazása.*

A tanulóktól várható válaszok például:

- a) Ugyanazon fajtájú fenyő esetén a magasabb fáért többet fizetünk, mint a nála alacsonyabbért.
- b) Ha egy autó kétszer gyorsabban megy, akkor fele annyi idő alatt teszi meg a 20 km-t.
- c) Minél több egyenlő szeletre vágom a tortát, annál kisebbek lesznek a szeletek.
- d) A borsóért fizetett ár egyenes arányban változik a borsó mennyiségével.
- e) A négyzet oldala és kerülete egyenes arányban változik.
- f) A gombócok száma és a fagyi ára egyenesen arányosan változik.

A tanulóknak tudni kell egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket szabadon választott módszerrel megoldani, egyszerűbb szöveges feladatokat, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel megoldani, képesnek kell lenni a megoldások számegyenesen való ábrázolására. A megoldási módszerek közül – a következtetések mellett – ki kell emelni a rajzos, ábrás, szakaszos, számegyenes felhasználó módszereket. Sokszor ezek a rajzok, ábrák mutatják meg, hogy megértette-e a problémát, a feladatot a tanuló. A G58. feladat ezt a követelményt illusztrálja.

G58. feladat

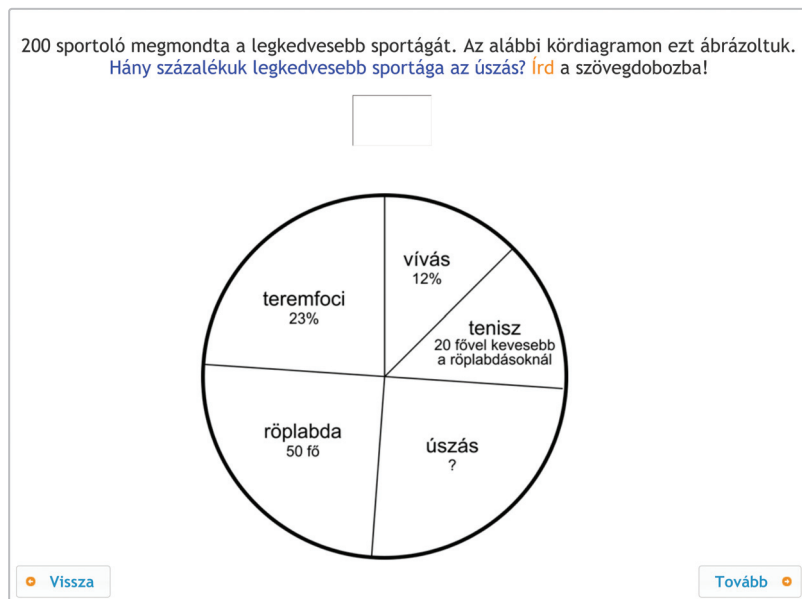
A havi családi bevétel 48%-a a különböző tartozások, számlák kiegyenlítésére kell. Ebben a hónapban a megmaradt 104 ezer forintból a megélhetést (étkezés, ruházkodás, javítások, szórakozás, stb.) fedezi a család. **Mennyi volt a családi bevétel ebben a hónapban?**

Írd a szövegdobozba!

 Vissza
Tovább 

A G59. feladatban azt látjuk, hogy a feladatszövegek valamilyen konkrét rajzos, ábrás leképezése sok információt adhat a tanár számára a lassan kialakuló absztrakt gondolkodás pillanatnyi szintjéről.

G59. feladat



2.3.2. Relációk, függvények

A tanulók korábbi, arányossági következtetésen alapuló feladatmegoldására építve megismerik az egyenes arányosság fogalmát. Cél, hogy képessé váljanak felismerni az egyenes arányosságot gyakorlati jellegű feladatokban, valamint a természettudományos tárgyak tanulása során is. Tudjanak megoldani a mindennapi életben felmerülő, egyszerű, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel. A változó mennyiségek közötti kapcsolatok vizsgálata során a tanulók tapasztalatot szereznek a fordított arányosság felismeréséről, összetartozó értékpárjainak meghatározásáról is.

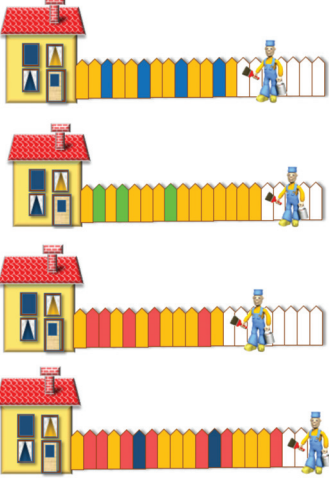
Az arányossági következtetések során a legegyszerűbb és korábban is gyakran előforduló lineáris összefüggések esetén képesek táblázatokban a hiányzó elemek pótlására, az adatok táblázatban való ábrázolására. Találkozniuk kell nem lineáris összefüggésekkel is, sőt célszerű ugyanannak a jelenségnek több nézőpontból való megvizsgálása is. Táblázattal megadott összefüggésekhez tudnak grafikont készíteni, valamint grafikon

alapján meg tudják adni a táblázat elemeit. Az elsőfokú függvényt felismerik, pontjai alapján ábrázolni tudják. Képesek a gyakorlati életből vett egyszerű példákban a kapcsolatok felismerésére, lejegyzésére, ábrázolására.

Az induktív gondolkodás fejlődésének ebben az életkori szakaszában a tanulók képesek hiányzó elemeket meghatározni, illetve ismert elemek esetén szabályt megfogalmazni. Tudnak szabállyal megadott sorozatot folytatni, néhány eleméből szabályt megadni. Képesek a felismert szabály formulával való megadására. A *G60. feladat* a szabályalkotást a vizualitás szintjén várja el, és a szabály követése során is képi választ várunk.

G60. feladat

A kerítés festéséhez a mester többféle színt használ valamilyen szabály szerint.



a) Milyen színűre festi a mester a következő kerítésléceket?
Kattints a színre!  

b) Milyen színűre festi a mester a következő kerítésléceket?
Kattints a színre!  

c) Milyen színűre festi a mester a következő kerítésléceket?
Kattints a színre!  

d) Milyen színűre festi a mester a következő kerítésléceket?
Kattints a színre!   

[Vissza](#) [Tovább](#)

Ezen az iskolaszakaszon tovább fejlődik a tanulók helymeghatározó képessége. Tudnak számegyenesen adott tulajdonságú pontokat megkeresni, számintervallumokat ábrázolni, a kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb kifejezéseknek megfelelő adatokat szemléltetni, illetve ábráról leolvasni. Ismerik a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, az azzal kapcsolatos fogalmakat (tengelyek, origó, jelzőszám, koordináták, síknegyed). Tudnak a koordináta-rendszerben konkrét pontokat ábrázolni, pontok koordinátáit leolvasni.

Az egyenes arányosság alkalmazásával, arányos következtetéssel egyszerű százalékszámításos feladatokat oldanak meg (pl. bevásárlás, takarékosság, napirend). Ennek gyakorlása során, a számításhoz szükséges algoritmusok felfedezésével és használatával párhuzamosan megismerik a százalékszámítás alapfogalmait: alap, százalékláb, százaléktérték.

A megtanult ismeretek, készségek, képességek bemutatására kezdetben a matematikai szimbólumokkal megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben minden „zavaró tényező” nélkül közvetítjük a feladat matematikai struktúráját, legtöbbször utalunk azokra a műveletekre, algoritmusokra, amelyeket a megoldás során használni kell, sőt gyakran a feladat szövegében is szerepelnek matematikai szimbólumok. A *G61. feladat* megjelenésében teljesen megegyezik a megszokott papír-ceruza tesztfeladatokkal. Az online diagnosztikus tesztelés fejlődésével a javítás automatizálásnak újabb lehetőségeire számítunk, így az üres téglalapba a válaszként írt számadattól a szöveges válaszig sokféle jövőbeni lehetőség nyitva áll a javítás automatizálása előtt.

G61. feladat

Számítsd ki 120-nak a 15%-át! Válaszd **írd** a szövegdobozba!

Vissza Tovább

A *G62. feladat* többféle módszerrel, stratégiával megoldható. Az induktív és a rendszerzési képesség tudáselemeit látjuk benne megjeleneni konkrét matematikai tartalmakon.

A G63. feladat az egyenes és fordított arányosság fogalmának grafikus reprezentációhoz kapcsolásáról szól. Emellett alkalmas annak a nagyon fontos tudáslemnek mérésére, sőt, fejlesztésére is, miszerint egy grafikon ábrája megjeleníthet olyan összefüggést, amely sem nem egyenes, sem nem fordított arányosság.

G62. feladat

Anita a koordináta-rendszerben ábrázolt egyenesek néhány pontjának jelzőszámát olvasta le. Az egyik pont leolvasását elrontotta. Melyik az? [Kattints rá!](#)

(-5; 5) (-2; 2) (0; 0) (2; 2) (5; -5)

(-2; -4) (-1; -2) (0; 2) (1; 2) (2; 4)

(-2; -3) (-1; 0) (0; 1) (1; 2) (2; 3)

(-2; -2) (0; 4) (2; 6) (3; 8) (4; 10)



[Vissza](#)

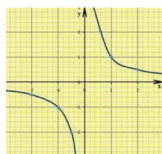
[Tovább](#)

G63. feladat

Milyen összefüggés áll fenn az ábrán látható két mennyiség között?

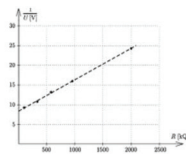
Válaszd ki a legördülő menüből a választ!

a) 1. ábra



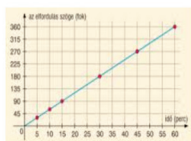
Válassz!

b) 2. ábra



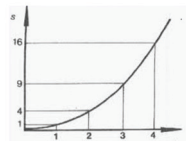
Válassz!

c) 3. ábra



Válassz!

d) 4. ábra



Válassz!

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: egyenes arányosság / fordított arányosság / egyik sem

G64. feladat

Húzz olyan pontokat a koordináta-rendszerbe, amelyeknek a második jelzőszáma nagyobb, mint az első!

Vissza Tovább

A G64. feladat rámutat arra, hogy az automatikus javítás programozhatósága lehetővé teszi olyan feladat megfogalmazását, amelynek praktikusán végtelen sok megoldása van, és csak az ábra mérete szab korlátot a megoldások számának.

Az utolsó feladat példa arra, hogy az alkalmazásnak ezen a legegyszerűbb szintjén is lehet olyan feladatok megoldása elé állítani a tanulókat, amelyekben többféle helyes válasz, megoldási lehetőség is felmerül. Az ilyen jellegű feladatokkal is előkészíthetjük az összetettebb, problémajellegű, autentikus feladatokkal való foglalkozást. Természetesen ez a szempont a tanítás során merülhet csak fel, az értékelésnél ilyen esetben utalni szükséges a több megoldás lehetőségére.

A relációk, függvények témakörhöz talán legszorosabban köthető az arányossági gondolkodás képessége, így befejezésül a G65. példafeladatot nézzük.

G65. feladat

A téli szünetre a tanító néni alpműveletek gyakorlására feladatlapot készített a gyerekeknek. Összesen 60 példát írt a lapra.

A következő táblázatban műveletek szerint látod, hány darab feladat volt.

Állapítsd meg, hogy az egyes feladatcsoport hányad része az összes feladatnak!

Húzd a megfelelő kifejezést az üres keretbe!

egyötöd egyhatod egytized egynegyed egyharmad

			
20	15	12	10

[Vissza](#) [Tovább](#)

A feladat a törtszámítás diszciplináris tudásdimenziójához is sorolható, ám a táblázatos elrendezés, a darabszámok szerinti sorba rendezés a feladatot egyben képességmérővé teszi.

2.3.3. Geometria

A korábbi évfolyamokon szerepelt két képesség (térbeli és arányossági) mellett, köszönhetően az 5–6. évfolyamra gyarapodó fogalmaknak, lehetővé válik geometriai tartalmakhoz is többféle olyan feladatot alkotni, amelyek az induktív, deduktív és rendszerezési képesség fejlettségének diagnosztizálására alkalmasak. Jelen esetben tehát egyik oldalról nézve a geometria tartalmak a képességfejlődés diagnosztizálásnak nyersanyagát jelentik, másrészt pedig a geometriai tudás fejlesztésének tagadhatatlan előnyeit és felhasználási területeit láthatjuk.

A G66. feladat jellegzetes példát mutat a térbeli képesség tesztelésére. A feladatkitűzés alapvetően képi reprezentációkra épül, azonban a sikeres megoldáshoz, vagyis a mentális képi tudáselemek megfelelő felhasználásához tanórai és tanórán kívüli manipulatív tevékenységeken keresztül vezet az út.

A G67. feladat a rendszerezési képesség működését méri geometriai tartalom. Itt a rendszerezési képesség fogalmi szintű működése valósul meg,

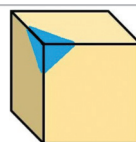
azaz manipulatív és képi tudáselemek nem támogatják a feladatot. Ettől függetlenül elképzelhető, hogy a tanulók a tesztkitöltés folyamán használható jegyzetlapokon igénybe veszik e két tudásreprezentációs formát is.

A *G68. feladat*ban többféle matematikai képesség felhasználása várható a megoldás során, így például deduktív és kombinatív képességelemeké is. Egy induktív gondolkodás képességét mérő geometriai példával zárjuk ezt a fejezetet (*G69. feladat*). A megoldáshoz egyszerre van szükség a térgeometriai szemléletre és a szabálykeresés és szabályalkotás induktív képességelemeire.

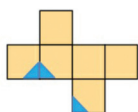
G66. feladat

Kocka!

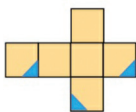
Réka a kockahálók összehajtogatásával kockákat készít. Melyik kockaháló hajtogatható össze úgy, hogy a kék háromszögek egy csúcsnál találkozzanak (ábra szerint)?



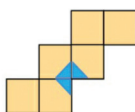
Húzd a kockaháló betűjelét a megfelelő halmazba!



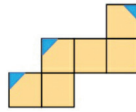
a)



b)



c)



d)

Összehajtogatható

Nem összehajtogatható

[Vissza](#)

[Tovább](#)

G67. feladat

Húzd be a geometriai fogalmakat a halmazábra megfelelő részébe!

Négyzet

Négyszög

Deltoid

Sokszög

Téglalap

Vissza
Tovább

G68. feladat

12 literes vödört használva akkor lett tele a víztárolóra használt edény, ha 15 vödör vizet öntöttünk bele.

a) Hány 6 literes vödörnyi víz kell a víztároló edény megtöltéséhez?

Kattintással jelöld meg a helyes választ!

2 vödör
10 vödör
30 vödör
27 vödör

b) Hányszor kell a vödört megtölteni a víztároló edény feltöltéséhez, ha 20 literes vödört használunk?

Gépeldd be a szövegdobozba a helyes számot! alkalommal kell a vödört megtölteni.

c) Válaszd ki a lenyíló menüből a helyes kiegészítéseket!

Ha 12 literes vödör helyett a 4 litereset használjuk, amelyikbe Válassz!

víz fér el, akkor Válassz! több alkalommal kell a vödört megtöltenünk.

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege: feleannyi / harmadannyi / negyedannyi / hatodannyi
2-szer / 3-szer / 4-szer / 6-szor

G69. feladat

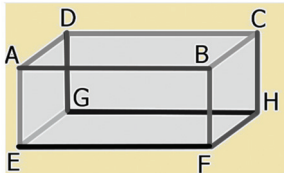
Írd a szövegdobozokba a hiányzó csúcs betűjelét a felismert szabály alapján!

AD, AB, AE CB, CD, CH FH, FE, F

AC, AF, AG BD, BH, BE DB, DE, D

AE BF CH D

AH BG DF E

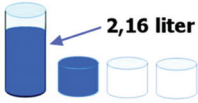


Végezetül egy geometriainak tűnő feladatot mutatunk be, melynek kontextusa és tartalma a korosztály számára ismerős. Azonban egyszerű, a deduktív gondolkodás egyik komponensét, a konjunkció műveletének kezelését értékeli a G70. feladat.

G70. feladat

A tanár a következő feladatot adta a gyerekeknek:

Írj a rajzhoz szöveges feladatot
és számítsd ki a legnagyobb edény űrtartalmát!



Kattints a 😊 -ra annak a tanulónak a neve mellett, aki pontosan betartotta a tanár utasításait!

Kattints a ☹️ -ra annak a tanulónak a neve mellett, aki nem tartotta be pontosan a tanár utasításait!

😊	☹️	Ákos szöveges feladatot írt a rajzhoz. Kiszámította a legnagyobb edény űrtartalmát.
😊	☹️	Dorka szöveges feladatot írt a rajzhoz. Nem számította ki a legnagyobb edény űrtartalmát.
😊	☹️	Levente nem írt szöveges feladatot a rajzhoz. Kiszámította a legnagyobb edény űrtartalmát.
😊	☹️	Kornél nem írt szöveges feladatot a rajzhoz. Nem számította ki a legnagyobb edény űrtartalmát.

2.3.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika esetében az alapkészségek fejlesztése és a szaktantárgyi tudás elmélyítése ebben a korosztályban is egyaránt releváns célkitűzés. A kombinatív és a korrelatív gondolkodási képességek tartalomhoz kötött fejlesztésének lehetősége mellett sor kerül az adatkezelés és -ábrázolás, valamint a halmazelméleti alapokon álló valószínűségi események matematikailag adekvát megalapozására. A korrelatív gondolkodás képessége a matematikai gondolkodás rendszerében a multiplikatív gondolkodás egyik formájaként értelmezhető. Adatsorok közötti összefüggés felismerése és a kapcsolat megfogalmazása a feladat, ahol az összefüggés nemcsak hogy nem lineáris, hanem általában nem is adható meg egyszerű képlettel.

Korábban említettük, hogy a kombinatorika témaköre a kombinatív képesség mérésének és fejlesztéséhez természetesen szorosan kapcsolódó terület. 5–6. osztályban már a képi szinttől jórészt elszakadva lehetővé válik, hogy fogalmi szinten, a konkrét, egyedi esetek tételes felsorolása nélkül is válaszoljanak a tanulók az összes lehetőségre, az összes lehetséges sorrendre vonatkozó kérdésekre. *Szitányi és Csikos (2015)* eredményeivel összhangban azonban nem célja sem a fejlesztésnek, sem az online diagnosztikus értékelésnek, hogy a képi reprezentációkat kizárjuk vagy visszaszorítsuk a kombinatorikai feladatokból, hiszen valamilyen vizualizációs stratégia alkalmazása pozitív irányú összefüggést mutat a kombinatorikai teljesítménnyel. A *G71. feladathoz* többféle vizualizációs stratégia elképzelhető.

A *G71. feladat* esetében minden bizonnyal szükségük lesz a tanulóknak az opcionálisan használható papírlapokra, amelyeken részszámításokat végezhetnek, rajzokat készíthetnek. Várhatóan gráfszerű, poligonszerű vagy más típusú rajzok készülnek a tanulói jegyzetlapokra. Az online diagnosztikus tesztelés által nyújtott előnyök közül itt a legszembetűnőbb az automatikus, online, objektív értékelés.

G71. feladat

A 6. osztályosok iskolai matematikaverseny selejtezőjéből a 4 legjobb tanuló (Peti, Marci, Laci és Robi) jutott a döntőbe.

Írd be számjegyekkel az üres téglalapokba az alábbi kérdésekre adott válaszaidat!



- a) Hányféle sorrend lehetséges köztük, ha nincs holtverseny?
- b) Hányféle sorrend lehetséges, ha tudjuk, hogy Marci lett az első?
- c) Hányféle sorrend lehetséges köztük, ha a 3. és 4. helyen holtverseny alakult ki?
- d) Hány kézfogás történt, ha az eredményhirdetés után minden döntőbeli versenyző kezét fogott egymással?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

G72. feladat



Az olimpián 10 tanuló vett részt összesen 15 versenyszámban.

Döntsd el az alábbi események mindegyikéről, hogy biztos, lehetséges vagy lehetetlen!

- a) Van olyan tanuló, aki legalább 2 versenyszámban vett részt.
- b) Van olyan tanuló, aki legalább 3 versenyszámban vett részt.
- c) Van olyan tanuló, aki 7 versenyszámban is részt vett.
- d) Van olyan tanuló, aki 6 versenyszámban is részt vett.

Húzd az események betűjelét a megfelelő halmazba!

a b c d

Biztos	Lehetséges	Lehetetlen

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A *G72. feladat*ban is sokféle megoldási stratégia érvényesülhet, a halmazok rajzolgatásától a választható opciókból kiinduló, visszafelé ható gondolkodási módszerekig. Ez utóbbira példa: Gondolkodhat úgy egy tanuló, hogy először megnézi, melyek a biztos vagy a lehetetlen események, és a végén kizárásos alapon a többit a lehetséges kategóriába sorolja.

G73. feladat

A jegenyefák nem nőnek az égig.

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy következnek-e a fenti kijelentésből!
Kattintással válaszolj!

Tehát minden jegenyefa az égig nő.	☐ IGEN.	☐ NEM.
Tehát van olyan jegenyefa, amelyik az égig nő.	☐ IGEN.	☐ NEM.
Tehát van olyan jegenyefa, amelyik nem nő az égig.	☐ IGEN.	☐ NEM.
Tehát nincs olyan jegenyefa, amelyik az égig nő.	☐ IGEN.	☐ NEM.
Tehát nincs olyan jegenyefa, amelyik nem nő az égig.	☐ IGEN.	☐ NEM.
Tehát egyetlen jegenyefa sem nő az égig.	☐ IGEN.	☐ NEM.

☐ Vissza
☐ Tovább

A kombinatorika területéhez a feladatkitűzés jellege miatt kapcsolódik a *G73. feladat*, amelyben egy rejtett univerzális kvantort tartalmazó állítás helyes és logikailag helytelen átfogalmazásairól kell a tanulónak döntést hoznia. A feladat elsősorban a deduktív gondolkodást értékeli.

2.4. Irodalom

- Adey, P. és Csapó, B. (2011): Developing and assessing scientific reasoning. In: Csapó Benő és Szabó Gábor (szerk.): *Framework for diagnostic assessment of science*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–53.
- Berends, I. E., és van Lieshout, E. C. D. M. (2009): The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, **19**, 345–53.
- Carroll, J. B. (1998): Matematikai képességek: a faktoranalízis néhány eredménye. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (1998): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 13–37.
- Chan, D. W. (2007): Gender differences in spatial ability: Relationship to spatial experience among Chinese gifted students in Hongkong. *Roeper Review*, **29**, 277–282.
- Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő (1997): The development of inductive reasoning: Cross-sectional assessments in an educational context. *International Journal of Behavioral Development*, **20**, 609–626.
- Csapó Benő (2002): Az új tudás képződésének eszközei: az induktív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 261–290.
- Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő (2004): *Tudás és iskola*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- Csapó Benő és Molnár Gyöngyvér (2012): Gondolkodási készségek és képességek. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 407–440.
- Csikós Csaba és Csapó Benő (2011): A diagnosztikus matematika felmérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 141–168.
- Csikós, C. és Verschaffel, L. (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel P. és Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, **20**, 487–506.
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. és Wilson, A. J. (2004): Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, **14**, 218–224. DOI:10.1016/j.conb.2004.03.008
- Gardner, H. és Hatch, T. (1989): Multiple intelligences go to school: educational implications of the theory of multiple intelligences. *Educational Researcher*, **18**, 4–10
- Ginsburg, H. P. (1998): Toby matekja. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 175–199.
- Molnár, G. (2011): Playful fostering of 6- to 8-year-old students' inductive reasoning. *Thinking Skills and Creativity*, **6**, 91–99.
- Molnár Gyöngyvér. és Csapó Benő (2003): A képességek fejlődésének logisztikus modellje. *Iskolakultúra*, **13**, 2. sz. 57–69.
- Molnár Gyöngyvér és Csapó Benő (2011): Az 1–11 évfolyamot átfogó induktív gondolkodás kompetenciaskála készítése a valószínűségi tesztelmélet alkalmazásával. *Magyar Pedagógia*, 2. sz. 127–140.

- Nagy József (2003): A rendszerező képesség fejlődésének kritériumorientált feltárása. *Magyar Pedagógia*, **103**. 269–312.
- Nagy József (2010): *Új pedagógia kultúra*. Mozaik Kiadó, Szeged.
- Nemzeti alaptanterv (2012):
- Nunes, Terezinha és Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.
- Opfer, J. E. és Siegler, R. S. (2007): Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, **55**. 169–195.
- Perkins, D. N. és Salomon, G. (1989): Are cognitive skills context-bound? *Educational Researcher*, **18**. 16–25.
- Schliemann, A. D. és Carraher, D. W. (2002): The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review*, **22**. 242–266.
- Schwartz, D. L. és Moore, J. L. (1998): On the role of mathematics in explaining the real world: Mental models for proportional reasoning. *Cognitive Science*, **22**. 471–516.
- Séra László, Kárpáti Andrea és Gulyás János (2002): *A térszemlélet*. Comenius Bt., Pécs.
- Sternberg, R. J. (1985): Teaching critical thinking: Are we making critical mistakes? Possible solutions. In: Marcia, H. és Slomianko, J. (szerk.): *Thinking skills instruction: Concepts and techniques. Building students' thinking skills series*. CT: NEA Professional Library, West Haven. 208–216.
- Szítányi, J. és Csikos, C. (2015): Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In: Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (szerk.): *Proceedings of 39th psychology of mathematics education conference*, Vol. 4, pp. PME, Hobart, Australia. 225–232.
- Toluk Ucar, Z. és Yavuz, B. (2011): Elementary school students' intuitive understanding of the inequality signs. In: Ubuz, B. (szerk.): *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education - Developing mathematical thinking*. Vol 4. PME. Orta Doğu Teknik Üniversitesi [Middle East Technical University] Ankara, Turkey. 249–256.
- Varga József, Józsa Krisztián és Pap-Szigeti Róbert (2007): Az arányosságszámítási készség kritériumorientált fejlesztése 7. osztályban. *Magyar Pedagógia*, **107**. 5–27.
- Vidákovich Tibor (2002): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 201–230.
- Vidákovich Tibor (2008a): *A matematikai kompetencia fejlesztése más tantárgyak keretei között*. Education Kht, Budapest.
- Vidákovich Tibor (2008b): A tapasztalati következtetés fejlődése az óvodától a középiskoláig. *Magyar Pedagógia*, **108**. 199–224.

3.

A matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése

Ambrus Gabriella

Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikatanítási és Módszertani Központ

Csikos Csaba

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Makara Ágnes

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

Szitányi Judit

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

Zsinkó Erzsébet

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematikai Tanszék

A matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése során a Csikos és Verschaffel (2011) által kifejtett elméleti alapokra és a NAT-követelményeire építünk. Az előző fejezetben harmadik tényezőként említett „iskolai matematikatanítás gyakorlatát” ebben a tudásdimenzióban nem annyira a tartalmi keretek meghatározó tényezőjeként, hanem sokkal inkább a rendszerszintű pedagógiai felmérésekben hiányterületként feltárt tényezőként tudjuk számításba venni. Ez azt jelenti, hogy bár nem ismerjük kielégítő pontossággal az osztálytermi gyakorlatban a tudásalkalmazás előmozdítására végzett tevékenységeket, a TIMSS- és PISA-mérések eredményei szerint jelentős elmaradást produkál a hazai oktatási rendszer. A PISA-mérésekben (OECD, 1999) megjelenő tudásdimenziók között újdonságként és hangsúllyal jelent meg a matematikai tudás különböző szituáci-

ókban (kontextusokban) való felhasználásának követelménye. A PISA által definiált kontextustípusok átvétele a projektünk számára két okból nem célszerű. Egyrészt a 15 éves tanulók munkaerő-piaci felkészültsége szempontjából meghatározott különféle kontextusok más módon relevánsak az 1–6. osztályos korosztály számára. Másrészt ezek a különféle kontextusok (személyes, nyilvános, foglalkoztatási, oktatási) a kezdetektől rugalmas, egymást részben átfedő szituációkként kerültek elő, amelyek listája bővíthető és akár pontosítható lenne. A matematikai tudás alkalmazásának feltérképezését a tartalmi keretek számára ezért a tudományos folyóiratokban megjelent és elfogadott nevezéktant keresve Csikos és Verschaffel (2011) a matematikai szöveges feladatok világának kutatási eredményeit tekintették át. Az általunk meghatározott négylépcsős taxonómia második és harmadik lépcsője közötti válaszvonal válik jelentőssé a matematikai tudás alkalmazásának leírása és mérése során. A modell második lépcsőjét olyan matematikai szöveges feladatok képezik, amelyeket rutinszerűen, ismert algoritmust felhasználva meg tudnak oldani egy adott évfolyam tanulói. Szendrei Julianna (2005) tanpéldának nevezi az ilyen feladatokat. Ismeretes a német szakirodalomból a „beöltöztetett feladat” (eingekleidete Aufgabe; Ambrus, 2007) vagy a pseudo-realisztikus jelző is (Boaler, 1994).

Vannak ugyanakkor olyan feladatok, amelyeknél az életünk során megszerzett tapasztalatokhoz egy matematikai modellt illesztve jutunk el a megoldáshoz. A valós tartalmú problémák megoldása és a matematikai problémamegoldás folyamata nemcsak sok hasonlóságot mutat (vö. pl. Greefrath, 2007), de a valós tartalmú feladatok esetében szükséges „matematizálás” illetve a kapott eredménynek a tényleges helyzettel való egybevetése – mivel nem csak a szöveges feladatok esetében szokásos szövegbehelyettesítésről van szó – fontos többletet is jelent a tisztán matematikai tartalmú feladatokhoz képest. A mindennapi alkalmazások megjelenése az órán és a felmérésekben segíti leküzdeni a matematikával szembeni ellenérzést és a gyakran megjelenő szorongást is.

A tanulónak kell általában magát a matematikai problémát is megfogalmaznia, ennek megoldásához matematikán belüli módszert találnia és az eredményt értelmeznie. Sokszor félrevezető lehet a realisztikus jelző alkalmazása egyes feladattípusok leírásában, hiszen magyarul (és más nyelveken is) a szó elsődleges szemantikai jelentése valóságtartalomra, valósághoz kötöttségre utalhat, míg az eredeti holland szóalkotás az elképzelhető matematikai modellekre utalt (Van de Heuvel-Panhuizen, 2001).

A matematikai tudás alkalmazásának negyedik szintjét az olyan feladatok képviselik, amelyek a tanulók életében ténylegesen felbukkanva igénylik a feladatkontextus és valamilyen matematikai modell egyeztetését (Palm, 2009). Az olyan feladatok, amelyekben fiktív szereplőkre vonatkozó megnyilvánítások és viszonyok szerepelnek, természetsszerűleg nem tartoznak az autentikus feladatok közé, ugyanakkor lehetnek realisztikus feladatok.

A mesékben gyakran találkozunk „hétmérföldes léptekkel”. De vajon át lehet-e lépni egy ilyen lépéssel hegyen és völgyön? Elgondolódást számításal indokold!

Mivel többféle „mérőföld” is létezik attól függően, hogy mennyire nyitottan szeretné a tanár ezt a kérdést tárgyalni, segítségül megadható az is, hogy 1 (magyar) mérőföld körülbelül 8354 m.

A tanpéldák – avagy szövegbe öltöztetett rutinpéldák – és a realisztikus feladatok közötti határvonalat szemlélteti az alábbi példa is:

Hány oldalas az a könyv, amelynél az oldalak számozásához összesen 600 számjegyet írtak le?

A hagyományos megközelítéssel számolva a következő megoldás adódik: az egyjegyű, a kétjegyű és a háromjegyű számok írásához szükséges számjegyek számát összeszámolva, a könyv $9 + 90 + 137 = 236$ oldalas.

Érdemes azonban a feladatnál hosszabban is elidőzni. Az előbbi eredményt úgy kaptuk, hogy nem vizsgáltuk meg, valóban úgy vannak-e számozva a könyvek, hogy ez az eljárás helyes eredményt ad. Érdemes a tanulókkal utánanézni, milyen könyvszámozási módszerek fordulnak elő, és a tapasztalatokat akár táblázatba is lehet foglalni. A következő lehetőségek elég hamar megtalálhatók.

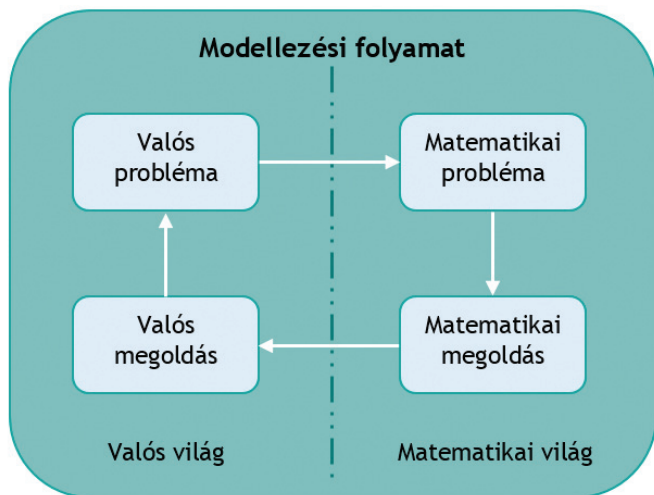
Könyv	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Számozás kezdete a borítótól	5	6	12	4	5	3	13	7
Számozás befejezése a hátsó borítótól	8	3	2	0	3	2	1	5

Ezek után ki lehet választani, hogy melyik számozási mód alapján számoljuk ki az oldalszámot, vagy akár egy új „könyvszámozási modell” is

készíthető a tapasztalatok alapján, és azzal is lehet dolgozni. A végső eredményénél utalni kell az alkalmazott számítási modellre, vagy azt is mondhatjuk, hogy a kérdéses könyv körülbelül 240-250 oldalas lehet.

Ha a feladatot magát tekintjük, akkor nem tekinthető „valóságos feladatnak”-nak, hiszen nemigen képzelhető el a mindennapokban az, hogy leírt számjegyekből számítsunk oldalszámot. Ez a feladat tipikus példája annak, hogy valós szituáció alkalmazásával (itt: könyvek számozásával kapcsolatban) valójában inkább matematikai tartalmat helyezünk előtérbe. Az úgynevezett *valóságközeli feladatok* körébe nemcsak valós kérdésfeltevésű reális szituáción alapuló feladatok tartoznak, hanem például olyanok is, ahol a valós szituáció felhasználásával a tananyaghoz kapcsolódó matematikai számításokat végzünk.

A tartalmi keretek elméleti fejezetében korábban részletesen foglalkoztunk a brousseau-i didaktikai egyezmény jelenségével. A matematikai tudás alkalmazását mérő feladatokban gyakran okoz nehézséget, hogy a tanórán más szabályok, másfajta megoldásmenetek elfogadhatók, mint amit valóságos probléma esetében a hétköznapi életben alkalmazunk. A matematikaórai és a hétköznapi problémareprezentáció és az elfogadott megoldási sémák viszonyát jól szemlélteti a Blum és Borromeo Ferri (2009) által javasolt ábra:



Jól mutatja az ábrán szaggatott függőleges vonallal jelölt törést az alábbi példa:

*Amióta Pistiék új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 forintot, amit azóta mindig félre is tesz.
Hány napja laknak ott, ha már 35 000 forintot gyűjtött így össze?*

A feladat nyitott, ám a különböző korosztályok esetében végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy ezt nem sokan nem veszik észre, és megoldásként 35 héttel számolva a 245 napot adják meg eredményül. Többféle, egyszerűbb és bonyolultabb feltételrendszer alapján, többféle modell is készíthető a megoldáshoz. A szükséges matematikai ismeretek nem haladják meg a négy alpművelet ismeretét, ám a modellek alapján a megoldások megfelelő szintű elkészítése már korántsem egyszerű.

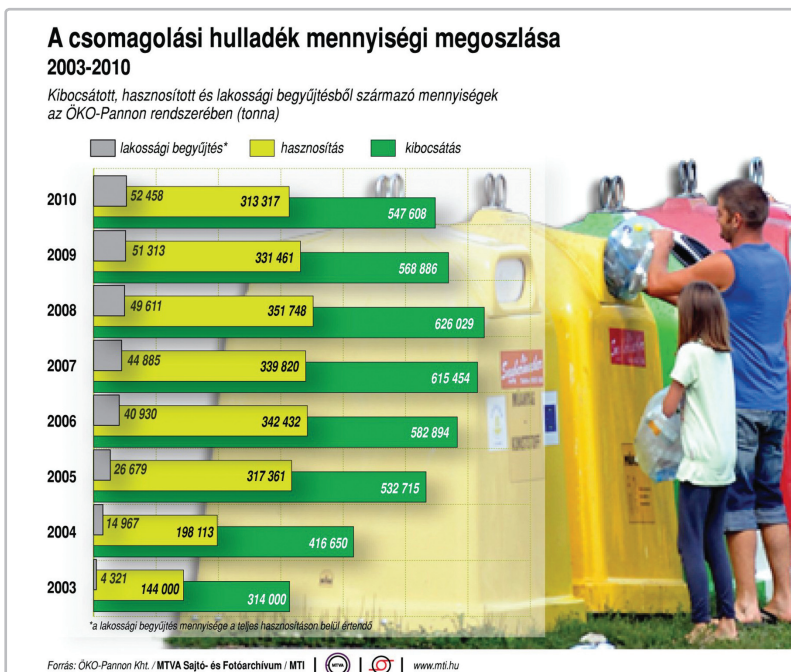
Az 5–6. osztályban elvárható megoldás szerint a napok száma 239 és 251 közötti lehet. A tanulóktól akkor várható el ilyen jellegű feladatkezelés, ha a feladatmegoldások során elég gyakran megtapasztalnak hasonló helyzeteket az órákon. Ilyen nyitott, valós helyzetekre azért is szükség van, mert a zárt feladatok világa a tanulók számára úgy is értelmezhető, hogy a „matematikaórák valósága” (a tyúkók arányosan tojnak, a könyvek mindig az 1. oldaltól számozódnak) más, mint a való élet. Emiatt a tanulók gyakran eleve nem is említik azokat a gondolataikat, amelyek ettől a matematikai valóságtól eltérőek. Ez magában hordja annak a veszélyét is, hogy a valós életben sem veszik elő a matematikai tudásukat, ha meg kell oldaniuk valamilyen problémát, hiszen a matematika és a valóság számukra külön világ, a matematika csupán a matematikaórára, az ottani alkalmazásokra való.

A matematikatudás alkalmazásának mérése során egy másik szempontú kihívást jelent a matematika és más iskolai tantárgyak kapcsolata. A kapcsolat távolról sem csupán egyirányú, azaz nem kizárólag a matematikának más tantárgyakban játszott szerepéről és alkalmazásáról van szó, hanem a más tantárgyak tartalmi is lehetőséget nyújtanak arra, hogy a matematikai tudás elmélyüljön és több kontextusban alkalmazhatóvá váljék. A kontextusokon átívelő tudásalalmazás leírására gyakran a tudástranszfer kifejezést használjuk (ld. Molnár, 2002).

Sem az alaptantervben, sem az új tankönyvekben nincs koherens, deklarált kapcsolat az iskolai tantárgyak tartalmi között, így a matematikai

tudás alkalmazásának szempontjából a NAT kulcskompetenciáit és kiemelt fejlesztési feladatait célszerű figyelembe venni.

A következő feladat a környezetvédelem témájában született, és több tantárgyban előforduló szakkifejezések lelhetők fel benne.



Grafika: MTI

Forrás: ng.hu

2012 végére a csomagolási hulladék 60 százalékát kell hasznosítani. Melyik évben sikerült már eleget tenni ennek az előírásnak?

A baleset-megelőzés egy másik olyan terület, amely több iskolai tantárgy fogalmait integrálja, és a tudásalkalmazás területei között jelentősége megkérdőjelezhetetlen (A1. feladat).

A1. feladat



Magyarország vezet a halálos biciklis sérülések számát tekintve (Európában) miközben a védősisak viselésének gyakorisága mindösszesen alig negyede a nyugati országokban tapasztalhatóénak.

Magyarországon évente mintegy 2500 gyerek sérül vagy hal meg súlyos közlekedési baleset következtében, ebből 490 a biciklis tragédiák száma. Egy különböző országok között készített összehasonlító felmérés szerint Magyarország vezető helyen áll a halálos biciklis sérülések számát tekintve. Több mint kétszer annyi felnőtt és gyerek hal meg hazánkban kerékpáros balesetben, mint a szomszédos Ausztriában, miközben ott jóval többen bicikliznek rendszeresen.

(<http://www.pecsinapilap.hu> nyomán)

Olvasd el figyelmesen a szöveget, és gondold meg, igazak-e a következő állítások!

Hazánkban nagyjából minden negyedik ember védősisakot visel biciklizés közben.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

Magyarországon kétszer annyi a súlyos baleset, mint Ausztriában.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

Évente közel 500 a halálos biciklis balesetek száma.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

Több országot összehasonlítva, Magyarországon a legtöbb a halálos biciklis sérülés.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

Ausztriában kétszer annyian halnak meg biciklis balesetben, mint Magyarországon, de ott többen is bicikliznek, mint nálunk.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

Ausztriában sokkal többen bicikliznek, mint Magyarországon.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

☐ Vissza

Tovább ☐

Kiegészítő feladat lehet, hogy készítsenek a szöveg alapján további állításokat, és döntsék el, igazak vagy hamisak. A téma kapcsán érdemes a kerékpározás időszerű kérdéseit is megvitatni.

3.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

3.1.1. Számok, műveletek, algebra

Kisiskoláskorban a szöveges feladatoknak kettős szerepük van. Egyrészt megjelennek a műveletek értelmezésénél, másrészt a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében. Mindkét esetben jellemző, hogy a szöveg a hétköznapi élet tapasztalatait vagy a gyermeki fantáziavilág jelenségeit fogalmazza meg, lehetővé téve ezzel a gyerekek számára a történet elképzelését, illetve modellezését. Kezdetben 1–2. osztályban még nem várhatjuk el a szöveges feladatok megoldási menetének tudatos alkalmazását, szükséges a tanítói segítségnyújtás javaslatokkal, egyszerű kérdések megfogalmazásával.

A szöveges feladatok kezdetben tevékenységeket, történéseket kísérő megfogalmazások, amelyek eljátszása, illetve utánzása vezet el a megoldáshoz. A feladatok attól válnak realisztikussá, hogy a feladatmegoldás során aktív szerephez jutnak a hétköznapi tapasztalatok, a memóriában elraktározott vizuális és egyéb képzetek, és ezeket fölhasználva alkot a tanuló egy matematikai modellt a feladatmegoldás folyamán.

Az *A2. feladatban* a memóriában remélhetőleg megbízhatóan elraktározott mennyisége előhívása és a mennyiségek sorrendbe állítása a feladat.

A2. feladat

Dönts el az alábbi állításokról, hogy az igaz vagy hamis!

Ha igaz az állítás, a legördülő menüből **válaszd az I betűt**, ha hamis az állítás, **válaszd a H betűt**!

◀

1. Az évszakok száma nagyobb, mint a hónapok száma. Válassz!

◀

2. A hét napjainak száma kevesebb, mint a hónapok száma. Válassz!

◀

3. A hónapok száma nagyobb, mint az évszakok száma. Válassz!

◀

4. A hét napjainak száma kevesebb, mint a hónapok száma. Válassz!

◀ Vissza
Tovább ▶

Ugyanaz a feladat szöveges rutinfeladat lehet magasabb iskolai évfolyamon, és realisztikus feladatnak minősülhet alacsonyabb évfolyamokon. Az

A3. feladat az 1–2. osztályos tanulók többsége számára feltételezhetően a realisztikus kategóriába esik, míg több felsőbb évfolyamos tanuló számára egyszerű rutinfeladat.

A3. feladat

Az iskola ebédlőjében egy asztalnál négy szék van.

Hány gyerek tud ebédelni:

a) 8 asztalnál?

b) 11 asztalnál?

c) 15 asztalnál?

Vissza

Tovább

Segíti a szöveg értelmezését, ha a szöveg egy adott képről vagy kialakult helyzetről szól. A képről alkotott szöveg mintául is szolgálhat a fordított irányú tevékenységekhez, amelyekben a gyerekek feladata a szöveghez illő képpalkotás. A feladatok realisztikus jellegét adhatja a tanulók – képhez kapcsolódó – élményeinek megfogalmaztatása, olyan kérdések alkotása, amelyek a kép alapján megválaszolhatók (*A4. és A5. feladat*).

A szöveges feladatok számfeladatokra, illetve nyitott mondatokra fordítását jó, ha megelőzi a változásokat jól szemléltető képpárral való megjelenítés. A képpárról való olvasás, a szöveg és a képpár összekapcsolása jelzi az adott és a hiányzó adat közti kapcsolat felismerését. A valóságos szituációkat idéző képpárok valóságtartalmú feladatok alkotását teszik lehetővé. Az elmeséléssel, illetve elmondással adott szöveges feladat realisztikussá válik a gyerekek számára, ha megjeleníthető tárgyi tevékenységgel vagy rajzzal (*A6. feladat*). Az eszközök és a rajzok kezdetben tárgyhiűek, azt szemléltetik, amiről a történet szól. Később elvárható egyszerűbb rajzok, absztraktabb ábrák értelmezése is. Ez a folyamat egyúttal azt is jelzi, ahogyan egy autentikus, tevékenykedtető feladat rutinszerűen megoldható szöveges feladattá válik a fejlődés során.

A4. feladat

Ültess annyi macit még az ágyra, hogy ott 8 maci legyen!



Vissza

Tovább

A5. feladat

A képen egy hibás sakktáblát látsz.

A valódi sakktábla nagyobb, ott 8 sorban és 8 oszlopban összesen 64 mező van.



1. Hány mező van ezen a hibás sakktáblán? Egészítsd ki a választ a megfelelő számmal a legördülő menüből!

A képen látható táblán összesen Válassz! mező van.

2. Mennyivel több fekete mező van ezen a táblán, mint fehér?

A táblán Válassz! több a fekete mezők száma, mint a fehér mezők száma.

Vissza

Tovább

A6. feladat

A gyerekek kabátjáról leszakadt az összes gomb. Anyuka 12 gombot vett. Ebből Mimi kabátjára 6 gombot varrt fel, Dávidéra 3-mal kevesebbet. Írd a helyes válaszokat a keretekbe!

a) Hány gombot varrt fel anyuka Dávid kabátjára?
Dávid kabátjára anyuka gombot varrt fel.

b) Hány gombot varrt fel anyuka a két kabátra összesen?
Összesen gombot varrt fel.

c) Hány gomb maradt a 12 gombból?
 gomb maradt.

d) Mimi szeretne még 1-1 gombot a kabát ujjaira is. Hány gomb lesz Mimi kabátján ezekkel együtt?
Mimi kabátján gomb lesz.



Vissza
Tovább

Két további példa (A7. és A8. feladat) a gyermeki tapasztalatokra építő, realiztikus feladatok jellegzetes témáit illusztrálja.

Számos, egymástól jelentősen különböző mentális modell alkotható az A8. feladathoz, beleértve a mentális számegyenest, a naptár rajzolását. Az A9. feladat újabb tipikus feladattémára, a bevásárlásra épül, és egyúttal jelzi a viszonylag ritkán használt alternatív választásos feladattípus felhasználásának lehetőségét.

A7. feladat

A gyerekek 4 darab 2 személyes és 3 darab 3 személyes szánkóval mentek a közeli dombra szánkózni. Egyszerre hányan fértek fel a magukkal vitt szánkókra?
Válaszd ki a legördülő menüből a helyes számot!

A szánkókra gyerek fért fel.

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege: 9 / 12 / 17 / 14

A8. feladat

◀

Hány éjszakát alszunk hétfő reggeltől vasárnap estig?

◉ Vissza
Tovább ◉

A fenti tevékenységek készítik elő a szöveges feladatok matematikai modellhez való kapcsolását. A szöveggel megfogalmazott összefüggés számokkal, jelekkel és műveletekkel fejezzük ki, kezdetben közös tevékenységgel. A közös modellalkotást követheti az önálló tevékenység, melynek során várjuk az egyszerű szöveges feladat összekapcsolását számfeladattal, illetve nyitott mondattal.

A9. feladat

Édesanya bevásárolni ment a piacra. A bevásárlás végére a bal kezében lévő kosárba tett 3 kg almát, 2 kg körtét, 1 kg savanyúságot, így ez 4 kg-mal nehezebb lett, mint a jobb kezében levő.

Hány kg árut tegyen át a nehezebb kosárból, hogy egyforma legyen a két kosár tömege?




Válassz a legördülő lehetőségek közül! Igaz vagy hamis az állítás?

◀

A) A jobb oldali kosárba tegyen át 4 kg árut.

Válassz!

◀

B) Lehetetlen egyenlővé tenni a két kosár tömegét.

Válassz!

◀

C) A bal oldali kosárba pakoljon át 2 kg paprikát.

Válassz!

◀

D) A jobb oldali kosárba tegye át a 2 kg körtét.

Válassz!

◉ Vissza
Tovább ◉

Legördülő lista szövege: Igaz. / Hamis.

Az *A10. feladat*ból megalkotható egyszerűbb feladatban magának a szöveges feladatnak a megoldását várjuk el a tanulóktól. Az itt bemutatott változat azonban magasabb szintű gondolkodási folyamatokat mér.

A10. feladat

Nagymama 20 darab kakaós palacsintát készített három unokájának uzsonnára.
 Peti megevett belőlük 4-et, Zoli 3-at.
 Mennyit evett meg Julcsi, ha a tálon 8 darab maradt?

Válaszd ki a helyes nyitott mondatot! Kattints az előtte lévő betűre!

☐ **A** $20 - 4 + 3 -$  $= 8$

☐ **B** $20 - 4 - 3 -$  $= 8$

☐ **C** $20 - 4 - 3 +$  $= 8$

☐ Vissza
☐ Tovább

A feladatok szövege és a feladatmegoldáshoz kapcsolódó műveletkijelölés közötti kétirányú kapcsolatok felismerését és megalkotását segítik elő azok a feladatok, amelyek szöveg és számfeladat vagy nyitott mondat párosítását igénylik, és tartalmaznak olyan matematikai modellt, amelyik egyetlen szöveges feladathoz sem illik. Ekkor kérhetjük a kimaradt számfeladról vagy nyitott mondatról szöveg alkotását. Várhatjuk és igényelhetjük, hogy a szóban megfogalmazott szöveges feladatok valóságos adatokat tartalmazzanak, kapcsolódjanak a gyerekek mindennapjaihoz vagy átélt élményeihez.

A fenti tevékenységek előkészítik a szöveges feladatok megoldási lépéseinek tudatosítását. A köznyelven megfogalmazott szöveges feladatok információiból a jól kigyűjtött és lejegyzett adatok, a köztük lévő kapcsolatok ábrázolása vagy megjelenítése tevékenységgel, a kérdésre adható válasz helyes becslése jelzi a megoldáshoz vezető matematikai modellt. A modell megalkotása a problémamegoldás legnehezebb lépése. A modellen belüli megoldást követi a megtalált megoldás eredeti problémára vonatkoztatása. Azáltal, hogy a gyerekek a talált megoldást összevetik a szövegben olvasott adatokkal, az előzetes becsléssel és a valósággal, megítélik a megoldás realitását is (*A11. feladat*).

A11. feladat



Kolumbusz Kristóf vezette a 25 méter hosszú Santa Maria hajót Amerika felfedezésére. A hajón 40 fő utazott, akik között ott volt a kapitány, Kolumbusz Kristóf és helyettese, Juan de la Cosa is.

A kapitányt és helyettesét leszámítva hány ember volt a hajón?
Melyik számolás illik a feladat szövegéhez?

Válaszd ki mindegyik esetben a nyitott mondatok utáni legördülő menüből!

A) $40-25=15$

B) $40-2=38$

C) $1+1+38=40$

D) $25+2=27$

[Vissza](#) [Tovább](#)

Kisiskoláskorban a gyerekek a számokkal valóságos problémafelvetések során ismerkednek. Megfigyeléseket, összehasonlításokat és méréseket végeznek. Felismerik tárgyak, személyek, dolgok érzékelhető tulajdonságait, válogatják azokat közös és eltérő tulajdonságaik alapján. Tevékenységeik közben tapasztalatokat szereznek a számok tulajdonságairól, kapcsolataikról. Például lépcsőjárás közben szerzett tapasztalataik alapján válnak képessé az *A12. feladat* megoldására.

Az autentikus problémafelvetések a tanulókat valódi, életszerű problémahelyzetek elé állítják. Ennek során olyan témák feldolgozására kerül sor, amelyekhez a tanulóknak személyes, a valóságban átélt élményeik fűződhetnek. Előidézünk olyan újszerű helyzeteket is, amelyek mások elmesélt történetei alapján válnak a gyerekek számára hitelessé (*A13. feladat*). A felvetett problémáknak – mint a valóságban – gyakran több lehetséges megoldásuk van. A megoldás többnyire függ attól, hogy milyen feltételek befolyásolják a történetet, és ezek közül adott szituációban melyik érvényesül.

A gyerekek napi tevékenysége, a környezetük és a természet bőven kínál lehetőséget autentikus szöveges feladatok felvetésére a kisiskolások számára. Gyűjthetnek adatokat a napi tevékenységeikről (például: mikor kelnek? Mikor fekszenek? Járnak-e különórákra? Mennyit sportolnak?),

rendezhetik az összegyűjtött adatokat, összehasonlíthatják, kérdéseket fogalmazhatnak meg, és megválaszolhatják azokat. Mi is felvethetünk olyan kérdéseket, amelyek megválaszolása adatkiegészítést igényel. A pótolható adat beszerzését rábízhadjuk a tanulókra, de felkínálhatunk lehetőségeket, tehetünk ezekre javaslatokat.

A12. feladat

Katiék egy társasház első emeletén laknak. Kati kettesével szedte a lépcsőket, így a hetedik lépéssel ért fel az első emeletre.

Hány lépcsőfok vezet az első emeletre?

Egészítsd ki a mondatot a legördülő menü segítségével!

Katiéknál az első emeletre lépcsőfok vezet fel.



Ha Kati első lépésként az első lépcsőfokra lép, és utána szedi kettesével a lépcsőfokokat, akkor hányadik lépésben ér fel a legfelső fokra?

Egészítsd ki a mondatot a legördülő menü segítségével!

Ha először az első fokra lép és utána szedi kettesével a fokokat, akkor lépésben ér fel a legfelsőre.

Legördülő lista szövege: 4 / 6 / 8 / 10 / 12 / 14 / 16
4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 9 / 10

A13. feladat

Óriási tojásvásár van a piacon.

a) Hány tojás van egy tele tálcán, ha egy sorába 6 tojás fér és a tálca 5 soros?
Kattints a helyes válaszra!

☐ 36 ☐ 42 ☐ 30

b) Mennyit fizettek Mónikáék 60 tojásért, ha egy tojást 20 Ft-ért adtak?
Kattints a helyes válaszra!

☐ 120 ☐ 1200 ☐ 1120

c) Nagymama 2 doboz 10 darabos és 3 doboz 6 darabos tojást vett, de hazafelé 4 darab teljesen összetört. Hány tojást tudott otthon nagymama a hűtőbe tenni?
A megfelelő szám beírásával egészítsd ki a választ!

Nagymama darab tojást tudott a hűtőbe tenni.

3.1.2. Relációk, függvények

Ahogy a többi matematikai tartalmi területnél, a relációk és függvények területén is a realizisztikusság kritériuma egy feladat esetében, hogy a tanuló számára elképzelhető (legtöbbször a hétköznapi tapasztalatokban gyökerező) legyen a feladat tartalma. Az 1.2.2. pontban említett követelmény- és feladattípusok esetében a matematikai és más szimbólumok felől a hétköznapi tárgyak és relációk felé mozdulva fogalmazhatunk meg realizisztikus szöveges feladatokat.

Alapvető jellemzője a témakör realisztikus feladatainak, hogy a gondolkodási képességek közül elsősorban az induktív és korrelatív gondolkodás működését mozdítják elő. A hétköznapiakban megfigyelt vagy a fantáziavilágban működő összefüggések véges sok eset alapján születnek meg, majd az indukált szabály vagy összefüggés elvileg a jelenségvilág végtelenül széles körére érvényes. Az autentikus feladathoz képest a különbség abban ragadható meg, hogy a feladat irányítja az összefüggés- és szabálykeresést, és nem várjuk el, hogy a tanuló kezdeményezze azt.

A sorozatokkal kapcsolatos realiztikus feladatokban a feladat formai jellemzői megmaradnak, a tartalom viszont úgy módosul, hogy a horizontális matematizálásban a valóságos tapasztalatok vagy a belső gondolatvilág jelenségeiből indul a gondolkodás, és a tanuló ezekhez keres megfelelő matematikai modellt. A sorozatok esetében például az *A14. feladat*ban látható tartalmak tekinthetők realiztikusnak a legtöbb tanuló számára:

A14. feladat

Folytasd a megkezdett sorozatokat két taggal!

hétfő szerda péntek vasárnap kedd

január 1-je március 3-a május 5-e július 7-e

Anna Ágnes Beáta Antal Ábel Barnabás Anita Ágota Bernadett Attila

[Vissza](#) [Tovább](#)

A témakör másik nagyobb részterületén, az adatpárok közötti összefüggésekben is megfigyelhető, hogy változatlan feladatformátum mellett a feladat tartalmának alakításával válik lehetővé a mentális matematikai modellek építése. Az *A16. feladat* megoldásához arra van szükség, hogy a tanuló elképzelje a bennük szereplő dolgokat, és kialakítson egy matematikai modellt, amely a konkrét feladat esetében használható. A rokonsági viszonyok esetén a családfarajz vagy bármilyen fagráf szolgálhat matematikai modellként. Az állatok lakóhelyének vizuális képeit analógiás kapcsolat szöveges megfogalmazása révén tudjuk fölhasználni a megoldásban.

Az autentikus feladatok legfontosabb általános jellemzője, hogy olyan feladathelyzet valósul meg, amely a tanulói tevékenységekhez kapcsolódik, és amelyben a tanuló kezdeményezőként léphet föl. Számos esetben egyfajta „fordított feladatkitűzés” figyelhető meg, vagyis a feladat lényege az, hogy egy adott problémátérben a tanulónak magának kell megalkotnia egy feladatot, vagy elemeznie kell, hogy milyen feltételek mellett jön létre egy matematikai értelemben vett feladat (*A15. feladat*).

A15. feladat

Pali szülinapi zsűriján minden meghívottnak 2-2 matricát ad ajándékba. A gombra kattintva a csoportképet láthatod, amit Pali készített a zsűron az összes résztvevőről.

[Kattints ide! Nézd meg a képet a partiról!](#)

1. Hány matricát osztott szét Pali?
Legördülő menüből válaszd ki a helyes válaszokat!
Pali matricát osztott szét.

2. Elegendő volt egy tízes csomag matricát felbontani Palinak, hogy minden meghívott megkapja a matricákat?

☐ Igen. ☐ Nem.

[Vissza](#) [Tovább](#)

A sorozatok esetében az alapelv az lehet, hogy valamilyen problémátérben (fogalomrendszerben) a tanulók vegyenek észre mintázásokat, szabályszerűségeket, és fogalmazzák meg az összefüggést (*A17. feladat*).

A16. feladat

Folytasd a táblázatok kitöltését!

apa	öcsi	dédnagyapapa	nagypapa	
anya	hugi	dédnagymama		nagynéni

madár	kutya	ember	mókus	
fészek	kutyaól	ház		istálló

Vissza
Tovább

A17. feladat

Nóra néni 14 darab műanyag palackot vitt be az osztályába és megkérte a gyerekeket, hogy minden héten mindenki hozzon egy-egy palackot, ami így is történt. Két hét elteltével már 54 palack volt az osztályban.

Töltsd ki a táblázatot!



	1 hét múlva	2 hét múlva	3 hét múlva
Palackok száma		54	

Hány tanuló jár Nóra néni osztályába?

Az osztályba tanuló jár.

Vissza
Tovább

A sajátos nevelési igényű tanulók számára az autentikus feladathelyzetekben explicit irányítás szükséges, mert enélkül a feladat kontextusa és gyakori intranszparenciája nehezíti számukra a jelenségek matematikai jellemzőire való összpontosítást.

A sorozatok esetében az autentikus feladatban egy körülhatárolt problématerben arra biztatjuk a tanulókat, hogy ők maguk keressenek valamilyen szempont szerint fölépülő sorozatokat. Két ilyen példában először a tanulók neve, majd a százaz számkör természetes számai szerepelnek kiinduló halmazként.

Írjátok föl a táblára az osztályban előforduló utóneveket! Hogyan lehetne sorba rendezni ezeket? Írjátok le a sorba rendezett neveket!

A megoldás nagyon sokféle lehet. Kézenfekvőnek tűnik az ábécésorrend, de elképzelhető a név hosszúsága mint szempont vagy akár olyan kifinomult ötlet is, mint a nevek tulajdonosainak születési dátum szerinti sorrendje. Valamennyi esetben előfordulhat, hogy nem lesz szigorú értelemben monoton a nevek sorrendje. Ilyenkor célszerű az egyébként várhatóan monoton sorrendbe rendezett neveknél az egyenlőségrelációt az egymás alá írás módszerével jelölni.

Hogyan lehetne sorba rendezni a 12 hónapot? Találjátok ki minél többféle sorrendet!

Az adatpárok közötti kapcsolatok esetében is követhető eljárás, hogy felvázolunk egy kétdimenziós adatsokaságot, és a tanulók elsődleges feladata megtalálni néhány szempontot, amely alapján egyes dolgok összetartoznak. Fontos, hogy olyan kiinduló problématerünk legyen, amely természetes és releváns a tanulók számára. Ilyen problémateretek például: iskolai órarend, étkezéssel kapcsolatos fogalmak, rokoni kapcsolatok, öltözködés, ünnepek.

Milyen szabály szerint töltöttük ki a táblázatot? Folytasd a táblázat kitöltését a szabály szerint!

matematika	olvasás	ének	testnevelés
4	4	2	2

Lehetséges, hogy a heti óraszám szerepel a táblázatban, de lehetséges, hogy valakinek az osztályzatai, vagy éppen az, hogy mennyire szereti ezeket a tantárgyakat. Az ilyen típusú feladatok elsősorban az órai, fejlesztő értékelés eszközei, és diagnosztikus értékelésre azzal a megkötéssel alkalmazhatók, hogy nagyon szerteágazó, sok opciót megengedő javítókulcsra van szükség.

3.1.3. Geometria

A geometria területe – a témakör jellemzőinél fogva – kiválóan alkalmas a hétköznapi életből ismert jelenségek matematikai modellezésére. A geometria elsősorban a vizuálisan is megjeleníthető alakzatok matematikai jellemzőivel foglalkozik, és ebből adódóan kiválóan alkalmas a vizuális képzetek és a matematikai fogalomrendszer koherens összekapcsolására. A négy részterület közül most elsőként a tájékozódás területével foglalkozunk, jelezve ezzel azt is, hogy mennyi kézenfekvő lehetőséget jelent ez a terület realisztikus szöveges alkalmazására.

Tájékozódás

Az első évfolyam feladata a tér- és síkbeli tájékozódóképesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével, irányok, irányváltoztatások követése mozgással, a helymeghatározásra tanult kifejezések (pl. alatt, fölött, mellett, között, jobb, bal) értése, használata. Második évfolyamon elvárás a saját mozgást leíró információk megfogalmazása, útvonalak valódi és terepasztalon való bejárása, tudatosítása, bejárt útvonal elmondása, megadott helyek elérése, útvonalak fordított irányú bejárása, az irányváltoztatás hatása. Az első évfolyam elvárásaihoz képest egy jelentős nehezítés a síkban két adattal jellemzett helyek megkeresése (irány, távolság, szomszédosság).

Valós szituációt, a tanulók számára is releváns helyzetet tükröz az olyan feladat, amelyben szóbeli vagy írásos információt kell megérteni, irányokat és irányváltoztatásokat kell követni. A megoldás lehet manipulatív vagy képi szintű. Papír-ceruza és számítógépes tesztelés esetén is nyilvánvalóan a képi szintű feladatkitűzés lehetséges.

A tanteremben elrejtettünk egy kincses dobozkát. Megtaláld, csak kövesd az utasításokat!

- *A tanterem ajtajától indulj!*
- *Állj szemben az ablakkal!*
- *Lépj előre 3 lépést!*
- *Fordulj balra!*
- *Lépj 2 lépést!*
- *Fordulj jobbra!*
- *Lépj 2 lépést előre!*
- *A bal lábadnál van a kincses dobozka.*

Párban dolgozzatok! Mondd el a párodnak azt az útvonalat, amely ott-honról az iskolába vezet! Készíts térképvázlatot! Rajzolj a térképre néhány nevezetes helyet! Párod jelölje a térképen az általad elmondott útvonalat! Ellenőrizd a munkáját!

Az online jegyvásárlás ugyan nem feltétlenül valós élménye ennek a korosztálynak, ám a tájékozódás geometriai területen elvárt tudáselemeihez mégis jól kapcsolható ez az általuk elképzelhető feladatkontextus (A18. feladat).

A18. feladat

Enikő és osztálytársnői színházba mennek, de nem egymás mellé vettek jegyet.

A földszintre, a kék színnel jelölt helyekre szólnak a jegyeik.

Válaszolj a kérdésekre! Válassz a legördülő listából!

1. Hányadik sorba szólnak Enikőék jegyei?

Válassz!

2. A sötétzölddel jelölt helyek még szabadok. Hányadik sorban vannak még eladók jegyek?

Válassz!

3. Melyik földszinti sor van legmesszebb a színpadtól?

Válassz!

SZÍNPAD

Erdély jobb 5 / 9 / (1 900 Ft)

Vissza
Tovább

Konstruálások

1. évfolyamon megkezdődik, majd 2. évfolyamon folytatódik az alakzatok összehasonlítása (azonosítás, megkülönböztetés, formafelismerés összkép és egy-egy kiemelt geometriai tulajdonság alapján) a megfigyelési képesség fejlesztésére; a rész és egész felismerése, a megfigyelések kifejezése válogatással, megfogalmazása saját kifejezésekkel, megkezdett válogatás folytatása szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat értelmezése alapján. A tanulók képessé válnak a szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat ér-

telmezésére a válogatás folytatásával. Követelmény a sík- és térbeli alakzatok szétválogatása tulajdonságok alapján és azok osztályba sorolása – manipulatív és képi szinten, szöveges magyarázattal kísérve.

A tanulók képesek geometriai testeket építeni először szabadon, majd modell alapján. Képesek síkidomok előállítására tevékenységgel: mozaikkal, papírhajtogatással, szívószálak fűzésével, szabadkézi rajzolással, később a második évfolyamon ennek folytatásaként derékszög, téglalap, négyzet hajtogatása papírból, másolás átlátszó papírral, rajzolás négyzethálón, egyéb hálókön. Itt már elvárás a megadott egyszerű feltétel szerinti alkotás, illetve az alkotások összegyűjtése, azonosítása, megkülönböztetése (sokszögek néhány tulajdonságának megismerése, megnevezése: csúcsok, oldalak száma; oldalak egyenlősége; konvexség). Mindezek a tevékenységek és követelmények alkalmasak az alkotóképesség, kreativitás, a rendszerezés és a kombinativitás fejlesztésére. Az adott tulajdonságú építmények, síkbeli alkotások létrehozása, a tulajdonság ellenőrzése segíti a deduktív és az induktív következtetés fejlesztését. Az *A19. feladat* egy példa síkbeli alakzatok tevékenységgel való szétválogatására, osztályba sorolására a megfigyelt geometriai tulajdonságok alapján:

A19. feladat



A20. feladat

◀ a) **Kattints** a sorban annak a képnek a sorszáma, amely az elsőnek a tükörképe!

◉ 1. ◉ 2. ◉ 3.



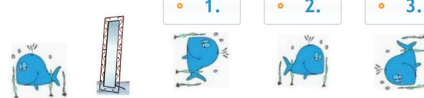
◀ b) **Kattints** a sorban annak a képnek a sorszáma, amely az elsőnek a tükörképe!

◉ 1. ◉ 2. ◉ 3.



◀ c) **Kattints** a sorban annak a képnek a sorszáma, amely az elsőnek a tükörképe!

◉ 1. ◉ 2. ◉ 3.



◉ Vissza Tovább ◉

Transzformációk

Már óvodáskorban megkezdődik a tapasztalatszerzés síktükörrel, a síkido-mok, testek szimmetriájának felfedezése, majd folytatásként az 1–2. évfolyamon tükrös alakzatok és egyszerű tükörkép előállítás mozgással, kirakással, nyírással, másolópapír segítségével, átfordítással, illetve tengelyes tükrösség ellenőrzése összehajtással és a síktükör használatával (A20. feladat). A témakörben ismét előtérbe kerül a megfigyelés (azonosítás, megkülönböztetés).

Mérés

Az 1–2. évfolyamon a számfogalom alakításához kapcsolva jelennek meg a mérések. Ennek kapcsán az összehasonlító-, megkülönböztetőképeség, a becslés, az összefüggések megfigyelése, felismerése, rendezése kap főszerepet: 1. osztálytól a különféle mennyiségek összehasonlítása, összemérése, kapcsolódó gyakorlati problémák megoldása. Ezt követően a 2. évfolyamon szabványegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl; óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati megismerése, elnevezésük és jelük használata válik követelménnyé.

A különböző mértékegységek közötti relációk felismerésének megalapozása fontos feladat a mérés témakörben. Ennek a követelmények a mérésre mutatjuk az *A21. feladatot*.

A21. feladat

Melyik a hosszabb?

Hasonlítsd össze az egymás mellett szereplő dolgok hosszát!
Válaszd ki a megfelelő relációs jelet: *kisebb, nagyobb vagy egyenlő!*

1 méter hosszú pálca	Válassz!	10 dm hosszú kötél
20 cm hosszú ceruza	Válassz!	2 dm hosszú vonalzó
3 dm hosszú vonalzó	Válassz!	25 cm hosszú vonalzó
10 cm hosszú szalag	Válassz!	1 dm hosszú fonal

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege: < / > / =

A tanulóknak meg kell figyelniük a kapcsolatokat mennyiségek, mértékegységek és mérőszámok között. A mérési tapasztalataikat felhasználják becslésekben, megfogalmazzák saját szavaikkal (*A22. feladat*).

A22. feladat

Melyik a nehezebb?

Hasonlítsd össze az egymás mellett szereplő dolgokat!
Válaszd ki a megfelelő relációs jelet: *kisebb, nagyobb vagy egyenlő!*

kifli	Válassz!	fél kg margarin
egy kg dió	Válassz!	egy kg mogyoró
fél kg mogyoró	Válassz!	50 dkg kenyér
10 dkg vaj	Válassz!	fél kg sajt

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege: < / > / =

A23. feladat

Melyik a hosszabb?

Hasonlítsd össze az egymás mellett szereplő dolgok hosszát!
 Válaszd ki a megfelelő relációs jelet: **kisebb, nagyobb vagy egyenlő!**

méterrúd	Válassz!	műanyag vonalzó
jobb láb	Válassz!	bal láb
kis lábujj	Válassz!	nagy lábujj
hegyező	Válassz!	ceruza

◉ Vissza
Tovább ◉

Legördülő lista szövege: < / > / =

A realiztikus feladatok részhalmazát jelentő autentikus feladatok geometriai megvalósításának egyik kiváló lehetősége az aktív, tudatos tanulói tevékenységre alapozott csoportos és egyéni projektmunka. Az autentikus mérési feladatok egyik csoportjában becslést kell adniuk a tanulóknak olyan helyzetekben, amelyek számukra relevánsak (*A23. feladat*). Ugyancsak ide tartoznak az alkalmi egységgel végzett mérések (*A24. feladat*), a standard mértékegységek felhasználása – feltevé, hogy a feladat a tanulók számára nemcsak realiztikus, hanem releváns is.

A24. feladat

Válaszd ki és húzd oda azt a színes rudat, amelyik ugyanolyan hosszú, mint a piros és a kék színes rúd együtt!



Ide húzd!



◉ Vissza
Tovább ◉

3.1.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatív gondolkodást és a valószínűségi szemléletet az iskolában legtöbbször játékok vagy játékos kísérletek keretében alapozzuk. A gyerek a játék során szerzett tapasztalatait építheti be feladatmegoldásaiba (A25. feladat).

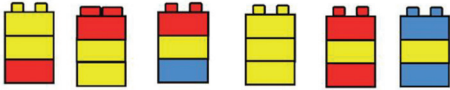
Alsóbb évfolyamokon a kombinatív gondolkodás és a valószínűségi szemlélet alakítása során olyan problémákat vethetünk fel, amelyek nem kizárólagosan e témakörbe tartoznak. Tévedés lenne azt gondolni, hogy amennyiben a tanóra kiemelt célja a valószínűségi szemlélet fejlesztése, akkor egész órán kizárólag dobókockákat dobálunk, pénzérméket csörgetünk vagy egy zsákból színes golyókat húzunk. A tanórákon megvalósulhat a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy is, hogy olyan problémákat vetünk fel, amelyek matematika más területeit is érintik, vagy éppen azok a hangsúlyosak.

Egy 0–99 számtáblázatra kell bekötött szemmel bökní. A játék előtt tippelni kell, hogy a szám felírható-e két 10-nél kisebb szám szorzataként. (Az 1 most nem szerepelhet.)

Ez a játék például a szorzótáblák gyakorlásakor kerülhet elő. Mivel ezt megelőzően hosszú ideig tanulták a szorzótáblákat – 100 esetet külön-külön –, igen nagy eséllyel gondolhatják, hogy több olyan szám van a táblázatban, amely szerepel a kisegyszeregyben, mint ami nem.

A25. feladat

Piros, sárga és kék legóelemekből az alábbi a tornyokat építettem.



Egyet kiválasztottam, és állításokat mondtam a kiválasztott toronyról.
Döntsd el, hogy biztosan igaz-e az állítás!

☐	1. Van benne piros elem.	☐ Biztos igaz.	☐ Nem biztos, hogy igaz.
☐	2. A középső elem sárga.	☐ Biztos igaz.	☐ Nem biztos, hogy igaz.
☐	3. Mindhárom szín szerepel benne.	☐ Biztos igaz.	☐ Nem biztos, hogy igaz.
☐	4. Nincs benne kék.	☐ Biztos igaz.	☐ Nem biztos, hogy igaz.
☐	5. Van két egyforma eleme.	☐ Biztos igaz.	☐ Nem biztos, hogy igaz.

Hogy számba tudják venni, melyek azok a számok, amelyek felírhatók két 10-nél kisebb szám szorzataként, például öntapadós lapokkal leragasztják a sárgával jelölt mezőket.

Meglepő lehet, hogy milyen kevés eset szerepel a kisegyszeregyben, ezért nem túl nagy az esélye, hogy a kívánt számra bökünk (100-ból csak 36 esetben bökünk olyan számra, amit olyan szorzatként tudunk felírni, amelyben minkét szám nagyobb 1-nél). Ebben a játékban a szorzás kommutativitásáról szerezhetnek tapasztalatot, és emellett kereshetik azokat a számokat, amelyeket többféleképpen is felírhatnak szorzatként. A valószínűségi szemléletük módosulhat a megfigyelés révén: ami többször, többféleképpen fordul elő, az valószínűbb. Az A26. feladat az előző feladatötlet eDia változatát szemlélteti.

0	1	2	3	2 x 2	5	2 x 3	7	2 x 4	3 x 3
2 x 5	11	6 x 2	13	7 x 2	3 x 5	4 x 4	17	3 x 6	19
10 x 2	3 x 7	22	23	3 x 8	5 x 5	26	3 x 9	4 x 7	29
10 x 3	31	4 x 8	33	34	7 x 5	6 x 6	37	38	39
4 x 10	41	6 x 7	43	44	9 x 5	46	47	6 x 8	7 x 7
5 x 10	51	52	53	9 x 6	55	7 x 8	57	58	59
6 x 10	61	62	9 x 7	8 x 8	65	66	67	68	69
7 x 10	71	9 x 8	73	74	75	76	77	78	79
8 x 10	9 x 9	82	83	84	85	86	87	88	89
9 x 10	91	92	93	94	95	96	97	98	99

A26. feladat

Az iskolában a gyerekek azt játszották, hogy a 0–99 számtáblázatra bekötött szemmel böktek. Az nyert, aki olyan számra bökött, amelyik felírható két 10-nél kisebb, 1-nél nagyobb szám szorzataként.

Kattints rá a nyerő mezőkre!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Mit találsz esélyesebbnek egy ilyen játék során?

Kattints rá a megfelelő válasz előtti gombra!

- ☐ A nyerés esélyesebb. ☐ Esélyesebb, hogy nem nyerek.

Válaszodat indokold!

☐ Vissza

☐ Tovább

Később ugyanezt a tevékenységet ismétlik, de most olyan számokat keresnek, amelyeket szorzatként fel tudnak írni. (Például $33 = 11 \times 3$) Így már jóval nagyobb lehet az esélye, hogy olyan számra bökönk, amelyet fel

tudunk írni szorzatként. Egy ilyen játék keretén belül nyílhat az első lehetőség arra, hogy a prímszámokról is tapasztalatot szerezzenek. Nem a tanár veti fel a témát, hanem a gyerek erős késztetést kap arra, hogy a végére járjon a problémának. Az összetett számok módszeres keresése pedig a prímek kiszűrésére vonatkozó eljárások alapja lehet (például Eratoszthenész szitája).

Az indoklás alapján következtethetünk a gyerek valószínűségi szemléletének fejlettségére. A válasz alapján kiderül, hogy érzi-e azt a tényt, hogy ami többféleképpen fordulhat elő, az valószínűbb.

3.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

3.2.1. Számok, műveletek, algebra

A matematikai gondolkodás fejlesztésének kiemelt területe a matematikai tudás gyakorlati alkalmazása. A matematikatanításnak az is feladata, hogy láttassa a tárgy más tudományágakban és a hétköznapokban betöltött nélkülözhetetlen szerepét. Más tantárgyak témáiból és a gyakorlati életből választott példák igazolják a gyerekek számára a matematika hasznosságát. Változatos problémafelvetésekkel kelthetjük fel a tanulók érdeklődését és kíváncsiságát a matematika iránt. Ezért a problémafelvetések témáinak megválasztása körültekintést igényel. A problémamegoldás nehézségét nem csak a matematikai tartalom befolyásolja. Azonos matematikai tartalmú feladatok különböző nehézségűek lehetnek a gyerekek számára, ha más szövegkörnyezetben tárjuk őket a gyerekek elé. Ezért a probléma megoldásának elemzésénél figyelmet kell fordítanunk arra is, hogy mi okozta a tanuló számára a nehézséget. A választott modell, a tanuló által készített rajz informálhat a megértésről, a szövegben megfogalmazott összefüggés felismeréséről vagy félreértéséről. A problémák megoldását segíthetjük vagy éppen nehezíthetjük azzal is, ha javaslatot teszünk vagy felszólítunk valamilyen modell használatára. Ekkor nemcsak a megértést, hanem a kiválasztott modellel való problémamegoldást is ellenőrizni kívánjuk. A sikeres problémamegoldást választható vagy adott modell alkalmazásával akkor várhatjuk el a tanulóktól, ha erre elegendő figyelmet fordítottunk a problémák változatos megoldásával, azok összehasonlításával, a választott megoldási mód előnyeinek vagy hátrányainak megbeszélésével. Az *A27. feladat* többféle matematikai modell alkalmazásával megoldható.

A27. feladat

A virágboltban egy szál nárcisz 60 Ft, a tulipán szálanként 80 Ft-ba kerül.
Mindkettőből ugyanannyit vettünk. 420 Ft-ot fizettünk.

Hány szálát vettünk a virágokból?

◀ Vissza
Tovább ▶

A vizuális megjelenítés segíti a megértést, a kapcsolatok és az összefüggések feltárását, amelyek nélkülözhetetlenek a problémamegoldásnál. Ezért fontos feladat a tanulók modellalkotó képességének fejlesztése. Különbféle modellek segíthetik az összefüggések felismerését, pl. tárgyi tevékenységgel való megjelenítés, reláció, rajzos modell, nyitott mondat, táblázat, szakaszokkal való ábrázolás, számegyenes lehet a támogató eszköz.

Az első feladat megoldása kézenfekvő játékpénzzel való kirakással. Például lerajzolnak a gyerekek egy nárciszt és egy tulipánt, és a rajzokra helyezik a megfelelő összeget. Ezt addig csinálják, amíg eljutnak a 420 Ft kirakásához.

Az absztrakcióra könnyebben képes gyerekek táblázattal is meg tudják oldani a feladatot. Például ilyen táblázatot készíthetnek:

A tulipánok és a nárciszok száma	1-1	2-2	3-3
A nárcisz ára	60 Ft	120 Ft	180 Ft
A tulipán ára	80 Ft	160 Ft	240 Ft
Fizetendő összeg	140 Ft	280 Ft	420 Ft

Az alkalmazott megoldási folyamatban két ismert adatból kiindulva, szisztematikus próbálkozással jutottunk el a feladatban adott összeghez, egyenletesen növelve a fizetendő összeget. Közben kiszámoltunk olyan adatokat is, amelyek az eredeti probléma megválaszolásához nem szükségesek. A kialakult táblázatban felismerhetők az egyenletesen növekvő sorozatok, amelyek folytatásával kiszámított adatok új információt szolgáltatnak.

Például:

- Mire ad választ a táblázat 2. sorának 6. oszlopában található érték?
- Mit tudhatunk meg az utolsó sor 8. oszlopában található adatból?
- Mit jelent a 2. sor 3. oszlopában és a 3. sor 2. oszlopában található számok összege?

Az eredeti probléma megoldásához választhatnak a gyerekek nyitott mondatot is. Így gondolkodhatnak: 1 szál nárcisz és 1 szál tulipán összesen $60 + 80 = 140$ forintba kerül. Azt nem tudjuk, hogy hány szálát veszünk, ezért ezt jelöljük így: $\square$

Annyiszor fizetünk 140 Ft-ot, ahány szál tulipánt és nárciszt kérünk, és ez 420 forintba kerül. Ezt így írhatjuk le művelettel: $140 \times \square = 420$

A nyitott mondat megoldását becsléssel, a becslés kipróbálásával, majd korrekciójával kereshetik, például ilyen lépésekben:

A 140 százasokra kerekített értéke 100, a 420-é 400. A 100-at 4-szer kell venni, hogy 400 legyen. A kipróbálás azt mutatja, hogy $140 \times 4 > 420$, ezért a 4-nél kisebb számmal kell próbálkoznunk. A 3-at kipróbálva, azt találjuk, hogy igaz az egyenlőség $140 \times 3 = 420$.

Ebben a megoldásban célirányosan a kérdés megválaszolására törekedünk. Nem kaptunk más információt, nem tudunk új kérdéseket megfogalmazni, amelyekre a választ könnyedén megtalálhatnánk. Minden új kérdéshez új nyitott mondat felírására és megoldására van szükség. Az *A28. feladat* többféle matematikai modell segítségével megoldható.

A28. feladat

Egy lakótelepen egyforma tízeleletes házak vannak. Minden házban szintenként a lépcsőháztól balra 6, jobbra 8 lakást alakítottak ki. A földszinten üzletek vannak.
Ezen a lakótelepen összesen 420 lakást építettek.

Hány ház van a lakótelepen?

Vissza
Tovább

Az A28. feladathoz jól illik a rajz és a számfeladat vagy a nyitott mondat. Természetesen egyszerűsített rajzot várunk a gyerekektől, a legszükségesebb adatok feltüntetésével. Például:

6 lakás	8 lakás

Többféleképpen gondolkodhatnak. Például: A 420 lakásból ebben a házban összesen 140 lakás van, a lépcsőház bal oldalán 60, a jobb oldalán 80. A többi lakás ($420 - 140 = 280$) a többi házban van. A második házban is 140 lakás van, a többi lakás a harmadik házban található: $280 - 140 = 140$.

Ebben a megoldásban az ismert adatokból kiindulva haladtunk a megoldás felé. Az egyes lépésekben arra kaptunk választ, hogy hány lakás lenne a lakótelepen, ha 1-gyel, illetve 2-vel kevesebb házat építettek volna.

Ugyancsak az összes lakásszámból kiindulva jutnak a megoldáshoz a következő lépéssorozatban: ha mindegyik ház 10 emeletes, és minden szinten ugyanannyi lakás van, akkor egy szinten ennek tizedrésze, azaz: $420 / 10 = 42$ lakás van. Mindegyik házban $6 + 8 = 14$ lakás van egy szinten, ezért annyi ház van, ahányszor a 42-ben megvan a 14. A $42 : 14 = 3$ jelenti a házak számát. Itt két számfeladattal jutottunk a megoldáshoz, és közben egyetlen plusz információt szerezhettünk, azt, hogy szintenként 42 lakás van a lakótelepen.

Ennek a feladatnak a megoldásánál is alkalmazhatják a gyerekek a nyitott mondatot: egy házban egy szinten $6+8$ lakás, tíz szinten 10-szer annyi, azaz $(6 + 8) \times 10 = 140$ lakás van. Jelöljük a házak számát $\square$ -vel. $\square$ házban $\square$ -szer 140, azaz $140 \times \square = 420$ lakás van.

Az A29. feladatban is többféle manipulatív és képi szintű modell felhasználását előhívhatja.

Az A29. feladat megismerését természetesen követi annak megbeszélése, hogy vajon az egyik irányba miért hosszabb az utazási idő, mint a másik irányba. A felvetett kérdésre a gyerekek tapasztalataik alapján kereshetnek választ.

Például:

- Hosszabb úton megy a busz Y-ból X-be.
- Sok az emelkedő, amikor Y-ból X felé halad a busz.
- Egyik irányba gyorsjáratként közlekedik a busz, a másik irányba több helyen megáll.
- Egyik irányba autópályán halad, a másik irányba autóúton.

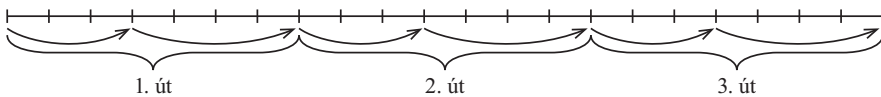
A29. feladat

Egy buszvezető két város között közlekedik. X várostól Y városig 60 perc alatt teszi meg az utat, Y-ból X-be 80 perc alatt jut.

Hányszor fordult a busz vezetője a két város között azon a napon, amelyiken 7 órát vezetett?

 Vissza
Tovább 

A történet egy időszalaggal lehet szemléletessé tenni, amelyen pl. 20 percenként látható a 7 óra beosztása. Ezen jelölhetik a gyerekek az eltelt időt. Például:



Ez az ábra is alkalmas új információk megadására. A gyerekek maguk is feltehetnek és megválaszolhatnak kérdéseket. Például ilyen kérdésekre számíthatunk:

- Hol volt a buszvezető 200 perc vezetés után?
- Hol volt a buszvezető, amikor ezt mondta: „Ma már 3 órát vezettem”?
- Mennyi időt vezetett már, amikor az Y városból indult X városba?
- A nap folyamán mikor lehetett alkalma a buszvezetőnek pihenni?

A fenti ábra jól tükrözi azokat a matematikai modelleket, amelyek a valóságtartalmú probléma megoldásának segédeszközei lehetnek. A nyilakról egy váltakozó különbségű sorozat olvasható le: 60, 140, 200, 280, 340, 420...

A kapesos zárójel két nyilat fog össze, és szemlélteti a két nyíl helyett egy nyíl típusú feladatok matematikai tartalmát. Ezek alapján egyenletesen növekvő sorozat tagjait olvashatjuk le: 140, 280, 420... Ezeknek a számoknak az ad értelmet, hogy a feladatra vonatkoztatjuk őket, elmondjuk, hogy melyik szám miről informál bennünket.

Az időszalag jól tükrözi a folyamatosságot, segítségével adott időpontban a buszvezető tartózkodási helyéről is lehet közelítő képet alkotni.

Az *A30. feladat* annak lehetőségét villantja föl, hogy manipulatív szinten, kézbe vehető eszközök segítségével modellezzék a tanulók a feladat matematikai tartalmát.

A30. feladat

A és B város 420 km-re van egymástól. A két városból egyszerre indul el a másik városba egy-egy autó. Az A városból induló 60 km-t, a B városból induló 80 km-t tesz meg óránként.

Mikor és hol találkoznak?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

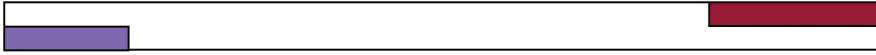
A feladathoz jól illik egy 42 cm-es papírcsík és a színesrúd-készlet lila és bordó rúdjai. Ezekkel az óránként megtett utakat jelölhetik a gyerekek.



Milyen információ leolvasására nyújt ez a kirakás lehetőséget?

Gondolatban követik a gyerekek az autók útját.

Elképzelik, hogy 1 óra elteltével melyik autó mekkora utat tett meg, éppen hová jutott, és jól látják, hogy még mekkora út van a két autó között. A $420 - 60 - 80$ vagy a $420 - (60 + 80)$ számfeladatok mindegyikére értelmes magyarázatot találhatnak.



Azt is könnyedén leolvashatják erről a képről, hogy a teljes útból melyik autónak mennyi van hátra. Még olyan kérdésre is megtalálhatják a választ, hogy vajon hol jártak az autók fél órával ezelőtt.

Ha az autókkal a teljes utat bejárják, ismét sok információhoz juthatnak.



Egyrészt láthatják, hogy találkozás után hogyan távolodnak az autók egymástól. Jól látszik, hogy az A városból induló autó 7 óra alatt teszi meg a teljes utat, míg a B városból indulónak 5 óránál kicsivel kell csak több idő. Az ügyesebb gyerekek azt is kiszámolhatják, hogy pontosan mennyi idő alatt jut el az autó a B városból A-ba.

Az utolsó két feladat mennyiségi adatokat tartalmaz, ezek megoldása többnyire több nehézséget okoz a gyerekeknek. Ezért külön figyelmet fordítunk harmadik osztályban a mozgásos szöveges feladatok tárgyalására, amelyek modelljeként a színes rudak és a papírcsíkok mellett használhatunk szakaszos ábrázolást is.

A fent bemutatott megoldásokból kitűnik, hogy a kirakások, ábrázolások mindegyikéről leolvashatók a feladatok megoldása mellett további információk is, amelyeknek nagy előnye, hogy erősítik a matematika és a valóság kapcsolatának érzékelését. Az *A31. feladatban* a képen látható dobókockákon szereplő pöttyök száma ugyan nem része a feladatnak abban az értelemben, hogy azokról bármit le kellene olvasni, ugyanakkor a kép több, mint egyszerű illusztráció: segít elképzelni a megoldáshoz szükséges matematikai mennyiségeket és viszonyokat.

A31. feladat

Egészítsd ki a mondatokat a helyes számokkal!

1. Egy dobókockának összesen oldala van.

2. Egy dobókockán összesen pötty van.

3. Két dobókockán összesen pötty van.

4. A két dobókocka pöttyei közül nem látszik a képen.



Vissza
Tovább

A 3–4. osztályos tanulók számára gyakran tűzünk ki olyan feladatokat, amelyekkel a hétköznapi életük során valóságos szituációkban találkozhatnak. Ezek megoldásakor szükséges a már tanult matematikai ismereteik alkalmazása, sokféle képességük mozgósítása. A mindennapi történetekből merített problémafelvetéseket a gyerekek közel érezhetik magukhoz, hiszen a saját életük pillanatait, tevékenységeit keltik életre. Az ilyen történetek lehetővé teszik, hogy a gyerekek beleéljék magukat adott szituációkba, és a mindennapokban alkalmazható, könnyen aktivizálható ismereteket szerezzenek. A módszerekben változatos problémafelvetések alkalmat kínálnak az aktív tanulásra, az összefüggések felfedezésére, a tanulókat gondolkodásra készítetik.

A valóságos, a gyerekek életéből, környezetéből vett problémafelvetések lehetőséget teremtenek számukra, hogy megérezzék a matematika modellszerepét a gyakorlati élet, valamint a tudományok problémáinak megoldásában. Ehhez járulnak hozzá a mennyiségek mérését igénylő tevékenységek, valamint a vásárlásról szóló feladatok.

A gyerekeknek is lehet gyakori feladatuk a vásárlás. Ehhez a tevékenységhez sokféle probléma tartozhat. Nem maradhatnak ki a vásárolt áruk fizetésével járó problémák, vagy az áruk szállítása, több áru tömegének becslése (A32. feladat).

A32. feladat

Tomi reggel az iskolai büfében egy kiflit és egy sajtos pogácsát vásárolt, 75 Ft-ot fizetett.
 A pogácsa kétszer annyiba került, mint egy kifli.

Mennyibe kerül egy kifli az iskolabüfében?

A legördülő menü segítségével egészítsd ki a mondatot!

Egy kifli ára Kattints ide! Ft.

Mennyibe kerül egy sajtos pogácsa az iskolai büfében?

A legördülő menü segítségével egészítsd ki a mondatot!

Egy sajtos pogácsa ára Kattints ide! Ft.




Legördülő lista szövege: 15 / 25 / 50 / 75

A probléma megoldása sokféle képességet fejleszt. Egyrészt szükség van valóságtartalmú adatok becslésére, szükség lehet mennyiségek mérésére is (pl. Milyen nehéz 1 doboz tojás?). Néhány adat hiányos, illetve ismeretlen lehet a gyerekek előtt, ezeket az adatokat pótolniuk kell. Például: Hány liter tej van egy kartonban? Hány tojás van egy dobozban? Az adatok pótlásakor tapasztalhatják a gyerekek, hogy nem egyértelmű a feladat megoldása, hiszen többféle csomagolásban kaphatunk tojást. Így a fizetendő összeg függ attól, hogy hány tojást vásárolunk. Ez viszont nem befolyásolja a szatyrok nehézségét, hiszen a tojásokat nem helyezzük szatyorba.

A mindennapokban gyakran kerülünk döntést igénylő helyzetbe. Általában többféle lehetőség adódik egy probléma megoldására, és a mi választásunkon múlik, hogyan oldjuk meg. Választásunkat sok tényező befolyásolhatja, a megoldás különféle feltételektől függhet. Ezért gyakran kell a matematikaórán is olyan helyzetbe hozni a gyerekeket, amelyeknél nekik kell meggondolni a lehetséges feltételeket, és többféle feltétel teljesülése esetén ők választhatják ki a leginkább reális megoldást.

A gyerekek mindennapjaihoz hozzátartozik az olvasás. Olvasási élményeik megbeszélése mellett kínálkozik az is, hogy ötleteket találjanak technikai problémák megoldására. Ez vonatkozhat a könyvek rendezésére, adott könyvespolcon való elhelyezésükre, könyvtári kölcsönzésre vagy éppen egy könyv elolvasásának időbeli ütemezésére (*A33. feladat*).

A33. feladat

Andris nagyon szeret olvasni. Minden este elalvás előtt egy órát olvas. Egyik kedvenc könyve Fekete Istvántól a Kele. Ezt már harmadszor kölcsönözte ki a könyvtárból, de egy hét múlva vissza is kell vinnie.

A 270 oldalas könyvnek túl van már a felén, de még nem jutott el a kétharmadáig.

Legalább hány oldalt olvasson el a könyvből naponta, hogy be tudja fejezni a könyv olvasását egy hét alatt?

Andris feljegyezte, hogy mely napokon mikor van nyitva a könyvtár.

Hétfőn:	10:00–12:00 és 15:00–16:30
Kedden:	14:30–18:30
Szerdán:	11:00–17:15
Csütörtökön:	9:30–11:30 és 15:15–18:00
Pénteken:	10:00–13:30

Andris általában kora délután, fél 2 és 2 óra között vagy este 5 óra után tud könyvtárba menni az iskolai elfoglaltságai és az edzései miatt.

Mely napokon tudja visszavinni Andris a könyvet a könyvtárba?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A feladat első része arról informál bennünket, hogy a könyvből kevesebb van hátra 135 oldalnál, de még több mint 90 oldal. Ha ezt adott idő alatt akarja valaki elolvasni, konkrétabb adatra van szükség. Így csak azt lehet megmondolni, hogy mennyit kell egy nap alatt elolvasni, ha 134, 133, ..., 91 oldal van hátra a könyvből. Azt is megmondolhatjuk, hogy mégis 44 megoldása a feladatnak, hiszen minden nap ugyanannyit olvas Andris, így ha 1 oldallal növekszik a naponta elolvasott oldalak száma, akkor 7 oldallal fog nőni az 1 hét alatt olvasott oldalak száma. Így a probléma lehetséges megoldásait érdemes táblázatba gyűjteni:

Az elolvasatlan oldalak száma	91	92–98	99–105	106–112	113–119	120–129	130–134
1 nap alatt célszerű ennyit olvasni	13	14	15	16	17	18	19

Az is megmondolható, hogy mely oldalszámok esetén kell valóban a hét minden napján ugyanannyit olvasnia Andrisnak, és mely esetekben marad az utolsó napra kevesebb oldal.

A feladatban felvetett második kérdés időintervallumok összevetését és közös részének meghatározását igényli. A gyerekek számára nagy segítséget jelent a könyvtár nyitva tartásának időszalagon való ábrázolása.

	9	10		11		12		13		14		15		16		17		18	
	30 45	15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45		15 30 45	15
H																			
K																			
Sz																			
Cs																			
P																			

Azt is ábrázolhatjuk egy időszalagon, hogy Andris mikor tud menni könyvtárba, és ezt a csíkot kivághatjuk és végighúzhatjuk a táblázaton.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

A csík mozgatásával könnyen leolvashatják a gyerekek a lehetséges megoldásokat.

A tárgyi eszközök megfelelő megválasztása, használata könnyíti a gyerekek számára a „matematizálás” tevékenységét. Annak a fejlesztése, hogy a gyerekek a köznyelven megfogalmazott problémákat le tudják fordítani a matematika nyelvére, fontos és nehéz feladat. A fordítást az eszközök és a jól választott képek támogatják. A tevékenységre javasolt eszközök szükség esetén tárgyhiúk (pl. konkrét tárgyak mérése, számlálása, játékpénz használata), más esetben megjelennek képek, ábrák (pl. szakaszos ábrázolás) vagy az absztrakcióhoz vezető elvontabb modellek (pl. színes rudak, táblázatok). Nem szabad siettetni az eszközök elhagyását, fontos, hogy gyakran igényeljük az elgondolás szemléltetéssel való indoklását. Az algoritmusok alkalmazása előtt várjuk el a gyerekektől pl. a műveletek előre becslését, így tudják ellenőrizni számolásuk megbízhatóságát, felismerhetik az elkövetett hibákat.

A természeti, földrajzi, éghajlati adatokat is tartalmazó, vagy a kirándulással, utazással, sporttal, egészséges életmóddal kapcsolatos feladatok érzékeltetik, hogy a matematikai ismeretek más szakmák, az élet különböző területein felmerülő problémák megoldásának is hasznos eszközei (A34. feladat).

A problémáknak olyan életszerű helyzeteket kell felvetniük, amelyekkel a gyerekek nap mint nap találkozhatnak, így könnyű lesz számukra a szituáció elképzelése. A témaválasztásnál nem matematikai problémákhoz keresünk valósághoz közeli szituációkat, hanem a hétköznapi életben gyakran átélt valóságos problémákat fogalmazzuk meg, és ezek átgondoltatásával hozzájárulunk ahhoz, hogy a gyerekek könnyebben eligazodjanak a mindennapi életben.

A34. feladat

A táblázat a budapesti hidakról mutat adatokat.

a) **Hány méter hosszú a legrövidebb híd?** Egészítsd ki a választ a legördülő menüből!

A legrövidebb híd méter hosszú.

b) **Válaszd ki** a legördülő menüből a legszélesebb hidat!

c) **Egészítsd ki** a hiányos mondatot! **Válaszd ki** a legördülő menüből a megfelelő hidat!

Az Árpád híd körülbelül fele olyan hosszú, mint a

d) **Jelöld meg** azokat a hidakat, amelyek szélessége tízesekre kerekítve 30 m!

☐ Lánchíd

☐ Margit híd

☐ Szabadság híd

☐ Erzsébet híd

☐ Petőfi híd

☐ Árpád híd

☐ Lágymányosi híd

☐ Megyeri híd

☐ Vissza
☐ Tovább

Híd	Körülbelüli hossz (m)	Körülbelüli szélesség (m)
Lánchíd	380	15
Margit híd	607	25
Szabadság híd	334	20
Erzsébet híd	380	27
Petőfi híd	514	26
Árpád híd	928	35
Lágymányosi híd	494	31
Megyeri híd	1861	34

Legördülő lista szövege:

380 / 607 / 334 / 514 / 928 / 494 / 1861

Lánchíd. / Margit híd. / Szabadság híd. / Erzsébet híd. / Petőfi híd. / Árpád híd. / Lágymányosi híd. / Megyeri híd.

Lánchíd. / Margit híd. / Szabadság híd. / Erzsébet híd. / Petőfi híd. / Árpád híd. / Lágymányosi híd.; / Megyeri híd.

A problémák megoldása önállóan, párban vagy csoportban lehetőséget ad a megszokottól eltérő feladatok és a valóságban előforduló helyzetek áttekintésére, megoldási módok megismerésére, ötletek, módszerek gyűjtésére, a problémamegoldáshoz nélkülözhetetlen kreativitás fejlődésére. A csoportos tevékenységek során a gyerekek természetes módon tanulják

meg az együttélés szabályait, megtapasztalják a jó érzést, ha segítenek a rászorulóknak. Sokszor nyílik lehetőségük véleménynyilvánításra, elgondolásaik megismertetésére másokkal. Az elképzelések ütköztetése, megvitatása neveli őket mások véleményének tiszteletben tartására, a társaik iránti toleranciára.

3.2.2. Relációk, függvények

Az 1–2. osztályban megfogalmazott követelményekre épülve hasonló típusú feladatok és követelmények támaszthatók 3–4. osztály végére. A sorozatok esetében összetettebb szabályok felismerése a követelmény, a hétköznapi tárgyak és jelenségek matematikai jellemzőinek átkódolásában nagyobb jártasság feltételezhető. Például az idővel kapcsolatos jelenségek számokká alakítása rutinszerűvé válhat, mert például a hét napjainak neve és az, hogy a hét hányadik napjáról van szó, ebben az életkorban már általában ismeret jellegű tudáselemként van meg, és nem szükséges a hétfőtől indulva, a számlálás gyakorlatához hasonló stratégiát alkalmazni.

Rekurzív számsorozatokkal a tanulók az 1–2. évfolyamon is találkoznak (pl. olyan sorozattal, ahol a soron következő tag az előző két tag összege), azonban számos lehetőség van olyan hétköznapi problémák megfogalmazására, amelyekben rekurzív sorozatok kerülnek elő. Például egy $2/4$ -es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal? Majd ezt követően: egy $3/4$ -es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal?

Az *A35. feladat* a klasszikus Fibonacci-sorozat szöveges változata, a kevésbé valószínű nyúlzaporulat helyett egy lerajzolható, a mesevilágot idéző megszövegezéssel:

Az *A36. feladat* az induktív gondolkodás segítségével, egyes hétköznapi tudáselemek mozgósításával oldható meg.

Az ilyen feladatok (hozzávéve az *A37. feladatot* is), bár kevésbé megszokottak, a gondolkodás magas szintű összetevőit mérik, amelyek kapcsolatosak a falszifikációs következtetési elvvel.

A35. feladat

Amikor Tündérország legöregebb fáját elültették, a fának egy ága volt. Egy év múlva még mindig csak egy ága volt, de utána minden évben minden ágából kihajtott egy új ág.

Hány ága volt a fának két év múlva?

Három év múlva?

Négy év múlva?

Nyolc év múlva?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A36. feladat

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?

Kattintással jelöld meg, hogy melyik összefüggések illenek a táblázatra és melyikek nem!

△	búza	ház		kincs
□	b	h	f	

☐ = △ betűiből elhagyjuk azokat, amelyek nem kezdőbetűk

☐ Illik.

☐ Nem illik.

☐ mássalhangzó

☐ Illik.

☐ Nem illik.

☐ = △ kezdőbetűje

☐ Illik.

☐ Nem illik.

☐ betű

☐ Illik.

☐ Nem illik.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A37. feladat

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?

⊙	lent	mellett		mögött
□	lefelé	mellé	alá	

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A feladat tartalmi szempontból nyelvtani, azonban a nyelvtenban működő matematikai törvényszerűségeket illusztrálja. Ezáltal a matematikai modellalkotás és a hétköznapiokban szerzett ismeretek közötti kapcsolat erősödik, és ez kifejezett célja az olyan matematikaoktatásnak, amely egyszerre kívánja szem előtt tartani a matematikai gondolkodás fejlesztését és a matematikai tudás transzferálhatóságát.

A bináris relációk tudatosításának számtalan eszköze lehetséges. Számos tantárgyban bevett feladattípus az illesztéses zárt feladat, amikor két halmaz elemei között kell megtalálni a kapcsolatot, és előfordulhat, hogy az egyik halmaz valamely eleméhez a másik halmaz több eleme is hozzáilleszthető (*A38. feladat*). A napirenddel, táplálkozással, öltözködéssel kapcsolatos kérdések lehetőséget nyújtanak adatpárok képzésére, ahol az elő- és utótag közötti kapcsolatban lényeges a sorrend is és a köztük fennálló viszony is.

Az 1–2 osztályos követelmények és feladattípusok alkalmazásával, ám bővebb számkörben mozogva tudunk autentikus problémákat definiálni. Az adatpárok mellett adathármasokban felismert összefüggések is elvárhatók. A rendszerezési képesség fejlesztésére alkalmas feladatok között szerepelnek a kétszemponútú szelektálást igénylő feladatok. Dolgok adott sokaságát két szempont egymásra vetítésével rendszerezni már 3–4. osztályban is lehetséges, elsősorban manipulatív és képi szintű feladatokkal, amelyek tartalma a mindennapi életből ismerős a tanulók számára. A kétszemponútú osztályozás egyúttal a korrelatív gondolkodás fejlesztésének eszköze is, hiszen a két szempont egymásra vetítésével előálló kétdimenziós rendszerben a két szempont közötti esetleges összefüggés is nyilvánvalóvá válik.

Oktatásmódszertani szempontból az ilyen feladatoknál javasolható a tanulók képességszint szerinti heterogén csoportokban való együttműködése, amelynek során a tanulók megismerik egymás ötleteit. Különösen fontos ez az olyan autentikus feladatoknál, amelyeknek nincs egyetlen, jól definiált megoldása, hanem a megoldás sokszor maga a gondolkodási folyamat, amelynek során matematikai modellek alakulnak és változnak. A fordított arányosság elve is megjelenik 3–4. osztályban, elsősorban a tanulói tapasztalatokra, próbálgatásra épülő feladatokban (*A39. feladat*).

A fordított arányosság megjelenésének másik lehetséges terepe a területszámítással kapcsolatos. Természetesen nem képlettel felírt területszámításra gondolunk (*A40. feladat*).

A38. feladat

Technikaórán a 4. osztályosok különféle síkidomokból mozaikképet készítenek.

Segíts kiválogatni azokat a lapokat, amelyeknek van derékszögük és amelyeknek nincs!

A kiválasztott lapok képét húzd a megfelelő halmazba!








Van derékszögük

Nincs derékszögük

Vissza
Tovább

A39. feladat

Az osztálykiránduláson a gyerekek egy pónilóval húzott kis hintóval szerettek volna utazni. A póni gazdája azt mondta, 1200 Ft-ot kell fizetni egy negyedórás menetért, függetlenül az utasok számától.

Milyen kérdéseket tehettek még föl a tanulók a hintó kibérlésével kapcsolatban?

Kattintással jelöld, hogy melyik kérdés illik a helyzethez és melyik nem!

Hányan férnek el összesen a hintóban?

Illik.
Nem illik.

Mennyi az éves bevétele a póni gazdájának?

Illik.
Nem illik.

Fél óra hintózásért dupla árat kell fizetni?

Illik.
Nem illik.

Hány liter vizet iszik a póni egy nap?

Illik.
Nem illik.

Töltsd ki a táblázatot! Mennyibe kerül egy menet a hintóval tanulónként, ha egyedül, vagy ketten, vagy hárman, illetve négyen együtt utaznak?

Résztevők száma	1 tanuló	2 tanuló	3 tanuló	4 tanuló
Egy tanuló részvételi díja	1200			

Vissza
Tovább

A40. feladat

Anna 24 egyforma papírdobozt szeretne szépen elrendezni a szobájában. Ha egymás tetejére pakolja őket, akkor magas lesz az oszlop, ha pedig mindet egymás mellé rakja, akkor sok helyet foglalnak el a szőnyegen.

Milyen elrendezést javasolnál? Hány doboz kerüljön egymás mellé, és milyen magasra pakolja Anna a dobozokat? Töltsd ki a táblázatot!

Egymás melletti dobozok száma	1	24	2		
Egymás fölötti dobozok száma	24	1			

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A korrelatív gondolkodás fejlesztésére alkalmasak az olyan feladatok, ahol két számszerűsíthető tulajdonság nem determinisztikusan függ össze, hanem egy tendencia rajzolódik ki. Az A41. feladatban a tanulók akár saját adatait is felhasználhatják.

A41. feladat

A védőnők megmérték az osztály tanulóinak testmagasságát és testsúlyát. Néhány adatot a következő táblázatban láthatsz. Két adatot azonban valaki véletlenül kiradírozott.

Milyen adatok szerepelhettek az üres helyeken? Töltsd ki a táblázatot!

Testmagasság (cm)	135	142	127		140
Testsúly (kg)	31	36	28	40	

[Vissza](#)

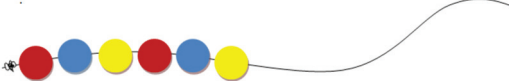
[Tovább](#)

A konkrét adatok egy viszonylag tág intervallumból kerülhetnek ki, de ennél jóval fontosabb az adatsorok közötti összefüggés explicit megfogalmazása, amely a pozitív korreláció gyermeknyelvi leírása lehet. Még ennél is lényegesebb azonban annak tudatosítása, hogy a konkrét értéket nem tudjuk az összefüggés alapján meghatározni.

Végül az *A42. feladat* jön, amely ismerősnek hat: a *G60. feladat* is képi stimulust alkalmazott egy sorozat szabályszerűségének bemutatásához. Itt egyrészt a szabályszerűség könnyebben felismerhető, másrészt már verbális kóddal adnak választ. Az alkalmazási tudásdimenzióhoz tartozást indokolja, hogy a gyerekek szinte méretarányos képhez, akár a képernyőre mutattva, a gondolkodást mozgásos tevékenységgel kiegészítve kereshetik meg a választ.

A42. feladat

Kati gyöngyöt fűz. A gyöngyök színe szabályosan követi egymást.



◀

1. Milyen színű lesz balról a tizennyolcadik gyöngy, ha Kati követi a szabályt?
Kattints a megfelelő színre! Válassz!

◀

2. Kati, követve a szabályt, összesen 40 darab gyöngyöt fűzött fel.
Hány darab piros gyöngyöt használt fel?
Kattints a helyes számra! Válassz!

◀

3. Egy nyaklánc összesen 30 darab gyöngyből áll.
Hány teljes nyakláncot tud legfeljebb készíteni Kati, ha 25 darab piros, 25 darab kék és 25 darab sárga gyöngye van?
Kattints a helyes számra! Válassz!

◀ Vissza

Tovább ▶

3.2.3. Geometria

Konstruálások

A 3. évfolyamon a képességfejlesztési feladatok közül előtérbe kerül az alkotó gondolkodás, a formalítás, a térlátás fejlesztése. Az alkotások létrehozása közben fejlődik a szövegértés a tulajdonságok kifejezésével, a megfigyelőképesség, az emlékezőképesség. A konkrét alakzatok tulajdonságainak megfigyelésével, kifejezésével fejlődik az absztrahálóképesség.

Az *A43. feladat* több matematikai területhez is kapcsolható, hiszen van benne geometriai konstrukció, maradékos osztás és elképzelhető akár táblázattal felírt szabálykeresés feladataként is.

A43. feladat

Peti az építőkocka-készletéből 3 ugyanolyan magas tornyot szeretne építeni.
A készlet 25 darab, egyforma méretű fakockát tartalmaz.

Számjegyekkel egészítsd ki a mondatot!

Peti a kockákból három, legfeljebb kocka magas tornyokat tud építeni.



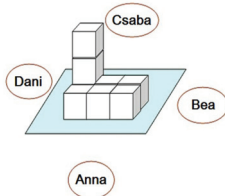
Vissza
Tovább

4. évfolyam végére az alkotások létrehozása a megadott feltételek figyelembevételével, ezek ellenőrzésével egészül ki. Fontossá válik a rész és egész viszonyának megértése a megfigyelések elemzése, megfogalmazása, a tanult matematikai szaknyelv elemi használata. Az alkotások létrehozása fejleszti a kombinatív gondolkodást. A teljességre törekvés a cél, s a megalkotott alakzatok rendszerének felépítése.

A felső tagozat fejlesztési feltételeként a kezdő szakasz végére szükséges testek építése modellről és adott feltételek szerint, illetve síkidomok előállítására tevékenységgel megadott feltételek szerint. Geometriai tulajdonságok felismerése, alakzatok kiválasztása, szétválogatása a felismert tulajdonságok alapján. Élek, csúcsok, lapok felismerése, számbavétele egyszerű testeknél, oldalak, csúcsok felismerése, számbavétele egyszerű sokszögeknél. Téglatest, kocka, téglalap, négyzet felismerés összkép alapján a testek, síkidomok különféle helyzetében. Téglalap, négyzet, téglatest, kocka tanult tulajdonságainak felsorolása, bemutatása modell segítségével. Az *A44. feladat* példa a térszemlélet fejlesztésére, a rész és az egész viszonyának megfigyelésére.

A44. feladat

Négy gyerek fehér kiskockákból épített egy testet.
Körbeülték, és négy különböző oldalról nézve lerajzolták, hogy mit látnak. Szerinted melyik gyerek mit láthatott?
Húzd az ábrákat a megfelelő helyre!




Csaba


Bea


Anna

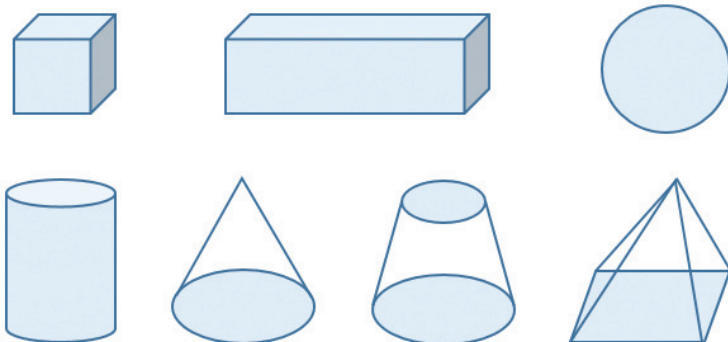

Dani

 Vissza
Tovább 

Példák formafelismerésre, alakzatok tulajdonságainak felismerésére, állítások igazságértékének meghatározására:

Párban játsszatok!

Válogassatok ki olyan testeket, amelyeneket a képen láttok! 10 kártyából felváltva húzzatok! A kártyán lévő állítást úgy egészítsétek ki, hogy felmutattok egy testet, amelyre igaz. (A játékot játszhatjátok más szabállyal is. Pl. Úgy egészítsétek ki az állításokat, hogy ne legyenek igazak!)

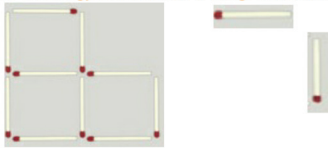


Az A45. és A46. feladatok az eDiA rendszerben megvalósítható geometriai feladat-kitűzés példáit nyújtják.

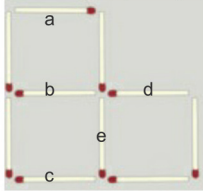
A45. feladat

Attila és Jóska gyufaszálakból a bal oldalon látható ábrát rakták ki, majd feladványokat mondtak egymásnak.

a) Attila feladványa: Helyezz el még két gyufaszálát az ábrán úgy, hogy négyzetet kapj! A jobb oldali gyufaszálak elmozdíthatók! **Segíts** Jósának! **Hová tegye a gyufaszálakat? Húzd a jobb oldali gyufaszálakat a megfelelő helyre!**



b) Jóska feladványa: Vegyél el egy gyufaszálát az ábrából úgy, hogy egy téglalap és egy négyzet maradjon! **Segíts** Attilának! **Válaszd ki a legördülő listából annak a gyufaszálnak a betűjelét, amelyikkel a feladvány megoldható! Válassz!**



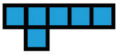
[Vissza](#) [Tovább](#)

Legördülő lista szövege: a / b / c / d / e; f / a és b / b és e / d és e / c és d

A46. feladat

Tomiék négyzet alakú padlólapokkal burkolják a konyhát. A burkolólapok nagy része fehér, de van közöttük 5 db ugyanolyan méretű kék lap. Tomi anyukája azt szeretné, hogy a mesterek a konyha közepén az 5 db kék burkolólapból egy sokszöget rakjanak ki.

Az alábbi sokszögek közül **melyik** rakható ki az 5 db burkolólapból?
Válaszd a sokszögek mellett az Igen.-t, vagy Nem.-et!

	☐ Igen.	☐ Nem.
	☐ Igen.	☐ Nem.
	☐ Igen.	☐ Nem.
	☐ Igen.	☐ Nem.
	☐ Igen.	☐ Nem.

[Vissza](#) [Tovább](#)

Transzformációk

A 3–4. évfolyamon az alakazonosítás mellett a változás és változatlanóság felismerésével, tudatosításával alapozódik az általánosítás a transzformációk területén. A ritmus, a periodikusság felismerése, a szimmetriák megfigyelése és követése a megfigyelőképesség fejlesztését célozza. Fontos a megfigyelt alakzatokról állítások önálló megfogalmazása, illetve adott állítások igazságának megítélése.

A továbbhaladáshoz szükséges fejlesztései feltételek között fontos a „hasonló” és az „egybevágó” kapcsolat felismerése, a hasonlóság és az egybevágóság képi fogalmának alapozottsága, síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, elforgatás) végrehajtása másolópapír segítségével, a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összetettebb alakzatok esetén is (A47. feladat). Az A48. feladatban egy példa látható a hasonlóságra, nagyított kép előállítására.

A47. feladat

Kata és Éva most tanulták matematikaórán az eltolás, forgatás, tengelyes tükrözés fogalmakat. Délután a babáikkal játszva kipróbálták, mennyire emlékeznek a tanultakra. Kata megfigyelte, hogy Éva hogyan helyezte el a babáját, majd Éva megváltoztatta a baba helyzetét. Ekkor Katának meg kellett mondania, hogy eltolta, forgatta vagy tükrözve tette le Éva a babát.

Válaszd ki a legördülő menüből a megfelelő szót!

A baba eredeti helyzetben

A baba megváltoztatott helyzetben

		Válassz!
		Válassz!
		Válassz!

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: Eltolás. / Forgatás. / Tengelyes tükrözés.

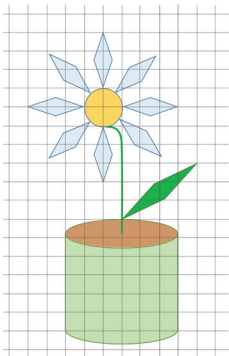
A48. feladat

Amit az életben hasonlónak mondunk, matematikai értelemben nem biztos, hogy az.
 A geometriában két dolog akkor hasonló, ha csak méretükben különböznek.
 Geometriai értelemben melyek hasonlóak és melyek nem?
 Válassz ki a megfelelő választ!

 Válassz!	 Válassz!
 Válassz!	 Válassz!

Vissza
Tovább

A témakör fejlesztési feladatainak fontos eleme a „hasonló” és „egybevágó” kapcsolat felismerése mellett a síkbeli egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükrökép megalkotása másolópapír segítségével, illetve nagyított kép előállításával négyzetrács felhasználásával.



Anyák napjára szép ajándékot készíthetsz.
 Keress egy erős papírdobozt!
 A rajzot nagyítsd fel kétszeresére,
 és ragaszd a dobozka tetejére!
 A doboz jó lesz varródoboznak.

Tájékozódás

A kezdő szakaszban képességfejlesztési feladat a térbeli tájékozódás továbbfejlesztése, információk megértése, információ-közlés szavakkal, jelekkel, a helymeghatározás képességének fejlesztése. Irányra, méretre, szomszédosságra való emlékezés.

A további fejlesztéshez szükséges, hogy a tanulók saját környezetükben képesek legyenek eligazodni (utca, házszám, emelet, ajtó, irány, távolság), egyszerű térképvázlatokat értelmezni, illetve készíteni az irány és méretek közelítő, valamint a szomszédosság pontos megjelölésével. Tudjanak tájékozódni vonalon, síkban, térben egy, két, illetve három adat segítségével.

Autentikus tevékenységre építő feladatként a következő példát adjuk:

Párban dolgozzatok! Készítetek térképvázlatot iskolátok környezetéről! Jelöljétek be az iskola, a boltok, a lakásokat helyét! Ha van a környéken parkoló, vasútállomás, sportpálya, könyvtár, mozi, színház..., akkor azt is jelöljétek meg! Adj meg egy útvonal leírást, amit a párodnak követnie kell! Az ő dolga, hogy megmondja, hová jutott. Aztán ő adjon neked egy leírást, és te kövesd azt! Hová jutottál?

Az A49. feladat egy számítógépalapú feladatváltozatra nyújt példát.

A49. feladat

Zoli négyzetrácsos lapra Edit irányításával ábrát rajzol. A következő rövidítéseket használják:

J = jobbra	JF = jobbra fel
B = balra	JL = jobbra le
L = le	BF = balra fel
F = fel	BL = balra le

Egy lépés a négyzetrács egy oldalának felel meg.
A JF, JL, BF és BL lépéseknél egy lépés a négyzet átlójának felel meg.

Például: BL2 jelentése: 

Zoli a megjelölt ponttól indult.

A következő lépéseket tette meg:
J2, JL2, L2, BL4, J4, L2, B6, F2, JF4, F1, BF1, BL1, B2, F1, JF2

A keletkezett kép egy számot ábrázol. [Melyik ez a szám?](#)

Válaszodat **írd** be az üres keretbe!

[Vissza](#) [Tovább](#)

Mérés

A 3–4. évfolyamon folytatódik a tapasztalatgyűjtés a mennyiségi jellemzők felismerése, megkülönböztetése, a különbségek észrevétele terén. Fejlesztési feladat a becslőképeség alakítása, a pontosság mértékének kifejezése gyakorlati mérésekben, egyszerű mennyiségi következtetések végzése. Fontos a matematika és a valóság kapcsolatának építése. A gyakorlati mérések segítik a tájékozódást a világ mennyiségi vonatkozásaiban.

A tanulóknak a további évek fejlesztésének érdekében biztonsággal kell mérniük alkalmi és szabvány egységekkel. Gyakorlatban végrehajtott mérések alapján a mértékegység és mérőszám kapcsolatát képesek átlátni, a tanult szomszédos mértékegységekkel gyakorlati mérésekhez kapcsolva, illetve ilyenek felidézése nyomán át- és beváltásokat végezni, a téglalap (négyzet) területének és területének megállapítását méréssel és számítással meghatározni.

Az *A50. feladat* egy példát ad téglalap alkotására, területének meghatározására. További ötletet mutat az *A51. feladat* olyan feladatkitűzésre, amely tevékenységközpontú, és közvetlenül kapcsolódik a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz:

A50. feladat

Egy téglalap alakú helyiség szélessége 6 méter, a hossza 9 méter. A padlót négyzet alakú járólapokkal borítják, melynek egy oldala 30 cm.

1. ábra: a kiválasztott burkoló járólap 2. ábra: a helyiség alaprajza




A legördülő listából **válaszd ki** a megfelelő számot!

Hány járólap kerül egy sorba a rövidebbik oldal mentén?

A rövidebbik oldal mentén járólap kerül egy sorba.

Hány járólap kerül egy sorba a hosszabbik oldal mentén?

A hosszabbik oldal mentén járólap kerül egy sorba.

Hány járólap szükséges a helyiség padlójának burkolásához?

A helyiség burkolásához járólap szükséges.

[Vissza](#)
[Tovább](#)

Legördülő lista szövege:

10 darab / 20 darab / 30 darab / 40 darab
 20 darab / 30 darab / 40 darab / 50 darab
 300 darab; 400 darab; 600 darab; 800 darab

A51. feladat



A szél becsapta az ablakot és összetört egy ablaküveg.
A gondnok megmérte: 1253 mm hosszú és 1245 mm magas üveget kell a keretbe bevágni.
Írd a válaszdobozokba a megfelelő számot!

a) **Add meg** a méreteket **centiméter-pontossággal!**
Hosszúsága: cm. Magassága: cm.

b) **Hány centiméter az üveglapot keretező szegélylécek hosszúsága összesen?**
A szegélylécek hosszúsága cm összesen.

c) **Hány darab 1 cm oldalhosszúságú négyzettel tudnád lefedni az üveglapot?**
Az üveglapot darab 1 cm oldalhosszúságú négyzettel tudnám lefedni.

 **Vissza**
Tovább 

3.2.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A 3–4. évfolyamon az adatok lejegyzésének illetve leolvasásának egyre tudatosabb volta válik hangsúlyossá. 4. osztály végére a gyerekek tudnak adatokat elrendezni sorozatba, táblázatba, ábrázolni tudják azokat grafikonon, sorozatból, táblázatból, grafikonról adatokat visszaolvasnak, találnak az egész adat-együttest jellemző adatokat (pl. a nagyság szerinti középsőt; a legnagyobb, legkisebb adatokat, ezek távolságát; a leggyakoribb adatot). Ki tudják számítani az adatok átlagát. Ez a téma rengeteg lehetőséget nyújt realisztikus feladatok megoldására, ha figyelemmel vagyunk az adatok megválasztására.

Realisztikus problémák kitűzését és megoldását gyakran a táblázatok elemzésének képességével vizsgáljuk. Például:

Gabi, Béla, Pista és Jutka nagyon jó barátok. Szeretnek kártyázni, ezért havonta legalább egyszer játszanak. Egy olyan játékot szoktak játszani, amelyben minden partiban van első, második, harmadik és negyedik helyezett. Minden parti után felírják az eredményeket, és év végén győztest hirdetnek. Az idei kártyacsaták eredményét ez a táblázat mutatja.

	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely
Gabi	12	24	23	17
Jutka	18	22	21	15
Béla	24	13	13	26
Pista	22	17	19	18

A táblázat értelmezése során felvetődhetnek a következő kérdések: hány partit játszottak az idén? Hogyan lehet megszámolni? Körülbelül hány partit játszanak alkalmanként? Ki nyerte a legtöbbszor a játékot? További feladat lehet, hogy amennyiben más-más szempont alapján jelöljük ki a győztest, más lesz a győztes versenyző. A tanulók képesek ésszerű szempontot keresni, amelyek alapján eldönthető, hogy ki tekinthető győztesnek.

A tanulói magyarázat, vita kezdi sejtetni, hogy egy statisztikai adathalmazt többféleképpen lehet értelmezni és magyarázni, hiszen

- Béla szerint ő a győztes, mert ő nyerte a legtöbb játékot.
- Jutka azzal érvel, hogy ő ugyan nem nyert túl sokat, de nagyon kevés utolsó helyezése van.
- Gabi szerint ugyan ő maga nagyon keveset nyert, de nagyon sokszor lett második, és azt sem könnyű elérni. Utolsó helye pedig kevesebb, mint a fiúknak.
- Pista úgy érzi, hogy legalábbis Bélánál jobb, mert ugyan kevesebb első helyezése van, de kevesebb utolsó is.

A52. feladat

Az iskolai focibajnokság lezajlott. A győzelemért 2 pont, a döntetlenért 1 pont jár.
A meccsek eredményeit beírták a következő táblázatba.

	3. a	3. b	3. c	4. a	4. b
3. a		3:0	2:1	1:3	1:1
3. b			0:0	0:2	2:1
3. c				4:3	1:3
4. a					2:2
4. b					

Állapítsd meg, hogy hány pontot gyűjtöttek az alábbi osztályok!

1. 3. a osztály: pont

2. 3. b osztály: pont

3. 4. a osztály: pont

4. Melyik mérkőzésen született a legtöbb gól?

5. Hány meccs végződött döntetlennel?

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege:

4. 3A-3B. / 3A-3C. / 3A-4A. / 3A-4B. / 3B-3C. / 3B-4A. / 3B-4B. / 3C-4A. / 3C-4B.

5. 0 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 7 / 8 / 9 / 10

A probléma megoldása lehet az, hogy például 4 pontot adnak minden győzelemért, hármat a második helyezésért, kettőt a harmadikért, egyet a negyedikért. Elképzelhető, hogy úgy gondolkodnak, hogy a győzelemért több pont is járhat. Például öt a győzelemért, három a második helyezésért, egy a harmadikért, a negyedikért pedig nem jár semmi. Vajon mindkét számolási mód alkalmazása ugyanazt a győztest hozza? A táblázaton való eligazodás mellett a tevékenység fontos hozadéka a számolási készség fejlesztése.

A fenti probléma egy kissé leegyszerűsített felvetése látható az *A52. feladatban*.

A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanulása során rengeteg autentikus problémával találkozhatnak a gyerekek. A hétköznapi tapasztalataikra építve számos olyan feladat tűzhető ki, amely számukra praktikus, releváns, és a problémamegoldás folyamata szempontjából intranszparens. Jó alkalom erre például egy játékkészlet közös, csoportmunkában való megalkotása.



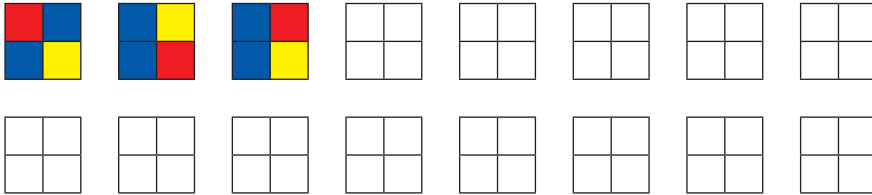
A négyzetlapok középvonalait megrajzoljuk, majd kifestjük piros, sárga és kék színeket használva. A gyerekek közös feladata az összes különböző elem megalkotása. Mivel a papírlapok forgathatók, megegyezhetünk abban, hogy azonosnak tekintjük a négyzet középpontja körüli forgatással egymásba vihető lapokat. Ebben az esetben a munka szervezése és megosztása egyaránt kombinatorikus problémát vet fel. Az elkészült készlet sajátjuknak érzik, mely autentikussá teszi a tevékenységet.

A fent leírt tevékenység értékelés során megfogalmazott változata a következő lehet:

Négyzetlapokból színezéssel ilyen kirakós játékot készítettünk. Három színt használtunk.



Ezután külön csoportba gyűjtöttük azokat, melyben mindhárom szín szerepelt. Milyen elemek vannak még ebben a csoportban? Színezz!



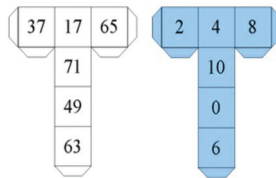
A valószínűségi szemlélet fejlesztési céljai között szerepel, hogy 5–6. osztályban az adatok lejegyzése, megfigyelése és feldolgozása egyre önállóbbá válják. Ez segíti a rendszerező képesség fejlődését, lehetővé teszi a gyakoriságok megfigyelését is. A statisztikai megfigyelések rengeteg lehetőséget kínálnak autentikus feladatok beiktatására.

Egy másik alkalommal egyszerre dobnak az alábbi ábrán látható két kockával. A kísérlet megkezdése előtt megfogalmaznak néhány sejtést (pl. hogy páros vagy páratlan összeg jön-e ki gyakrabban), és néhány eset lejegyzése után összevetik tapasztalataikat a megfogalmazott sejtésekkel.

A biztos és lehetetlen események elkülönítésére vonatkozó kérdéseknek a mérés során továbbra is nagy jelentősége van. Különleges dobókockák feldobására vonatkozóan például az *A53. feladat*ot fogalmazhatjuk meg:

A53. feladat

Ezekkel a számozott kockákkal dobtam. Ezután állításokat mondtam a dobott számok szorzatáról. **Válaszd ki** a listából, hogy szerinted az adott állítás igaz, hamis, vagy igaz lehet, de nem biztos, hogy igaz!



- A szorzat 4-re végződik.
- A szorzat 6-nál kisebb.
- A szorzás eredménye páratlan.
- A szorzás eredménye 491.
- A szorzat 711-nél kisebb.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: Igaz. / Hamis. / Lehet, hogy igaz, de nem biztos.

Autentikus feladatokra jó lehetőség adódik olyan helyzetek leírásakor, amikor a gyerekeknek maguknak kell megtervezni egy játék szabályát (*A54. feladat*).

A54. feladat

Jancsi és Péter elhatározzák, hogy ötször egymás után dobnak egy hagyományos dobókockával. Megegyeznek abban, hogy Jancsi akkor kap egy pontot, ha a dobás eredménye 2, 3, 4, 5 vagy 6. Ha nem ez történik, Péter kap néhány pontot. Az öt dobás után az a nyertes, aki több pontot gyűjtött.

Ha azt szeretnénk, hogy a játék igazságos legyen, hány pontot kell kapnia Péternek, amikor a kocka 1-et mutat?

 Vissza

Tovább 

Várható megoldásként a tanulók 5 vagy 6 pontot fognak javasolni az 1-es érték dobásánál. A tanítónak nem szükséges állást foglalnia egy végső, helyes megoldás mellett. A feladat az úgynevezett problémaalapú tanulás eszméjét követi, vagyis a tanulók matematikai tevékenységet végeznek egy intranzparens problémán, a pedagógus pedig a matematikai igazságok birtokosa és osztója szerepéből a gondolkodás facilitátorává és moderátorává válhat.

A valószínűség intuitív fogalmának alakulására és értékelésre hozzuk példaként az *A55.* és *A56. feladatokat*, melyekben a biztos események felismerése kap főszerepet, ám az *A56. feladatban* már a biztos, lehetetlen és lehetséges események közül lehet választani.

A55. feladat

Egy fán 18 madár ült: 7 veréb,
6 rigó és 5 fülemüle.
Majd 14 madár elrepült.



Döntsd el, hogy biztosan igaz-e az állítás vagy sem!
Kattints a megfelelő helyre!

Állítás	Biztos igaz	Nem biztos, hogy igaz
1. A fán maradt madarak egyike sem veréb.	☐	☐
2. A fán maradt madarak mindegyike veréb.	☐	☐
3. A fán maradt madarak között van fülemüle.	☐	☐
4. Az elrepült madarak között volt fülemüle.	☐	☐

Vissza
Tovább

A56. feladat

Nézd meg alaposan az alábbi képet, mely egy horgászó férfit ábrázol!



Olvasd el figyelmesen az alábbi állításokat, majd a megadott válaszlehetőségek közül válaszd ki a legmegfelelőbbet!

◀

◀

◀

◀

1. A képen látható férfi kalapot visel.	Válassz!	
2. A horgász fog óránként legalább tíz halat.	Válassz!	
3. A férfi horgászik.	Válassz!	
4. Egy halat sem fog fogni a horgász.	Válassz!	

Vissza
Tovább

3.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

3.3.1. Számok, műveletek, algebra

A korábbi évfolyamokhoz képest a realisztikus szöveges feladatok több téren újdonságot hozhatnak a tanulói tudás értékelésében. A kibővült számkörben a közvetlen gyakorlati tapasztalathoz nem köthető, de a médiából vagy az iskolai tananyagból ismert mennyiségek (pl. történelmi évszámok, földrajzi mennyiségek) jelenhetnek meg a feladatokban. Ezen felül a több lépéses feladatok egyre nagyobb teret nyernek. A több lépést nem feltétlenül a több, egymás után elvégzendő számtani művelet jelenti, (noha ez is jelentős nehézséget okoz), hanem a feladatmegoldás különböző fázisaiban megjelenő tudatos döntések egymásutánja. A 3.1.2. részben elemeztük a szöveges feladatok megoldásának szokásos lépéseit 5–6. osztályban. A realisztikus feladatokban egyes lépések különösen fontossá válnak. A feladat szövegének megértése és a megfelelő matematikai modell kiválasztása általában nagyobb jelentőségű, mint a gyakorlófeladatokban. Ugyancsak kiemelt fontosságú általában a megoldás értelmezésének, ellenőrzésének lépése, amely itt korántsem azt jelenti, hogy az elvégzett matematikai műveleteket újra, vagy esetleg inverzükkel kiszámoljuk, hanem a feladat szövegéhez illeszkedést, a valóságnak megfelelést vizsgáljuk.

„*A matematikai tudás alkalmazásai*” című bevezető fejezetünkben több példát is bemutatunk, amelyek a realisztikus aritmetikai szöveges feladatok közé tartoznak. Ezekből a feladatokból mint prototípusokból (*A57. feladat*) további realisztikus szöveges feladatok generálhatók.

A feladat megoldásához egy megfelelő vázlatrajzot érdemes készíteni, vagyis a feladat szövegében szereplő dolgokat egy geometriai modellhez kapcsoljuk. Az *A58. feladat* nemcsak formai, hanem a megoldásmenet szempontjából is nyílnak számít.

A57. feladat

Olvasd el a történetet!

András bácsi gyümölcsfákat ültetett a kertbe. Összesen hét sor van, mindegyikbe nyolc gyümölcsfát ültetett. Két sornak a felét már tavaly beültette. **Hány gyümölcsfát ültetett András bácsi ebben az évben?**

Válaszd ki, melyik számfeladat illik a történethez! **Kattints** a megfelelő gombra!

$56 - 2 \times 4$	☐ Igen.	☐ Nem.
$5 \times 8 + 2 \times 4$	☐ Igen.	☐ Nem.
$7 \times 4 + 5 \times 4$	☐ Igen.	☐ Nem.
$4 \times (7 + 5)$	☐ Igen.	☐ Nem.
$2 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 7$	☐ Igen.	☐ Nem.

☐ Vissza ☐ Tovább

A58. feladat

A mozijegyen azt olvassuk, hogy „BAL, 17. sor, 15. szék”.

Vajon hány szék lehet a moziateremben?

☐ Vissza ☐ Tovább

Ez a nyílt végű probléma az intranszparencia szempontjából akár az autentikus feladatok között is helyet kaphatna. Azért nem ott szerepeltetjük, mert a feladat maga nem egy életszerű problémahelyzetet vázol. Ha ott vagyunk a moziateremben, akkor aligha a jegyen található számok alapján fogunk becslést adni. Megoldásként többféle becslés adható, amelyet matematikai jelekkel, egyenlőtlenségként is megfogalmazhatunk.

Az A59. feladatban – a horizontális matematizálás jellegzetes alapelvének megfelelően – matematikai művelet sor és egy életszerű feladathelyzet szöveges leírása között kell kapcsolatot teremteni.

A59. feladat

Egy minibuszban a sofőrrel együtt legfeljebb kilencen utazhatnak.

Hány minibusszal tudjuk a 28 fős osztály tanulóit és a két kísérő tanárt az erdei iskolához utaztatni? **Válaszd ki kattintással** a helyes válaszhoz vezető számolást!

☐ $(28 + 2) : 9 = 3$, a maradék 3, tehát 3 busz kell.

☐ $(28 + 2) : 8 = 3$, a maradék 6, tehát három busz kell.

☐ $(28 + 2) : 9 > 3$, tehát legalább négy busz kell.

☐ $(28 + 2) : 8 > 3$, tehát legalább négy busz kell.

☐ Vissza

A feladatok szövegéből hiányzó adat vagy jellemzően nem matematikainak tekintett tényezők miatt a tanulók sokszor becsapva érzik magukat, amikor olyan feladatokat oldanak meg, mint például:

Jancsi legjobb időeredménye a 100 méteres futásban 17 másodperc. Mennyi idő alatt fog ő lefutni 1 km-t?

Javaslatunk az, hogy az ilyen típusú, „trükkös” feladatok helyet kaphatnak a tanórákon, különösen a megszokott feladatmegoldó stratégiák túlautomatizálódásának elkerülése végett, azonban diagnosztikus értékelési célra kevésbé használhatók, mert csak további, finom vizsgálatok derítik ki, hogy valaki tájékozatlanság vagy pl. a bátorság hiánya miatt írja válaszként a fenti feladatra, hogy 170 másodperc.

Fontos lépés a szöveges feladatok jobb megértése felé, ha ebben a korosztályban már gyakran várjuk el a tanulóktól, hogy egy adott matematikai struktúrához ők maguk találjanak ki szöveges feladatot. Ez rendkívül nehéz feladat. Láttuk a szöveges gyakorlófeladatok között, hogy még egyetlen alpművelethez is küzdelmes vállalkozás lehet szöveget alkotni. Azonban

éppen a szöveges gyakorlófeladatok és a realisztikus feladatok egymás mellé helyezésére és összehasonlítására nyújt lehetőséget, ha a tanulók alkotnak feladatszövegeket.

Ha például 20 liter vizet 8 edénybe kell egyenlően elosztani, akkor szöveges gyakorlófeladatként kitűzve ezt, a 2,5 liter egyszerűen adódik végeredményként. Megkérdezhetjük a tanulókat, milyen más dologgal helyettesíthetjük a feladatelemeket úgy, hogy a számok változatlanok maradjanak. A csokoládé törése még megoldható, de az ötletek között felbukkanhat például az, hogy a 20 fős osztály az osztálykiránduláson olyan szobákban aludt, amelyekben négy-négy darab emeletes ágy volt. Hány szobát kellett bérelni? És az osztályfőnök hol alszik? A sokféle ötlet között várhatóan lesznek olyanok, amelyekben a változatlan számadatok és a változatlan osztás művelet mellett az osztás eredményének egészrésze, az egészrésznél eggyel nagyobb szám, vagy éppen az osztási maradék lesz a feladat megoldása.

Másik példánk:

Lali, Kati és Juli túrázni mennek. Lali hátizsákja 9,6 kg, Julié ennek $\frac{5}{6}$ része, Katié pedig a $\frac{2}{3}$ része. Hány kg a 3 gyerek hátizsákja együtt?

További feladat: Mit kérdeznél még?

A tanulói kérdések között lehetnek olyanok, amelyek továbbra is a feladat szövegbe beültetett jellegéből adódnak. „Ha Lali megeszi az uzsonnáját, ami a hátizsák tömegének $\frac{1}{6}$ része, akkor mennyi lesz a hátizsák tömege?“. De olyanok is, amelyek a valós szituációt célozzák; például, hogy „Hány kg-t nyomhatnak a hátizsákok a túra végén?“. Az előbbieken szereplő feladatok alkalmasak annak vizsgálatára is, hogy a tanulók mennyire képesek beépíteni köznapi tapasztalataikat matematikai feladatok megoldásába, valamint hogy mennyire tudnak valós szituációt tartalmazó beültetett feladat esetén a szituációt is figyelembe véve dolgozni.

Érdekes típusát jelentik a realisztikus szöveges feladatoknak az olyan problémák (*A60. feladat*), amelyek alapvetően nem számtani művelet elvégzésével oldhatók meg, hanem logikai következtetésekkel (nyilván szerepet kapnak egy-egy lépésben számtani műveletek is).

A60. feladat

A Főtérről az autóbuszok 13 percenként indulnak.
Az első busz reggel 6.00-kor indul.



a) **Válaszd ki** a következő időpontok közül, melyik időpont(ok)ban indul menetrend szerint busz!

☐ 6.50 ☐ 6.52 ☐ 7.18 ☐ 7.20

b) **Mikor indul el a hatodik busz? Írd be a válaszodat** a téglalapba!

A hatodik busz óra perckor indul el.

☐ Vissza ☐ Tovább

A nemzetközi szakirodalomból ismertek olyan feladatok, amelyek az autentikus kategóriába sorolhatók, és amelyek az 5–6. évfolyamos korosztály számára megfelelőek. 10–12 éves tanulókkal végzett kísérletekben több olyan feladat szerepelt, amelyek alkalmasak arra, hogy a tanulói tevékenységre, gyakran kooperatív matematikai munkára építve a valóságos szituációt leíró feladathoz egy megfelelő matematikai modell megtalálására ösztönözzenek.

A matematikai tudás értékelésében az autentikus feladatok sajátos szerepet töltenek be. Láttuk, hogy a realisztikus feladatoknál sem csak arról van szó, hogy „kijön-e a helyes végeredmény”. Olyan értelemben az autentikus feladatoknak nincs is végeredménye, mint a szöveges gyakorlófeladatoknak. Van viszont egy megoldási folyamat, amely szövegértésen, kooperatív tanuláson, matematikai modellalkotáson alapul, az adatok hiányának vagy redundanciájának eldöntése pedig döntési helyzetek elé állítja a tanulókat. Az alsó tagozatos kor végére gyakran meggyökeresedő matematikai meggyőződések (pl. minden feladatnak van egy helyes megoldása) helyett a problémaérzékenység, a problémamegoldó folyamat fázisainak tudatos ismerete és kontrollja fejlődhet.

A szöveges gyakorlófeladatokhoz és az általánosságban vett realisztikus feladatokhoz hasonlóan az autentikus szöveges feladatok is lehetőséget nyújtanak egy „fordított” feladatmegoldó stratégia alkalmazására: problémahelyzet és szöveg megalkotása adott matematikai struktúrához. Fejleszt-

tó kísérletben (ld. Csikos, 2007) már 4. osztályosoknál sikerrel alkalmaztuk például azt a feladatot, amelyben a $100:8$ osztáshoz kellett olyan módon feladat szöveget alkotni, hogy egyszer a maradék nélküli osztás, másszor a maradékos osztás, harmadszor a maradék, negyedszer pedig a maradékos osztásnál kapott egészrésznél eggyel nagyobb egész szám legyen a feladat megoldása. Egy ilyen feladatkitűzéssel nyilvánvalóan a kreativitást és a matematikához kevésbé szorosan köthető verbális képességeket is mérjük. Ez azonban nem kifogásolható, amennyiben világossá tesszük, hogy a matematikai tudás autentikus problémahelyzetben történő alkalmazásának diagnosztizálását végezzük.

3.3.2. Relációk, függvények

A realisztikus feladatok típusának legfőbb jellemzője, hogy a feladatmegoldás folyamatában releváns szerephez jutnak a hétköznapi életből merített tapasztalatok, esetenként konkrét ismeretek. Bizonyos feladatok esetében azonban valószínűsíthető, hogy a megfelelő megoldáshoz legalább a feladatmegoldás egy pontján (tervezés, végrehajtás, vagy ellenőrzés fázisában) szükséges a hétköznapi ismeretek és tapasztalatok aktív felhasználása. Mindez nem jelenti azt, hogy a feladat a tanuló számára mindennapi helyzetet ír le, számára kissé idegen, a „felnőtt” világ körébe tartozó, de számára is ismert szituáció is lehet. Ilyenek például a háztartással, sütéssel-főzéssel, utazással, vásárlással, takarékossgal kapcsolatos esetek, helyzetek (A61–A65. feladatok).

A61. feladat

Kati néni receptje szerint egy tepsis kakaós csiga elkészítéséhez 2,5 dkg élesztő szükséges.

Legfeljebb hány tepsis kakaós csigát lehet sütni 7,5 dkg élesztő felhasználásával?

Írd be a választ az üres téglalapba!

Legfeljebb tepsis kakaós csigát lehet sütni.

Hány dekagramm élesztő szükséges 5 tepsis kakaós csigához?

Írd be a választ az üres téglalapba!

5 tepsis kakaós csigához dkg élesztő szükséges.



[Vissza](#)

[Tovább](#)

A62. feladat

A táblázat néhány zöldség vetésének lehetséges hónapjait mutatja.

Zöldség	Hónapok											
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
cukkini												
cékla												
hónapos retek												
fejes saláta (fóliás)												
bokorbab												
zöldborsó												

Kati anyukája áprilisban kezdi a veteményezést. **Válaszd ki** azokat a zöldségeket, amelyeket érdemes vetnie!

☐ Cukkini.
 ☐ Cékla.
 ☐ Hónapos retek.

☐ Zöldborsó.
 ☐ Bokorbab.
 ☐ Fejes saláta (fóliás).

Melyik az a zöldség, amelyiket a legtöbb hónapban lehet vetni?
Válaszd ki a legördülő listából a megfelelő zöldséget!

A legtöbb hónapban vethető zöldség a Válassz!

Van-e olyan hónap, amikor egyszerre lehet vetni cukkinit és bokorbabot?
Kattints a megfelelő állításra!

☐ Van.
 ☐ Nincs.

Legördülő lista szövege: cukkini. / cékla. / hónapos retek. / fejes saláta (fóliás). / bokorbab. / zöldborsó.

A63. feladat

Imre autója átlagosan 5 liter benzint fogyaszt 100 kilométeren.

A vidéki rokonaihoz tartott éppen, amikor útközben kifogyott az üzemanyag. Szerencse, hogy mindig tart az autójában egy kannát, benne 2 liter tartalékbenzinnel. A következő benzinkutat 35 km-re jelzi a GPS.

Eljuthat-e ezzel a 2 liter üzemanyaggal Imre a benzinkútig? **Kattints** a megfelelő válaszra!

☐ Igen.
 ☐ Nem.

Legalább hány liter benzinnek kell lennie az autó tankjában a hazaútra, ha Imre a rokonoktól 150 km-re lakik? **Válaszd ki** a legördülő listából a helyes számot!

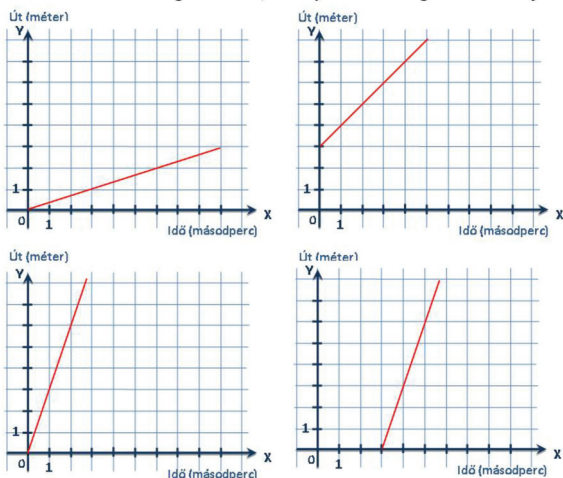
A hazaútra legalább Válassz! liter üzemanyag szükséges.

Legördülő lista szövege: 5 / 8 / 10 / 15 / 20

A64. feladat

Nóri az edzésen a futópálya rajtvonalától indul, majd másodpercenként 3 métert tesz meg a cél felé.

Kattints arra a grafikonra, amelyik Nóri mozgását ábrázolja!



[Vissza](#)

[Tovább](#)

A65. feladat

Peti minden reggel busszal megy az iskolába. Egy buszmegállóra lakik az iskolától. A buszt negyed óráig tart. A busz átlagosan 15 métert tesz meg egy másodperc alatt.



Mekkora távolságot tesz meg átlagosan 1 perc alatt a busz?

Egészítsd ki a mondatot a megfelelő számmal!

A busz átlagosan egy perc alatt métert tesz meg.

Milyen messze van egymástól az a két megálló, ahol Peti fel- és leszáll?

Válaszd ki a legördülő listából a helyes választ!

A két megálló egymástól km-re van.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A vonatkozó elméleti fejezetben ismertetettek szerint azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papír-ceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészletek, táblázatok, stb. a feladatszöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző lehet, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Mindenképpen szükséges, hogy a tanuló a problémát lefordítsa a saját nyelvére, valamilyen ponton sajátjának érezze, bele tudja magát élni, képzelni az adott szituációba. Gyakran a feladat matematikai tartalma ezáltal leegyszerűsödik, a probléma megoldásának kulcsa éppen ennek a transzformációnak az elvégzése, a megfelelő megoldási modell megtalálása (A66.–A67. feladatok).

A66. feladat

Az emberi test tömegének kb. 65%-a víz. **Válaszolj a kérdésekre!**

Hány kg vizet tartalmaz egy 80 kg tömegű ember szervezete?

És a Te szervezeted?

VisszaTovább

A67. feladat

Peti boltosat játszik a kétkarú mérleggel.

A három mérés során a képen látható eredményeket kapta. (A mérleg minden mérés esetén csak egyszer mozdult ki az egyensúlyi helyzetből.)



A legördülő menüből **válassz ki** a helyes választ!
Melyik a **legnehezebb**, illetve melyik a **legkönnyebb** gyümölcs?

a) A(z) a legnehezebb gyümölcs.

b) A(z) a legkönnyebb gyümölcs.

Legördülő lista szövege: alma / banán / narancs / körte

Az összetettebb, a tanulók számára kevésbé megszokott feladatokban a gondolkodást részkérdésekkel, részfeladatokkal irányíthatjuk. A fejlesztés során ez a mód szolgál az egyes problémák részletesebb elemzésére, az összefüggések, kapcsolatok felismerésére, a többféle megoldás megtalálására (A68–A69. feladatok).

A68. feladat

Garfield beállította az ébresztőóráját 6:35-re. A reggeli órácsörgéskor azonban még mindig nagyon álmos, ezért újból beállítja az ébresztőt úgy, hogy még 15 percet tudjon aludni. Ezt követően még háromszor állítja újra oly módon, hogy minden alkalommal 3-3 perccel kevesebb időt ad magának alvásra, mint előtte.



a) Hány perc telik el az eredetileg tervezett felkelés és az utolsó órácsörgés időpontja között? Írd be a megfelelő számot!

perc telik el a tervezett felkelés és az utolsó órácsörgés időpontja között.

b) Mikor szólal meg utoljára az ébresztőóra? Írd be a megfelelő számokat!

óra perckor szólal meg utoljára az ébresztőóra.

A69. feladat

Egy falióra minden fél órában egyet és minden egész órában annyit kakukkol, ahány óra van.



a) Reggel 6:45-től 11:15-ig összesen hány kakukkolást lehet hallani?
Írd be a válaszod a téglalapba!
Reggel 6:45-től 11:15-ig kakukkolást lehet hallani.

b) Kattints rá a megfelelő válaszra! Mikor lehet több kakukkolást hallani?

☐ 3:15-től 5:45-ig. ☐ 1:45-től 4:15-ig.

3.3.3. Geometria

Konstruálások

A témakör tananyagtartalma: ismerkedés a térelemekkel, azok kölcsönös helyzetével, a párhuzamosság, merőlegesség fogalmával, a téglalap (négyzet), a téglatest (kocka) tulajdonságaival, hálózataival, a sokszögek szemléletes fogalmával, tulajdonságaival, háromszögek, négyszögek tulajdonságaival, osztályozásukkal. Megismerik a távolság, a szög fogalmát és mérését. Adott tulajdonságú pontok keresése hozza elő a szakaszfelező merőleges, a kör és a gömb fogalmát, szerkesztési feladatok megoldását.

Az A70. feladatban absztrakt és hétköznapi geometriai alakzatok együttesen fordulnak elő, és mind a fogalmak ismerete, mind pedig a megfelelő horizontális matematizálás szükséges a megoldás folyamatában.

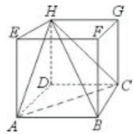
A70. feladat

Az alábbi képeken különböző tárgyakat látsz.

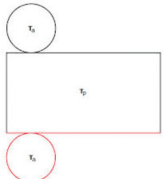
Állapítsd meg, igazak-e a következő állítások! **Kattintással válaszolj!**



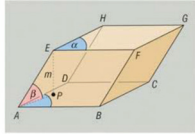
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

a) Az asztal lapja trapéz alakú. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

b) A 2. ábrán az A, B, C és H pontok háromszöget alkotnak. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

c) A 3. ábra egy hasábot ábrázol a síkba kiterítve. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

d) A 4. test minden oldalapja paralelogramma. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

☐ Vissza
☐ Tovább

Az autentikus feladatok (A71. és A72. feladatok) ebben a témakörben olyan tevékenységformákat követelnek, amelyekben hangsúlyt kap a tervezés, a folyamat nyomon követése és tudatos ellenőrzése, diszkussziója.

A71. feladat

Matematikaórán a kocka hálójáról tanultak az ötödikesek. A tanár néni ezt a kockát rakta ki az asztalra, majd kivetített 4 hálót egyesével. A gyerekek szavaztak, hogy a kivetített hálóból összehajtható-e az asztalon lévő kocka vagy sem.

Itt láthatod a kockát:



Te melyikre szavaznál?

Kattints a hálók mellett igenre, ha össze lehet hajtogatni, nemre, ha nem lehet összehajtogatni az alábbi hálókból a fenti kockát!



☐ Igen.

☐ Nem.



☐ Igen.

☐ Nem.



☐ Igen.

☐ Nem.



☐ Igen.

☐ Nem.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A72. feladat

Egyforma kockákból különböző tornyokat építettünk. Alaprajzunkon számok jelölik az egymás tetejére rakott kockák számát.

Párosítsd az alaprajzokhoz tartozó nagybetűket az előlnézetekhez tartozó kisbetűkkel!

A nagybetű alatti legördülő menüből válaszd ki a megfelelő kisbetűt!

1	1	1
1	2	1
1	1	1

A

1	1	1
2	1	2
1	1	1

B

1	1	1
1	3	1
1	2	1

C

1	1	1
2	2	1
1	2	1

D

Válassz!

Válassz!

Válassz!

Válassz!



a



b



c



d



e

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: a / b / c / d / e

Mérések

A hosszúság- és területmérés alapozása az alsó tagozat feladata. Az 5. évfolyamon ismételünk, és az eddig szerzett ismereteket kiegészítjük a téglalap és négyzet területképletének, illetve a téglatest és a kocka térfogatképletének megfogalmazásával. Továbbra is fontos fejlesztési cél, hogy a szabvány mértékegységek mellett alkalmi, az adott feladathoz illő mértékegységeket és mérőeszközök használatára legyenek képesek a tanulók. A mérőeszköz szükség szerinti változtatásával, a mikroszkóphoz hasonló felhasználásával megalapozzuk a későbbi évfolyamok végtelen kicsiny mennyiségeinek matematikáját.

A hosszúság mérésével kapcsolatos feladatok között a realisztikus feladatok a tanulók saját tapasztalatait (*A73. feladat*), esetleg alkalmi mérőeszközöket felhasználó gondolatmeneteket kérnek.

A73. feladat

Nagymama a téglalap alakú konyhakert felébe sárgarépat, negyed részébe retket, a maradék területre spenótot veteményez.

A konyhakert egyik oldala 5 m, a másik oldala 8 m.

Válaszolj a kérdésekre! Válaszaidat írd be az üres téglalapokba!

a) **Mekkora területű a konyhakert?**
A konyhakert területe m².

b) **Számítsd ki, hány m² területet foglal el a spenót a konyhakertből!**
A spenót a konyhakertből m² területet foglal el.

c) **Buksi kutya miatt a konyhakertet körbe kell keríteni alacsony kis kerítéssel.**
Hány méter hosszú kerítés kell?
A konyhakert bekerítéséhez méter hosszú kerítés kell.

[Vissza](#) [Tovább](#)

Térfogatszámítás és mértékegységváltás együttes alkalmazási követelmények mérésére az *A74.* és *A75. feladatokat* közöljük.

A74. feladat

A teraszunkon 6 téglatest alakú virágláda található.
Méretük: 100 cm x 30 cm x 40 cm.



Hány m^3 virágföldre van szükségünk egy láda megtöltéséhez?

Egy láda megtöltéséhez m^3 virágföldre van szükségünk.

Hány m^3 virágföldre van szükségünk, ha minden ládát színültig töltünk?

Az összes láda megtöltéséhez m^3 virágföldre van szükségünk.

A virágföldet erős műanyag zsákokban árulják. Mi 50 literes zsákokban vettünk földet.

Hány zsákra van szükségünk a ládák megtöltéséhez?

A ládák megtöltéséhez zsákra van szükségünk.

[Vissza](#) [Tovább](#)

A75. feladat



2010. április 20-án felrobbant egy brit tengeri olajfúró állomás kútja a Mexikói-öbölben. Egy hét alatt 795 ezer liter nyersolaj ömlött a tengerbe. A szétterülő olaj körülbelül 5000 km^2 felületet borított be. Ez a baleset súlyosan károsította a környezetet.

a) Hány dm^3 térfogatú olaj került a tengerbe?

Megoldásodat **írd** a dobozba!

A tengerbe dm^3 olaj került.

b) Számold ki, hogy milyen vastagságú az olajfolt, ha a beborított területet téglalap alakúnak képzeljük?

Az olajfolt vastagsága m.

[Vissza](#) [Tovább](#)

Legördülő lista szövege: 0,00159 / 0,0159 / 0,159 / 1,59; 15,9

A gyermekek mindennapi élethelyzeteihez kapcsolódó feladatokban itt elsősorban téglatestekkel, téglalapokkal kapcsolatos, aktív tanulói tevékenységet feltételező feladatok jelennek meg (A76. feladat).

A76. feladat

Az iskolában minden gyereknek van egy cipősdoboz, abban tárolja a rajzórára, matematikaórára szükséges eszközöket (festéket, ecseteket, tálkákat, törlőrongyokat, vonalzót, körzőt). A dobozokat egymásra kell rakni, hogy elférjenek a polcon. Klári kitalálta, hogy mindenki ragassza be a dobozát tapétával, mert úgy sokkal szebben mutatnak a polcon. Attila vállalta, hogy megvásárolja a szükséges anyagot. A tapétát 10,05 méteres tekercsben árulják, szélessége 0,53 m.



Egy cipősdoboz mérete: 10 cm x 20 cm x 30 cm.

A számítás előtt becsüld meg, hogy elég lesz-e minden dobozra a tapéta, ha az osztályba 24 gyerek jár?

☐ Elég lesz.

☐ Nem lesz elég.

☐ Vissza

Tovább ☐

Az A77. feladat mértékváltást és arányossági gondolkodást is igényel.

A77. feladat

Az iskolai mosdóban elromlott egy csap. A gyerekek megmérték, hogy 1 perc alatt mennyi víz megy kárba. 60 csepp vizet gyűjtöttek egy mérőedénybe 1 perc alatt. A kicsöpögött víz űrtartalma 13 ml volt.

Számítsd ki, hány liter víz csöpög el 1 óra alatt, 1 nap alatt, 30 nap alatt!

a) 1 óra alatt liter víz csöpög el.

b) 1 nap alatt liter víz csöpög el.

c) 30 nap alatt liter víz csöpög el.



Számítsd ki, hányszor lehetne annyi vízzel zuhanyozni, amennyi 30 nap alatt kárba vész! (Egy zuhanyozással körülbelül 75 l vizet használunk el.)

d) A kárba vesző vízzel lehetne zuhanyozni.

☐ Vissza

Tovább ☐

Legördülő lista szövege: 50-szer / 60-szor / 75-ször / 90-szer

A feladat által diagnosztizálható tudás- és készségelemek: egyenes arányosság, mértékváltások (idő, űrtartalom egységei), számolási készség (szorzás, osztás), becsülőképesség.

Az A78. és A79. feladatok további példákat mutatnak arra, hogy a hétköznapiakból vett illusztrációk hogyan válnak részévé, a matematikai modellalkotást segítő, de legalábbis kísérő feladatelemeknek.

A78. feladat

Az alábbi képek kocka alakú tárgyakat és kockákból álló építményeket ábrázolnak.

Válaszd a kérdésekre! Írd be számmal a választ a téglalapba!

a) **Hány darab 5 cm élű Rubik-kocka fér bele a 15 cm oldalélű dobozba?**
 darab 5 cm élű Rubik-kocka fér bele a 15 cm oldalélű dobozba.

b) Egy darab kockacukor élei 1 cm-esek.
Hány darab kockacukor fér el egy 8 cm x 15 cm x 20 cm-es dobozba?
A dobozba kockacukor fér el.

c) **Egy doboz kockacukorból hány darab, a képen látható tornyot építhetünk?**
Egy doboz kockacukorból darab tornyot építhetünk.

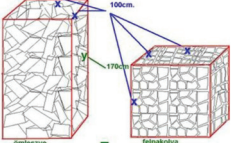
d) A japán vásárlók évek óta panaszkodtak, hogy a dinnye kerek formája miatt túl nagy helyet foglal el a hűtőszekrényben, hűtés nélkül pedig hamar megromlik. A dinnyét masszív kockaformába ültetik, melynek átlátszó műanyag falai 2 cm vastagok és falait alumíniumpántokkal tartják össze.

Mekkora a térfogata körülbelül annak a dinnyének, amelynek oldalméretei 20 cm hosszúak?

Egészítsd ki a mondatot a legördülő listából!
A dinnye térfogata körülbelül cm³.

Legördülő lista szövege: 2000 / 4000 / 8000 / 9000 / 16000

A79. feladat



Méretei: 100 cm x 100 cm x 170 cm

Méretei: 100 cm x 100 cm x 100 cm

Az alábbi illusztrációkon elmagyarázzuk, mi a különbség a normál és az erdészeti m³ között. A bal oldali ábra egy erdészeti köbmétert mutat, a jobb oldali ábra pedig egy normál köbmétert. Az erdészeti köbméter a levágott és egymásra pakolt sarangok (méterfák) mértékegysége.

Egészítsd ki a választ a megfelelő számmal!

a) Mekkora a méretei a másfél erdészeti köbméteres kupacnak?
A másfél erdészeti köbméteres kupac méretei:

b) Hány normál köbméter fát szállíthat ez a teherautó?
Ez a teherautó normál köbméter fát szállíthat.

c) Hány erdészeti m³ fát képes elszállítani ez a teherautó?
A teherautó platójának méretei: 1 m x 3 m x 1, 7 m.
Ez a teherautó erdészeti köbméter fát szállíthat.

d) Ha két teherautót pakolnak meg fával, akkor hány erdészeti köbmétert szállíthatnak el összesen?
A két teherautó erdészeti köbméter fát szállíthat összesen.

[Vissza](#)
[Tovább](#)

Legördülő lista szövege:

1 m x 1 m x 1,7 m. / 1 m x 1,5 m x 1,7 m. / 1 m x 2 m x 1,7 m. / 1 m x 3 m x 1,7 m.

1 / 2 / 3 / 4 / 5

1 köbméter / 2 köbméter; / 3 köbméter; / 4 köbméter

1 köbméter / 2 köbméter / 3 köbméter / 6 köbméter

Transzformációk

Az egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükrözést és a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat (háromszögek, négyszögek), és szerkesztésüket kell ismerniük.

Feladatokban előkerül a nagyítás, kicsinyítés, illetve konkrét feladatokban a hasonlóság aránya.

Tengelyes szimmetria

Az A80. feladat egy ismert detektívsorozat egyik részének fő motívumát hozza elénk. A feladat nem könnyű még felnőttek számára sem, ugyanakkor a megoldáshoz szükséges minden tudáselem rendelkezésre áll az 5–6. osztályos korosztályban. Az A81. feladat a hétköznapiakból ismerős logók szimmetriatulajdonságára kérdez rá.

A80. feladat

Kata a fodrásznál a tükör előtt ül. Nem tudja eldönteni, hogy hány órát mutat a tükörben látható óra. **Segíts neki!**

A felsoroltak közül melyik lehet a pontos idő? **Kattints rá!**



- 11 óra 21 perc
- 12 óra 21 perc
- 12 óra 39 perc
- 11 óra 39 perc

[Vissza](#) [Tovább](#)

A81. feladat

Az alábbi képeken különböző márkajelzések képeit láthatod. **Melyik képnek hány szimmetriatengelye van? Egészítsd ki a választ a megfelelő számmal!**



Kicsinyítés, arány, terület

Az A82. feladat egy ház felülnézeti rajzán tájékozódás elemeire épül.

A82. feladat

Miklósék új házába költöztek. Szeretnének új bútorokat vásárolni és a rajzon látható módon berendezni. A vázlatrajzon egy négyzetoldal a valóságban fél méternek felel meg.

Mit tanácsolsz Miklósnak?

Kattints a megfelelő válaszra a legördülő listában!



- a) Miklós szerint a garázsajtó keletre néz. Igaza van-e? Válassz!
- b) A vásárlandó gardrószelekt méretei: magassága 3 méter, szélessége 1 méter, hosszúsága 1 méter. Befér-e a gardrószelekt észak-déli irányban elhelyezve a gardróba? Válassz!
- c) A fürdőszobába befér-e a mosdók fölé egy 2 m hosszú polcos szelekt észak-déli irányban elhelyezve? Válassz!
- d) A garászból indulunk, bemegyünk a kazánházba, ott déli irányba haladunk 4 métert, ezután keletnek fordulva megteszünk 7 métert, majd délre fordulva megyünk 3 métert. Hová juthatunk? Válassz!

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege:

Igen, igaza van. / Nem, nincs igaza.

Igen, kényelmesen befér. / Nem, egyáltalán nem fér bele. / Befér, de nem lehet majd teljesen kinyitni az ajtót.

Igen, befér. / Nem, egyáltalán nem fér bele.

A fürdőszobába. / A nappaliba. / A bejárathoz. / A középső szobába. / A bejárathoz közelebbi szobába.

Az 1–4. évfolyamokon még külön geometriai részterületként szereplő tájékozódás területet itt sem emeljük ki. Egy olyan mintafeladatot mutatunk (A83. feladat), amely ugyan egyrészről az alsó tagozatos, tájékozódással kapcsolatos értékelési követelmények kiterjesztéseként is fölfogható, másrészről viszont a függvények, relációk témakörben az adatpárok autentikus fölhasználásának követelményéhez is sorolható.

A83. feladat

Az alábbi térkép a sárga turistaút egy részletét ábrázolja. A térképen 1 cm a valóságban 100 m-nek felel meg.

Válassz! a kérdésekre! Egészítsd ki a választ a megfelelő számmal!



Buslig-pihenő



Kis-Hárs-hegy



a) **Hány méterre van egymástól a Buslig-pihenő és a Kis-Hárs-hegy?**

A Buslig-pihenő és a Kis-Hárs-hegy méterre van egymástól.

b) **Hány m-re van egymástól a Kis-Hárs-hegy és a Kaán Károly-kilátó?**

A Kis-Hárs-hegy és a Kaán Károly-kilátó méterre van egymástól.

c) **Hány km-re van egymástól a Kis-Hárs-hegy és a Szépjuhász név vasútállomás?**

A Kis-Hárs-hegy és a Szépjuhász név vasútállomás km-re van egymástól.

d) **Hány km-es az Örökös tanösvény?** Az Örökös tanösvény km-es.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege:

100 m / 200 m / 400 m / 600 m

500 m / 1000 m / 1500 m / 2000 m

0,1 km / 0,2 km / 0,4 km / 0,8 km / 1,2 km

0,1 km / 0,2 km / 0,4 km / 0,6 km / 1 km

3.3.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

Rényi Alfréd (2005) hitet tett amellett, a valószínűségi gondolkodás tanítása – további szempontok mellett – a hétköznapi életben igazolható fontossága miatt szükséges. A módszerek sokfélék lehetnek, de a kombinatorikai jellegű feladatokra építkezve, az összes lehetőség és a kedvező esetek megszámlálását kívánó feladatokon keresztül haladás tűnik legmegfelelőbbnek, különösen ebben a korosztályban. Az A84. feladatban a lány- és fiúnevek, valamint a fotó alapján válik a feladat a szövegbe öltöztetett rutinmegoldás folyamatainál többet igénylővé.

Az A85. feladat még egyszerűbb, a hozzá megadott kép néhány tanuló számára a horizontális matematizálást segítheti, míg ebben a korosztályban sokak számára a feladat rutinszerű, a képi információ nyújtotta segítség nélkül is rutinszerűen megoldható.

A84. feladat

A Kovács családban négy gyerek van: Anita, Béci, Cilike és Dóri.
Mindennap kétfős csapat segít a szülőknek a házimunkában.



Olvasd el figyelmesen az alábbi kérdéseket, majd **írd be** a megfelelő választ a téglalapokba!

1. Hányféle különböző csapatot lehet összeállítani a testvérekből?
2. Hány csapatot lehet összeállítani, ha Cili megbetegedett és felmentést kapott?
3. Hány csapatot lehet összeállítani, ha Béci és Dóri nem akar egy csapatban lenni?
4. Hány olyan csapat van, ahol fiú és lány is segít a házimunkában?

[Vissza](#) [Tovább](#)

A85. feladat

Hányféleképpen helyezhetünk el a polcon egymás mellé egy piros, egy kék és egy sárga színű füzetet?

Írd a válaszdod számmal a téglalapba!



[Vissza](#) [Tovább](#)

A realiztikus feladatok között egy jellegzetes osztályt képeznek a skatulyaelv alkalmazásával megoldható problémák. Ebben a korosztályban a tanulóktól nem várjuk el általánosságban a skatulyaelv ismeretét, ugyanakkor ismerős, egyszerűen modellezhető dolgok esetén elvárható a sikeres feladatmegoldás. Az alapelv intuitív kialakításánál a kisebb számosságok felől haladhatunk a milliós számkörökig (ld. A86. feladat).

A86. feladat

Az osztályban hét fiú van, és sorban egymás után mindegyikük dobott egyet a dobókockával.

Igaz-e, hogy lesznek legalább ketten közöttük, akik ugyanazt a számot dobták?

Kattints rá!

☐ Igaz. ☐ Nem igaz.

☐ Vissza ☐ Tovább

A leíró statisztika témaköréhez kapcsolódóan is számtalan lehetőségünk van a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz köthető matematikai modell keresésére.

Az autenticitás értelmezésében a bevezető fejezetben ismertetett elvi állásfoglalást követjük: azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papír-ceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészek, táblázatok stb. a feladat szöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás. A papír-ceruza értékelési módszer, vagy akár az egyénre szabott on-line diagnosztikus értékelési módszer alkalmazása esetén az autentikus feladatok külsődleges jellemzője a hosszabb, tipográfiaiag gyakran változatos vagy újszerű feladat szöveg, belső, problémamegoldási szempontból pedig gyakori jellemző az intranszparencia, vagyis az azonnal alkalmazható és megoldáshoz vezető eljárás hiánya. A feladat autentikus jellege egy adott történelmi-társadalmi környezetben, egy adott életkori kohorszba tartozó tanulók többségét szem előtt tartva határozható meg. Elképzelhető, hogy egyes tanulók számára (vagy éppen más történelmi-kulturális helyzetben) egy autentikus feladat rutinfeladattá válik, sőt, az is előfordulhat, hogy egyes tanulók vagy valamely történelmi-társadalmi kontextus szempontjából egy autentikus feladat nem minősülne matematikai feladatnak, hanem pl. a kritikai gondolkodás vagy valamilyen műveltség-eszmény értékeléséhez kapcsolódna.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Úgy is fogalmazhatunk, hogy gyakran a tanuló feladata az, hogy létrehozzon egy olyan matematikai feladatot az adott problématerben, amely a matematikai tudás alacsonyabb szintű alkalmazását igényli.

A kombinatorika területén az autentikus feladatok annak felismerését várják a tanulótól, hogy egy adott hétköznapi probléma a lehetséges esetek összeszámlálása révén oldható meg. Jellegzetes kérdéstípus lehet a „Hányféleképpen választhatok?” kezdetű problémasereg.

A valószínűségszámítás területén az autentikus feladatok a tanulók hétköznapi élményeihez köthető tevékenységek leírását tartalmazzák: sorolás, pénzfeldobás, sportjátékok, kártyajátékok. Jellegzetes autentikusfeladat-típus lehet a „Mikor van nagyobb esélyem?” kérdésfeltevésre épülő problémasereg. A valószínűségszámításhoz köthető autentikus feladatoknál gyakran nyelvi-logikai vagy játékelméleti megfontolások vezetnek el a megoldáshoz.

Karcsi és Peti olyan céltáblára dobálják a gumilabdát, amelynek a közepén egy 20 centiméter oldalú négyzet van. Ez a négyzet éppen a közepén van egy másik, 30 centiméter oldalú négyzetnek, aminek a belső négyzeten kívül eső része a céltábla külső részének számít. Készíts rajzot erről a különös céltábláról! Az egyik versenyzőnek a céltábla belső négyzetét, a másiknak a céltábla külső részét kell eltalálnia. Karcsi választhat, hogy a céltábla melyik része az övé.

Mit javasolsz neki?

A tanulói válasznak tartalmaznia kell az eseményekhez tartozó területszámítási adatokat (ezek szerint a külső rész a nagyobb.). A feladat autenticitása megengedi ugyanakkor, hogy további kérdéseket tegyenek föl: hogyan történik a találatok összeszámlálása – jár-e pontlevonás, ha rossz területrészen landol a labda? Igaz-e, hogy ha valaki megpróbál eltalálni egy bizonyos pontot, akkor a dobásai várhatóan a ponthoz közelebb gyakrabban fordulnak majd elő, mint a ponttól távolabb?

A statisztika területén az autentikus feladatok azt várják el a tanulóktól, hogy képesek legyenek megtervezni és kivitelezni valamilyen adatgyűjtési folyamatot. Legyenek képesek kérdéseket megfogalmazni valamilyen tu-

lajdonság adatairól, ábrázolni az adatokat megfelelő ábrázolási módszerrel: oszlopdiagram, kördiagram vagy pontdiagram.

Az amerikai NCTM-standardok ötlete alapján fontoljuk meg a következő feladatot:

Hasonlítsd össze, hogy melyik papírrepülő repül messzebbre: az, amelyiket puha fénymásolópapírból készítesz, vagy az, amelyiket ugyanolyan méretű kemény kartonpapírból! Mindkét repülőt ugyanazzal a hajtogatási technikával készítsd!

Ez a feladat az adatgyűjtési folyamat megtervezését igényli. Hány dobást végezzünk, hogy megalapozott eredményhez jussunk? Hol végezzük a kísérletet? Milyen mérőeszközzel és milyen pontossággal mérjük a távolságokat? Hogyan ábrázoljuk az adatokat? Mi alapján hozzunk döntést és adjunk választ a kérdésre?

Látható, hogy autentikus feladatok jellemzői közül (önálló feladatki-tűzés, hétköznapi tevékenységben gyökerező matematikai modellalkotás, több lehetséges kimenet, kooperatív matematikai tevékenység) lényegében mindet felöleli az iménti feladat. Megjegyzendő, hogy az ilyen feladatok időigényesek, átlagos körülmények között a fél tanítási órát igénybe vehetik. Ugyanakkor sok jel mutat arra, hogy amit a vámon veszünk, azt a réven megnyerhetjük: az időigényes autentikus feladatok elsősorban a drill-izű gyakorlófeladatoktól vehetik el az erőforrásokat.

3.4. Irodalom

- Ambrus Gabriella (2007): *Valóságközeli matematika. Munkafüzet és tanári segédkönyv CD*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Boaler, J. (1994): When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to 'realistic' mathematics context. *British Educational Research Journal*, **20**. 551–564.
- Csapó Benő (2004): *Tudás és iskola*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- Csíkos Csaba (2007): *Metakogníció. A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- Csíkos Csaba és Csapó Benő (2011): A diagnosztikus matematika felmérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 141–168.
- Csíkos, C. és Verschaffel, L. (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.
- Greefrath, G. (2007): *Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben*. Aulis Verlag, Köln.
- Molnár Gyöngyvér (2002). A tudástranszfer. *Iskolakultúra* **12**. 2. sz. 65–75.
- OECD (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD, Paris.
- Palm, T. (2009): Theory of authentic task situations. In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. SensePublishers, Rotterdam. 3–19.
- Rényi Alfréd (2005): *Ars Mathematica*. Typotex Kiadó, Budapest.
- Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, Budapest.
- van den Huvel-Panhuizen, M. (2001): Realistic mathematics education as work in progress. In: Lin, F. L. (szerk.): *Common sense in mathematics education*. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan. 1–43.

4.

A matematikatudás tartalmi területei a diagnosztikus értékelés szempontjából

Csikos Csaba

Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Lajos Józsefné

Oktatási Hivatal

Makara Ágnes

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÖK Matematikai Tanszék

Szitányi Judit

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÖK Matematikai Tanszék

Zsinkó Erzsébet

Eötvös Loránd Tudományegyetem TÖK Matematikai Tanszék

A matematikai tudás értékelése során a szaktudományi tudásdimenziót a másik két dimenzióval párhuzamba állítva határozzuk meg. Míg a gondolkodási képességek dimenziója a tartalomtól függetlenül is működő pszichikai folyamatok matematikai beágyazottságára vonatkozik, a további két dimenzió már egy közös tényező két értéke mentén definiálható. A holland realisztikus matematikai mozgalom (ld. erről *Csikos és Verschaffel*, 2011) által kidolgozott matematizálás (mathematization) két típusa a vertikális és a horizontális matematizálás. *Van den Heuvel-Panhuizen és Drijvers* (2014, 522. o.) így foglalják össze a különbséget:

„A horizontális matematizálás során a valós élethelyzetekben gyökerező problémák elrendezése és megoldása során matematikai eszközöket használnak a tanulók. A vertikális matematizálás a matematika rendszerén be-

lúli újjászervezés folyamatát jelenti, amelynek eredményeképpen – a fogalmak és stratégiák közötti kapcsolatok felhasználásával – hatékonyabb utak jönnek létre.”

A szaktudományi értelemben vett matematikai tudás szerveződése, fejlődése és értékelése a vertikális matematizálás fogalmához kötődik, azaz a matematikai fogalmak és stratégiák rendszerén belül jönnek létre új kapcsolatok, és ezek folyamatosan fejlődnek, átrendeződnek. A tanulók fejében meglévő matematikai fogalmak és folyamatok diagnosztikus értékeléséhez a matematikatudománynak ugyanazokat a részterületeit használjuk föl, amelyeket az előző fejezetekben, és emellett a matematikai tudás két fő típusát különböztetjük meg: tárgyi tudás (matematikai fogalmak ismerete, matematikai eljárásokra vonatkozó tudás) és maguknak a matematikai gondolkodási folyamatoknak a működése. A kétféle tudástípust magasabb szinten összekapcsolja a metakogníció jelensége, melynek a matematikában tetten érhető jelentősége Pólya (1945/1957), Skemp (1975), majd – immár explicit szóhasználattal – Schoenfeld (1987) munkái nyomán széles körben ismertté vált. A metakognitív folyamatokra vonatkozó ismeretek a szaktárgyi tudás megszerzésének és működtetésének eszközei, így önmagában vett mérésük nem célja a matematikaoktatásnak. Ugyancsak kívül esik a diagnosztikus értékelés tartalmi keretein annak értelmezése, hogy egyes eljárások ismerete során milyen mértékű automatizálódás és milyen mértékű tudatosság figyelhető meg. Az automatizálódás ugyan alapvető ismerve a matematikai gondolkodási folyamatoknak, mérését az időkorlát mellett vizsgált teljesítménymérés jelenti (ld. Nagy, Józsa, Vidákovich és Fazekasné, 2004); mégis a szaktárgyi tudás mérésénél általános alapelv a „kellő idő” biztosítása a feladatok megoldásához.

A matematikatudomány területeinek osztályozására az Amerikai Matematikai Társaság 2010-es klasszifikációja (Ion és Sperber, 2012) használatos. Ebben a fő területek kétszámjegyű számokkal vannak jelölve, és az iskolában szokásosan ismert témakörök mind megtalálhatók benne. Például 11 a számelmélet, 51 az általános geometria kódja. Érdekesség, hogy a matematikatudomány részeként a matematikai nevelés is helyet kapott a rendszerben, 97-es kóddal. A tudomány tagozódását természetesen csak részben követheti az iskolai tananyag szerkezete: az általános és középiskolai törzsanyagban „többségben olyan matematikai ismereteket tanítanak szerte a világon, ami már az ókorban ismert volt” (Szendrei és Szendrei, 2011). Ezen túl a 20. századi metamatematika megjelenésétől datálhatóan az iskolai

matematikai alapfogalmak újragondolására is sor került: a halmazfogalom a 20. század második felétől utat tört már alsó tagozatos matematikába is.

Szendrei és Szendrei (2011) áttekintésében képet kaptunk a matematikatudomány iskolai jelenlétéről, annak történeti, tantervi és szaktudományi aspektusairól. Az ott leírtakat két újabb szemponttal gazdagítjuk a jelen kötet számára. Egyrészt megvizsgáljuk, hogy a nemzetközi szakirodalomban milyen viták zajlanak egyes alsó tagozatos matematikai témák tanításával kapcsolatban, másrészt a szaktárgyi tudás jelentőségéről szóló évszázados vitához igyekszünk néhány új megállapítást hozzátenni.

Elsőként az alábbi matematikai területek 1–6. osztályos jelenlétének problémái közül tekintjük át azokat, amelyek közvetlenül kapcsolódnak a tanulók diagnosztikus értékeléséhez: törtek, kombinatorika és a procedurális geometriai tudás.

A törtek tanításának hagyományos ideje a 3–4. osztály, és az egységtörteken keresztül jutnak el a tanulók a számláló és nevező fogalmáig. Széles tapasztalati bázissal, papírtépéssel, színezéssel, hajtogatással kerülnek közelebb az absztrakt törtek fogalmához. *Streefland (1991)* a törtfogalom fejlesztésére a gyermeki gondolkodásban meglévő igazságos elosztás alapelveit használta, ezzel a horizontális matematizálás erejét mutatva meg. Ez azt jelenti, hogy a törtfogalom tanítása (amely a szaktárgyi matematikatudás egyik fontos része) a matematikatudás hétköznapi alkalmazása felől indulhat. Ugyanazt a mély alapelvet követhetjük, amely a természettudományok tanítása során a meglévő és tudományos szempontból még pontatlan, naív tudásra építve kívánja a tudományosan helytálló fogalmakat fejleszteni (*Korom, 2005*).



Két testvér hazaér az iskolából, és szeretnének almát enni. De két, igen különböző méretű alma van otthon. Hogyan tudják igazságosan elosztani a két almát?

A kép forrása: <http://nicoraplaca.com/making-fractions-real-rme/>

A törtek tanításának és a törtfogalom meglétének, a törtekkel bánás pszichikus folyamatainak értékelése jelentős kihívást jelent a tanárok számára. Dreher és Kuntze (2015) kutatása azt mutatja, hogy a 11-12 éves korosztályt tanító matematikatanárok leginkább olyan feladatokat alkalmaznak a törtekkel kapcsolatos tudás értékelésére, amelyek elsősorban zárt feladatok, a törtet mint arányt értelmezték. Ugyanakkor az arányként értelmezéshez képest igencsak háttérbe szorult a törteknek mint műveleteknek (felosztás, elosztás) az értelmezése, márpedig ennek ebben a korosztályban helye volna.

Egy következő matematikai szaktárgyi terület, amelynek tanítása és értékelése számos vitás kérdést fölvetett, a kombinatorika. Nem véletlen, hogy a leendő tanítók nemcsak hogy nehéznek tartják a témakört, de – ettől nyilván nem függetlenül – a témakör tanítását a legnagyobb kihívásnak érzik, összehasonlítva azt más matematikai területekkel (Sztányi és Csikos, 2015). Egy adott kombinatorikai probléma megoldása a gondolkodás több szintjéhez köthető, és ezekből az első kettőnek a kialakítása (esetek következetes megkülönböztetése és az összes lehetőség megkeresése) az alsó tagozat feladata. Ugyanakkor a következő gondolkodási szint, amely az összes lehetséges eset szisztematikus összegyűjtését jelenti, valamely – általában vizualításra épülő (mint pl. lépcsőzetes elrendezés, poligon, gráf) – stratégia alkalmazását jelenti, még a leendő tanítók esetében is kihívást jelent. A kombinatorikai témák esetében mindebből következően az összes eset összeszámlálását és az eredményül előálló számadatot kérhetjük. Erre a célra nyílt és zárt feladatok egyaránt megfelelőek.

Harmadik kritikus területként a geometriai tudás fejlődését említjük. A geometriai tudás tárgyi tudáselemektől a geometriai konstruálások folyamatainak ismeretéig sokféle tudáselem együtteséből épül föl. Ez felveti azt a kérdést, hogy amennyiben ezek egyikének-másikának mérésére nem nyújt objektív lehetőséget az online diagnosztikus tesztelés (kifejezetten a konstruálások területére gondolunk), a többi területen nyújtott teljesítmény mérése mennyiben pótolja ezt a hiányosságot. Huey-Min, Bor-Chen és Ssu-Ni (2015) idevágó eredményei azt mutatták, hogy egy 4.-től 6. osztályig tartó longitudinális vizsgálatban a tajvani gyerekek geometriai tudása három területen (fogalmi megértés, procedurális tudás és problémamegoldás) egyenletesen, lineárisan fejlődött. Ez természetes következménye lehet a geometriai tudásterületek egymásra utaltságának és a tanári munka magas színvonalának egyaránt. Ebből ugyanakkor az következik, hogy amennyi-

ben átmenetileg, az infokommunikációs eszközök jelenlegi szintjén valamely részben le kell mondanunk például a procedurális tudás teszteléséről, a többi geometriai tudásterületről nyert adatok összességében várhatóan jól mutatják a teljes geometriai tudás fejlettségét.

A matematika területén – más tantárgyakhoz viszonyítva – kevésbé élesen vetődött föl a 20. század folyamán a tudni valamit és a tudni valamiről dilemmája, azaz a propozicionális és tárgyi tudás kettősége, relatív fontossága. A matematika tantárgy relatív kevés fogalmat és számos algoritmust kínál az 1–6. osztályos korosztálynak. A tipikus matematikai teszt nem az ismeretek fontos felidézéséről, hanem a készségek és képességek működéséről szól.

Annak illusztrálására, hogy a kétféle tudástípus egymáshoz viszonyított súlya egy konkrét matematikai területen hogyan alakult, *Gilmore és Bryant* (2008) kutatására hívjuk föl a figyelmet. Kutatásukban 8-9 éves gyermekek számolási készségét, valamint az összeadás és kivonás inverz jellegére vonatkozó fogalmi megértést vizsgálták. A gyerekek három csoportba kerültek: magas szintű fogalmi megértés és jó számolási készség; alacsony szintű fogalmi megértés és győnge számolási készség; végül magas szintű fogalmi megértés és alacsony szintű számolási készség. (Olyan eset nem volt jellemző, hogy valaki jó számolási készséget érjen el alacsony szintű fogalmi megértés mellett.) A rejtélyes harmadik csoport esetén azt a magyarázatot találták, hogy nem a számolási készség lemaradásáról van szó a fogalmi megértéhez képest, hanem inkább a fogalmi megértés viszonylag magas, előrehaladott szintjéről, amelyet leszakadva követ a számolási készség. Ez a jelenség akár általános is lehet más matematikai területeken: valamely dologról tudni és azt megérteni gyakran megelőzi a hosszabb fejlődési időt kívánó procedurális tudást. Emiatt a diagnosztikus értékelés feladatainak elemzése során fontos megkülönböztetnünk a tárgyi tudást és fogalmi megértést mérő feladatokat a készség jellegű tudást vizsgáló feladatoktól.

Fejezetünk a már megszokott szerkezetet követi: A három életkori sávnak megfelelően 4.1, 4.2 és 4.3 alfejezetekre osztjuk, majd ezeken belül, harmadik szintű alponként jelennek meg a matematikatudomány részterületei. Az ezeken belüli esetleges további szerkezeti elemeket már nem számozzuk, hanem tipográfiai megoldásokkal különítjük el.

4.1. Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Az 1–2. évfolyam, majd a további két életkori sáv terjedelmi jellemzőit összevetve előrebocsátjuk, hogy az 5–6. évfolyamokhoz rendelt karcsúbb terjedelem semmiképpen sem annak az évfolyami sávnak a negligálását jelenti, hanem sokkal inkább azt, hogy az alsóbb évfolyamokon már megismert alapelvek alkalmazásához nem szükséges ismétlésekbe bocsátkozni. Az egyes életkori sávokon belül ugyanakkor a tematikus részterületek tartalmi arányainak lehet olyan üzenete, hogy mely évfolyamokon mely területek mérése jelent kihívást még a szakértők számára is. Ilyen értelemben az 1–2. évfolyamokon a Számok, műveletek, algebra területet, a 3–4. évfolyamos tanulóknál a geometria mérését elemeztük és illusztráltuk bőségesebben. Külön megemlítjük a Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika területet, amelynek mérése (és természetesen fejlesztése) nem csupán lehetséges, hanem szükséges már 1. osztályos kortól. A számos mintafeladat, amelyet ennek a területnek szenteltünk, a terület jelentőségét is szimbolizálja.

4.1.1. Számok, műveletek, algebra

Számok

*A számfogalom kialakulása szoros kapcsolatban áll az „ugyanannyi” relációval. Elsősorban a párosítással kapcsolatos változatos tevékenységek – illeszkedve tárgyakhoz, képekhez, rajzokhoz, szavakhoz – segítik a több, kevesebb, ugyanannyi fogalmak értését és a megfelelő szimbólumok ($<$; $>$; $=$) meg- és felismerését, helyes tartalommal való feltöltését. A sokféle tevékenység kapcsán fokozatosan meggyőződnek a diákok arról, ha két csoportban, halmazban ugyanannyi elem van, akkor azok számossága megegyezik, azaz – ugyanaz a szám jellemzi őket, ugyanaz a szám kapcsolódik hozzájuk – a bennük szereplő tárgyak, dolgok, élőlények stb. *száma ugyanannyi darab*. Ezen kapcsolat, összetartozás biztos értése, tudása a helyes számfogalom-kialakulás feltétele (D1. feladat).*

D1. feladat

Húzz a fa alá három almát és két körtét!




Vissza Tovább

A D2. feladatban a darabszámok összehasonlítása van a középpontban. A tárgyakat megszámlálhatja, párba rendezheti, csoportosíthatja a tanuló. Fontos a sok-sok konkrét tapasztalat, a számjelek képekhez való kapcsolása, a számkártyák használata. A számok (számszimbólumok) írása később kezdődhet.

D2. feladat

A kis négyzetek melyik oldalán látsz több tárgyat?
Ha döntöttél, írd a négyzetekbe a megfelelő jelet (<; >; =)!

Vissza Tovább

A számfogalom kialakítását a mérőszámokkal való tapasztalati ismerkedés is segíti. Az első és a második évfolyamon – folytatva az óvodai előkészítést – okosan megtervezett és irányított játékok sokaságának (pl. kockákkal való térkitöltés, kancsó vízzel, homokkal, babbal, búzával, borsóval való kitöltése pohár segítségével, összeöntögetések) eredménye, hogy képessé válnak a tanulók viszonyításokra (például több, kevesebb, hányszor akkora) és a darabszám mellett a mérőszám helyes használatára. Olyan tapasztalatok tudatosulnak, mint például: (1) ugyanazon kancsó megtöltéséhez kisebb pohárral többször, nagyobb pohárral kevesebbszer kell tölteni, (2) ugyanazt a hosszúságot nagyobb egységből kevesebb darabbal, kisebb egységből több darabbal tudom kirakni, (3) ugyanazon egységeket használva, a mérlegen a nehezebb tárgyakat több, a könnyebb tárgyakat kevesebb egységgel tudom kiegyensúlyozni. Ezen mérésekhez az egységet szabadon választhatjuk, és a hivatalos mértékegységeket is választhatjuk anélkül, hogy ismeretüket megkövetelnénk.

A konkrét tömegek összehasonlítása során alkalmazzuk a hagyományos kétkarú mérleget, mely az egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket kitűnően szemlélteti. (Ez a tapasztalat olyan élményeket, emlékeket hagy a gyerekekben, melyre később, a mérlegelv tanítása során is építhetünk.)

D3. feladat

Pótold a súlyzókon lévő számokat úgy, hogy egyenlő legyen a két oldal!

10 + 3 15 -

20 - 9 + 6

9 + 16 - 4

20 - 13 + 2

Vissza Tovább

A *D3. feladat* a kétkarú mérleg használatát mutatja be kissé szokatlan formában.

A méréseknél a változatos egységválasztás (pl. a színes rudak használata) segíti a számfogalom általánosabb, biztosabb alapjának kialakítását. A sokféle mérési tapasztalat hozzájárul az arányos változások gondolatának előkészítéséhez.

A gyerekek gyakran rendezik sorba játékaikat. A figurák sorrendje, sorszáma változhat. Ez a mozzanat magában hordozza annak a tudatosulását, hogy a sorszám nem rögzül egy adott figurához, hanem attól függ, hogy a figurákat hogyan sorakoztatjuk fel, és honnan kezdjük a megszámozásukat. Megtapasztaljuk, hogy a figurák száma attól nem változik, hogy milyen sorrendbe állítjuk vagy melyik irányból kezdjük megszámlálni azokat. Adott számú figura sokféle konkrét sorrendezése, a figurák helyének változtatása, az első, második, harmadik, stb. kifejezések gyakori ismétlése hozzájárul a sorszám fogalmának helyes kialakulásához, valamint a szám, sorszám fogalmak különbözőségének megértéséhez, támogatja a számegyenes fogalmának előkészítését is (pl. sorszámok növekedésének, csökkenésének iránya, számszomszédok megkeresése).

A számfogalom fejlettségének értékelése külső szakemberek által megfigyelhető jellemzők, tulajdonságok tesztelésével történik. A fejlesztő értékelés alapfeltétele, hogy ismerjük a megfelelő szintű tudás kialakulásának, és ebből következően a fejlődési nehézségek diagnosztizálásának lehetőségeit, folyamatát.

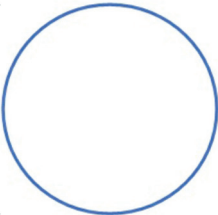
Az első évfolyam végéig legalább 20-ig, a második évfolyam végéig legalább 100-ig meg kell ismerni a diákoknak a természetes számokat. Ez azt jelenti, hogy ebben a számkörben ki kell alakítani a biztos számfogalmat, meg kell ismerni és jól kell alkalmazni az olvasás-írás folyamán a számszimbólumokat. A követelmények sora folytatódik: számszomszédok, páros vagy páratlan a szám, nagyság szerinti rendezés, egymáshoz viszonyított helyzetük (számegyenes), bontásuk többféleképpen (pl. tízesek és egyesek összegére), kerekítés tízesekre (készpénzes vásárláskor a forint alapú fizetés során 5-re vagy 10-re).

A *D4. feladat* a számfogalom fejlettségének diagnosztikus értékelésére mutat példát:

D4. feladat

Húzd az ábrán levő számjegyeket a körbe!

6	Z	9	F
4		12	
	M		3
7		?	



Vissza Tovább

A negatív számok (találkozás irányított mennyiségekkel [pl. melegebb-hidegebb; 8 óra előtt, után, tőlem jobbra, balra], a törtszámok (egész egyenlő részekre darabolása, hajtogatása stb.) tapasztalati megközelítésére vonatkozó tevékenységek is szerepelnek már ezen a két évfolyamon.

A nulla nemcsak mint szimbólum jelent nehézséget a kisiskolásoknak, hanem a nullának mint számnak a kezelése is nagy feladat. A nulla számjegy és számnév kitüntetett jelentőségét illusztrálja a D5. *mintafeladat*:

D5. feladat

Melyik művelet eredménye a nagyobb?

Húzd a < vagy > jelet a közöttük levő négyzetbe!

9 - 2		5 + 1
9 - 2		6 + 0

< >

Vissza Tovább

E két évfolyamon a különböző tárgyak, és az apróbb-nagyobb rajzos figurák csoportosításával, mely leggyakrabban tízesével történik, a tí-

zes-százaz átlépések tudatosításával már elkezdjük a számrendszer és helyiértékrendszer fogalmi előkészítését is. Elvárás az elemi tájékozottság (konkrét számok esetében) a tízes számrendszerben, az egyes és tízes fogalmának ismerete.

Műveletek

A zárójel összekapcsoló szerepét, értelmezését, használatát is konkrét feladatok (egyszerű szöveges feladatok, összeg, különbség elvétele, illetve szorzása) alapján tapasztalják meg a tanulók.

Az első évfolyamon a szóbeli számolási eljárásokat, az összeadás és kivonás elvégzését készségszinten várjuk el a 20-as számkörben, az eredmények ellenőrzésével együtt. A tanult számok két szám összegére való bontása, pótlások és három tag összeadásának ismerete elsöben a gyakorlottság szintjén elvárás, a második évfolyamon már a 100-as számkörben olyan alapelvárás, mely kiegészül a „kis egyszeregy” biztonságos ismeretével. A „kis egyszeregy” a szorzás és bennfoglalás táblázatát jelenti a százaz számkörben.

Míg az első évfolyamon egyfajta gyakorlottságot szereznek a gyerekek a hiányos műveletek, nyitott mondatok kiegészítése, állítások igazságának ellenőrzése területén, addig a második évfolyamon mindezt kiegészítve, már nemcsak igazzá, hanem „nem igazzá” is tesznek akár kétváltozós nyitott mondatokat is. Állításokat fogalmaznak meg, s döntenek azok igazságáról.

Algebra

Az első két évfolyamon bevezetett szimbólumokat, azok szóbeli kifejezését és írásbeli jelölését a különböző összefüggésekben, kapcsolatokban (pl. nyitott mondatok) az algebra előkészítését szolgáló elemi szereplőknek foghatjuk fel. Erre mutat példát a *D6. feladat*.

Az ilyen feladatokban ugyanazok a szimbólumok ugyanazokat a számokat jelölik, de különböző szimbólumok nem csak különböző számokat jelölhetnek.

Például: $\triangle + \square = 6$ nyitott mondatnak a $\square = 3$, $\triangle = 3$ számpár is megoldása.

D6. feladat

Az alábbi feladványokban néhány kétjegyű szám egyik számjegyét letakartuk.

Húzd a megfelelő számjegyet az alakzat mellé!

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

5

=

75

:

19

4

<

53

:

Mely számjegyet takarhattuk le, ha a letakart számjegy a két számban azonos?

Húzd a megfelelő számjegyet az alakzat mellé!

27

9

<

9

:

5

≤

4

≤

41

:

Vissza

Tovább

Az algebrai szimbólumok iskolai alkalmazásának jelentős terepét jelentik az olyan szöveges feladatok, amelyek egy vagy két számtani művelet elvégzésével megoldhatók, és amelyeknél a feladat megértését elsősorban a felírt nyitott mondat igazolja.

Az első évfolyamon az egyszerűbb szöveges feladatok két adat összeadásával vagy kivonásával megoldhatók. Az ilyen típusú feladatoknál nem fontos az ismeretlenre szimbólumot bevezetni. A szimbólum bevezetésének akkor van jelentősége, ha a feladatban az összeg valamelyik tagja, illetve a kisebbítendő vagy a kivonandó valamelyike az ismeretlen. A szimbólumok jelentéstartalmát már egyszerű feladatoknál is rögzíteni kell szóban vagy írásban (D7. feladat).

202

D7. feladat

Milyen színűek a virágok? **Válassz!**

nagyobb tízes
szomszédja a 90

számjegyeinek összege
a 9 kétszerese

a 10 hatszorosa

a legkisebb háromjegyű szám

az 5 tízszerese

A



8t + 6e

B



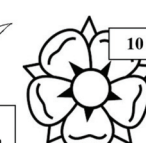
a 100 fele

C



a 100 kisebb
számszomszédja

D



10 x 10

A:

B:

C:

D:

Vissza
Tovább

Legördülő lista szövege: piros / kék / zöld / narancs / lila

Már ebben a korban is adhatunk olyan egyszerű szöveges feladatot, melynek körültekintő értelmezésével sok felesleges munkától szabadul meg diák. Például a következő feladat is ilyen.

Melyik az a szám, amely 17-nél nagyobb, de 13-nál kisebb?

Megoldás: *Nincs ilyen szám.* (Ha a számegyenesen bejelöltetjük a részmegoldásokat, világosan látszik, hogy nincs a két feltételnek egyszerre megfelelő szám.)

Az ilyen típusú feladatok elősegítik, hogy az azonnali műveletkijelölésre vagy válaszadásra törekvés helyett először a feladatot próbálják megérteni.

A tanult számjelek, műveleti jelek, relációs jelek, ismeretlent jelölő jelek, majd később a lejegyzés, a zárójelek segítségével modellalkotás komoly absztrakció a kisdíák számára. A tanulók által felfedezett összefüggéseknek – és azok közlési módszereinek – megvitatása sokrétű gondolkodási folyamatokat segít elő. Egy konkrét képet, szöveget, látványt sok irányból közelíthetjük meg, sokféle gondolatot válthat ki belőlünk, s a gondolataink lenyomata, rögzítése is sokféleképpen lehet jó (D8. feladat).

D8. feladat

◀

Luci anyák napjára egy csokor mezei virágot adott a mamájának. 15 pitypang virág és ennél 10-zel több pipacs virág volt benne.

Hány virágból állt ez a csokor?

Vissza

Tovább ▶

A szöveges feladatok szimbolikus lejegyzése, a különböző konkrét lejegyzésekhez kapcsolódó szövegalkotás, azaz az „oda-vissza út” sokszori és konkrét bejárása mélyíti a fogalmak tartalmának megértését, képessé teszi a tanulókat egyszerű szöveges feladatok matematikai nyelven való megfogalmazására, illetve a matematikai szimbólumokhoz való adekvát, egyszerű szöveg alkotására.

A szöveges feladatok jelentős része a nyitott mondatokhoz kapcsolódik. Adott szöveg alapján a nyitott mondat szóbeli megfogalmazása, írásbeli lejegyzése, a benne szereplő ismeretlen(ek) konkretizálása, azaz behelyettesítése konkrét elemekkel igazzá vagy hamissá tehetik az így keletkezett állítást. A nyitott mondatok többségének értelmezési tartománya a tanult számhalmaz elemeire korlátozódik, de számos más területről, mondjuk a növény- vagy állatvilágból, mesevilágból is megválaszthatók az alaphalmaz elemei.

A következő feladatban többféle állat képét tartalmazó kártyákat rakunk az asztalra. A kártyákon egy háziállat vagy egy vadállat képe van. A megoldás során a kiválasztott kártyákat tevőlegesen a keretbe kell helyezni, s ezután dönteni kell az állítás igaz voltáról. Ez előrevetíti annak szükségességét, hogy az alaphalmaz minden eleméről el kell dönteni, megoldás-e vagy sem (D9. feladat).

D9. feladat

Az alábbi kártyák közül **húzd** azokat a halmazba, melyek igazá teszik az állítást!








A - be tett kártyán háziállat látható.

Vissza
Tovább

A számfeladatok megoldása során a zárójel felesleges használatáról, illetve az elhelyezésének az eredményt befolyásoló szerepéről gyűjthetnek tapasztalatot a tanulók. A zárójelek alkalmazásának indokoltságát a szöveges feladatokhoz kapcsolódóan is be kell mutatnunk (D10. feladat).

D10. feladat

Kati két éven keresztül egy-egy tábla csokit vett a négy fiú unokatestvérének és a három barátnőjének a születésnapjukra.

Ez alatt az idő alatt hány tábla csokit vett, ha csak ezeknek a gyerekeknek vett tábla csokit?

Kattints a helyes megoldást adó műveletsorok előtti gombokra!

☐ $2 + 4 + 3$

☐ $2 \times (4 + 3)$

☐ $2 \times 4 + 3$

☐ $2 \times 4 + 2 \times 3$

☐ $(3 + 4) \times 2$

Vissza
Tovább

A válaszok helyességét a műveletsorok végeredményének kiszámításával és az eredmény „kipróbálgatásával” fogják ellenőrizni a gyerekek. Lesznek, akik következtetéssel számolják ki az eredményt, s megkeresik ezen eredményt adó műveletsor(oka)t, és lesznek – valószínűleg kevesebben – a végeredmény ismerete nélkül is a jó megoldást adó műveletsorokat kiválasztó gyerekek (*D11. feladat*).

D11. feladat

Húzd a szöveges feladatokhoz a megfelelő megoldási tervet!

Rita matricás füzetében 4 matrica volt. Egy héten keresztül mindennap kapott 5 matricát. A hétvégén 2 darabot odaajándékozott a testvérének. Hány matricája van most?	
Nagyi a virágágyásban 7 sorba ültetett virágot, minden sorba 4 tulipánt és 5 jácintot. Sajnos 2 sort széttűrt a vakond. Hány szál virág kelt ki az ágyásban?	
Tomi elhatározta, hogy a nyáron mindennap 4 kivonást és 5 összeadást old meg. Az egyik héten 2 feladattal kevesebbet számolt ki. Hány feladatot oldott meg azon a héten?	
Hanna kapott egy új mesekönyvet. Megállapodtak, hogy anyja felolvas 4 oldalt és Hanna egy hétig minden este 5 oldalt. 2 nap azonban nem jutott idő az olvasásra. Hány oldalt olvastak el a könyvből?	

$4 + 5 \cdot (7 - 2) = \square$

$4 + 5 \cdot 7 - 2 = \square$

$4 \cdot (5 + 7 - 2) = \square$

$(4 + 5) \cdot 7 - 2 = \square$

$(4 + 5) \cdot (7 - 2) = \square$

Vissza
Tovább

Az első két évfolyamon váljanak képessé a tanulók állítások megfogalmazására egyszerű tevékenységhez, képhez, rajzhoz kapcsolódóan, tudjanak dönteni azok igazságtartalmáról, legyenek képesek nyitott mondatokat kiegészítéssel igazzá tenni, behelyettesítéssel lezárni.

A feladatmegoldó stratégiák fejlesztéséhez fontos, hogy kétirányú kapcsolat alakuljon ki a feladatban szereplő dolgok és viszonyok, valamint a megoldáshoz vezető matematikai lépések között. Emiatt már 1–2. osztályban képesnek kell lenniük a tanulónak arra, hogy adott matematikai struktúrához megtalálják a megfelelő szöveges (vagy rajzos) feladatot. E két évfolyam végére tudjanak számfeladatokat, nyitott mondatokat közösen is és önállóan is megfogalmazni sokféle tevékenység és egyszerű szöve-

gek alapján. Mint fentebb láttuk, adott megoldási lehetőségek közül tudják kiválasztani a szöveghez illő(ke)t, és fordítva is, számfeladathoz, nyitott mondathoz tudják a megadott szövegekből a helyeset kiválasztani, illetve egyszerű, világosan fogalmazott szövegeket alkotni (D12. feladat).

D12. feladat

Válaszd ki a megadott szövegek közül az alábbi nyitott mondathoz illőket, és kattints az előttük levő gombra!

$3 + 37 + 28 + \square + \square = 100$

☐

A tanyán élő Bori néni összesen 100 baromfit nevel. Van három kakasa, 37 tyúkjá és 28 kacsája, és ugyanannyi libája, mint pulykája. [Hány libája van Bori néninek?](#)

☐

Évike a diófájuk alatt gyűjtögette a termést. Hétfőn 3 szem diót, kedden 37 szem diót, szerdán 28 szem diót gyűjtött. Ugyanannyi szem diót gyűjtött csütörtökön és pénteken, szombaton viszont egész nap 100 szem diót gyűjtött. Vasárnap nem dolgozott, csak megszámolta a szemeket. [Hány szem diót gyűjtött a héten?](#)

☐

Kati néni az unokája születési bulijára ötféle süteményt sütött. Zserbót, hókiflit, csokis golyókat, meggyes pítét és almás rétest. Mindenből 50 darabot vagy 50 szeletet vitt a bulira. A buli végén megszámolta a maradék süteményeket, és így szólt: Éppen 100 sütemény maradt. Úgy látom a csokis golyónak volt a legnagyobb sikere, csak 3 darab maradt belőle. Egyformán fogyott a pite és a rétes. Legkevésbé a hókiflit szerették, 37 darabot hagytak meg belőle, és 28 szeletet nem ettek meg a zserbóból sem. [Hány szelet meggyes pite maradt meg?](#)

[Vissza](#)
[Tovább](#)

A 2. osztály végére a tanulók tudják, hogy a szöveges feladatok megoldásának az első és legfontosabb lépése a megértés. A megértést elősegíti a lejátszás, megjelenítés, ábrázolás, szükség esetén az értelmes átfogalmazás; a megértést követi a lejegyzés számfeladattal vagy nyitott mondattal, sorozattal, táblázattal, ezután jöhet a számolás, szabálykeresés, majd az ellenőrzés, az eredeti problémára való vonatkoztatás, majd az összevetés az adatokkal, valósággal, előzetes becsléssel, végül a válasz megfogalmazása, lejegyzése. Az értékelés során a szöveges feladatok megoldásának lépéseit önállóan értékelhető feladategységekre bontjuk, ezzel lehetővé tesszük, hogy esetleges számolási hibák ne tegyék értéktelenné a feladatmegoldás további, elvileg helyes lépéseit.

207

4.1.2. Relációk, függvények

1–2. osztályos korban a következő fejlesztési feladatok és értékelési követelmények jelentkeznek a témakör fogalmi bázisával kapcsolatban: sorozatok folytatása és szabálykeresés tárgyakból, rajzos jelekből álló sorozatok esetén. A tanulóknak képesnek kell lenniük adott szabály alapján sorozatokat generálni. A sorozatokat meghatározó szabályszerűséget tudniuk kell szóban is megfogalmazni.

Adatpárok és adathármasok közötti összefüggések területén 1–2. osztály végére a következő követelmények fogalmazhatók meg. A tanulók legyenek képesek két halmaz összetartozó tagjai között a kapcsolatot felismerni, és a felismert szabály alapján a hozzárendelést megvalósítani. A környezetükből ismert tárgyak, személyek, szavak és számok egyaránt szerepelhetnek a kapcsolatba hozandó halmazok elemei között. Legyenek képesek a számok és mennyiségek közötti kapcsolatokat nyíllal jelölni. Legyenek képesek az összetartozó számpárokat táblázatba rendezni, a táblázatba rendezett számpárok esetén pedig („gépjáték”) a szabályt felismerni és folytatni (D13. feladat).

D13. feladat

Három gyerek töltötte ki a gépes játékhoz tartozó táblázatot.

Egészítsd ki Máté és Dani táblázatát!

Máté		6	9	3	8
		12	9	15	

Dani		6	9	3	
		12	18	6	8

Bori		6	9	3	8
		12	15	9	14

Válaszd ki, melyik szabály alapján dolgoztak a gyerekek! **Húzd** a nevük mellé a megfelelő szabályt!

Máté

Dani

Bori

+ = 18

+ =

+ 6 =

[Vissza](#)

[Tovább](#)

Ebben a korosztályban a számpárok közötti összefüggéseket jelölő szabály egyszerű, lineáris összefüggést kifejező szabály lehet, vagy pedig a számjegyek összegével, a számok alaki tulajdonságaival kapcsolatos. Legyenek képesek az összetartozó adattípárral megadott konkrét pontok ábrázolására a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

A számhármások közötti összefüggések legtipikusabb eseteiben alapműveleti számolásban szereplő számokról és a műveletvégzés eredményéről van szó. Például egy elvégzett kivonás műveletben három számadat szerepel, amelyek helye a műveleti jelekhez képest nem felcserélhető. Az így összetartozó számhármásokat gépjátékszerű táblázatba rendezhetjük.

A relációk és függvények témakör jellemző feladattípusai között találjuk 1–2. osztályban a sorozatok folytatását, kiegészítését, amelyhez a szabály megállapítása társul.

A sorozatok elemei lehetnek

- egyszerű geometriai alakzatok, pl. $\square \blacklozenge \bigcirc \square \blacklozenge \bigcirc \square \blacklozenge \dots$
- számok, pl. 1 3 5 7 ...
- különböző tartalmi területekről származó szimbólumok, pl. a á b...

2. osztály végére a tanulóknak képesnek kell lenniük felismerni a hánados-sorozat szabályát is a 100-as számkör szorzótábláján belül.

Az adattípusok közötti összefüggésekre épülő feladatok jellemző formája a táblázatos elrendezés, ahol a szabály felismerését követően a táblázat folytatását várjuk el. Hasonlóan a sorozatokhoz, az adattípusok is lehetnek matematikai tartalmúak vagy más szimbólumrendszerekhez kötöttek (*D14. feladat*), a matematikai tartalomon belül pedig jellemzően geometriai és számtani jelenségek fordulnak elő. Megjegyezzük, hogy a szövegesfeladat-jelleg itt is elsősorban abból adódik, hogy a feladatokban megfigyelhető szabályok megfogalmazása szóbeli körülírást igényel.

D14. feladat

Folytasd a táblázatok kitöltését!

5	11	3	4	14
3	9	1		

g	t		c	
gy	ty	ly	cs	zs

Vissza Tovább

Az adatpárok táblázatos elrendezésében 2. osztály végére meg kell jelennie olyan szimbólumoknak, amelyek egy-egy adatsort jeleznek (pl. az egyik adatsor jele $\triangle$, a másiké pedig $\square$), és a szabályt az absztrakt jelek segítségével kell megfogalmazni (D15. feladat).

D15. feladat

Mi lehet a szabály?

Folytasd a táblázat kitöltését!

$\blacklozenge$	3	4	6	7
O	8	10	14	

Vissza Tovább

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A $\triangle$ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a $\square$ sorában lévő számot.” Vagy: „A $\triangle$ sorában lévő szám kétszeresét veszem, majd ehhez 2-t hozzáadva megkapom a $\square$ sorában lévő számot.” Feladatunk az induktív gondolkodásra épül, ebből adódóan más megoldási mintázatok is elképzelhetők. Célunk itt az egyszerű szimbólumok bevezetésének és használatának illusztrálása volt.

4.1.3. Geometria

Az 1–2. évfolyamon a geometria tanításának legfőbb eszköze a cselekvő tevékenység. A változatos tevékenységek során megszerzett tapasztalatok, ismeretek megalapozzák az alsó tagozat, de a későbbi évek fogalmi építkezését is. Ebben az életkorban nyilvánvaló a térbeli alakzatokkal való tevékenykedés elsőbbsége, hiszen a kézbefogás, megtapogatás, egyáltalán a kézzel érzékelés a környező világgal való ismerkedés első élményei közé tartozik. Ennek okán a geometriai követelmények egyik pillérét képező konstruálások a háromdimenziós (térbeli) formákkal kezdődnek. Az óvodáskorú gyermek a játécai közül már ki tudja választani azt, amelyre rákérdezzünk az általa sokszor hallott és megszokott szavakkal (pl. Add ide nekem a piros kockát!): A szavak, nevek ilyenkor még a konkrét tárgyhoz szorosan kötődő asszociációként működnek; a kocka fogalma, mint absztrahált fogalom csak tudatos iskolai fejlesztés eredményeként jön létre. A fejlesztés lényege – különösen az alsó tagozaton – az aktív és tudatos tevékenykedés, a konkrét cselekvésekhez kötődő felfedeztetés, a fogalmak (és szavak) következetes használata. Az óvodából érkező gyermekek jogos igénye, elvárása a játék. Az életkori sajátosságokat, a pszichológiai fejlődést, a mentális fejlődést figyelembe vevő tankönyvek mindegyike kínál olyan játékos tevékenységeket, apróbb versenyeket, humoros feladványokat, amelyek az egészséges fejlesztéshez elengedhetetlenek.

A geometriához kapcsolódó követelményeket lényegében négy nagy csoportba rendezhetjük: konstruálások, transzformációk, tájékozódás és mérés.

Konstruálások

A geometria e részterületének középpontjában térbeli, síkbeli alkotások, s ezek tulajdonságainak vizsgálata áll.

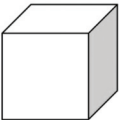
Elsősorban a szabadon, majd bizonyos feltételekhez kötődő alkotások, alakzatok formai tulajdonságait vizsgáljuk, megalapozzuk az erre épülő fogalmak kialakulását. A változatos, manipulatív szintű cselekvő tevékenységek sorozata – vágások, hajtogatások, ragasztások, áttetsző papírra másolások, színezések, kirakások, rajzolások, kockákból való építés újabb kockák hozzátevéssel, elvételével – az elkészült alakzatok tulajdonságainak megismerése. Azonosságokat és különbségeket vesznek észre, ezeket a gyermeki szókinccsel szavakba öntik. A tanulók képessé válnak alakzatok

azonosítására, megkülönböztetésére az alakzatok képe, illetve geometriai tulajdonságai alapján; képesek az alakzatok szétválogatására – egyszerű, konkrét feltételt megadva – a geometriai tulajdonságok alapján.

Felismerik összkép alapján a kockát, téglateetet, négyzetet, téglalapot. Fokozatosan fejlődik a geometriai szimbólumrendszer tartalommal való megtöltése, az összefüggések megértése (D16. és D17. feladatok).

D16. feladat

Nevezd meg a képeken látható alakzatokat!









Vissza
Tovább

D17. feladat

Figyeld meg a közlekedési táblákat!

◀
▶

a) Melyik tábla kör alakú? Kattints rá!






b) Melyik tábla nem négyzet alakú? Kattints rá!






c) Melyik négyzet alakú táblán van háromszög alakú ábra? Kattints rá!






d) Melyik háromszög alakú táblán látható kör? Kattints rá!







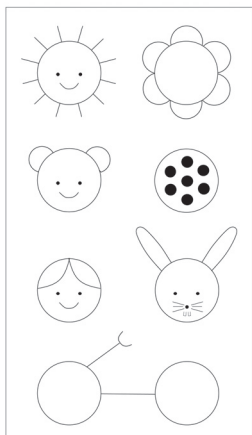
Vissza
Tovább

Általában a második évfolyamon kerül sor a testek és síkidomok (itt kiemeltebb szerep jut a négyzeteknek, téglalapoknak) jellemzőinek alaposabb vizsgálatára, ahol a görbe vonal, egyenes vonal, bezáródó (zárt) vonal, csúcs, lap és él fogalmak értő használata, sőt adott esetben számszerű meghatározása segít az alakzatok jellemzésében. Az alakzatok alapos megfigyelését követően, egyszerűbb esetekben, megadott alaprajzokra különböző testeket építhetünk, s a jól készített árnyképekből (vetületekből) megpróbálhatunk alakzatokat rekonstruálni.

- 1. Tegyétek külön csoportba az előttetek lévő kártyák közül azokat, amelyeken kört láttok!*
- 2. Rakjátok külön csoportba a betűkártyák közül azokat, melyeken a betűk csak egyenes vonalakból állnak!*
- 3. Vegyétek elő a színes rudakat tartalmazó dobozt. Tegyétek a padon középre a piros rudat, alája a nála kisebbeket! (Mivel a doboz minden színből több rudat tartalmazhat, adhatunk még egy utasítást: „Elég egy színből csak egy darab rudat kirakni.”)*
- 4. Építsetek a színes rudak felhasználásával díszes kerítést! Egy négytornyú várat! Stb.*
- 5. Építsetek meg ti is az asztalon látható testet színes rudakból! (Kockát, téglatestet vagy ezekből épített egyszerű alakzatokat rakjunk ki először.)*

Válasszunk olyan feladatokat is, melyek vidám, játékos hangulatot teremthetnek, de sokféleleppben fejlesztenek.

- 1. A lapon látható nagy kört egészítsétek ki szabadon úgy, hogy egy nyuszifejet lássunk! Színezzétek is ki! (A szemmel való ellenőrzést követően megdicsérjük az ötleteket.)*
- 2. A kört csak háromszögekkel egészíthetitek ki úgy, hogy a végén egy cicafejet lássunk.*
- 3. Az előttetek lévő lapon köröket láttok. Egészítsétek ki a körök mindegyikét szabadon!*



A munka végén tűzzük a nagy táblára a rajzokat, és beszéljünk azokról:

- *Mi a közös, mi a különböző a rajzokon?*
- *Hány képen van állatfigura?*
- *Ki mit rajzolt az első sor második körére? És a harmadik sor első körére?*
- *Tegyenek fel kérdéseket a kis kiállítással kapcsolatban!*
- *Mondjanak igaz és hamis állításokat, véleményyt a rajzokról!*
- *Melyek tetszenek a legjobban? Miért?*
- *Próbálják kitalálni, hogy melyik rajz mit ábrázol!*

A fentihez hasonló tevékenységek, konstruálások, megfigyelések képessé teszik a tanulókat arra, hogy ők is megfogalmazzanak rövid szöveges feladatokat, értelmes kérdéseket. Akár ugyanazt a geometriai tartalmat többféle „szövegruhába” is öltöztethetik.

Jól szervezett munkával egyszerre több területen is fejlődnek a gyerekek. Előfordulhat azonban, hogy nincs párhuzamban az értelmi és verbális képességük fejlődése. Azt gondolhatjuk, azért nem válaszol a gyermek, mert nem tudja a választ, pedig csak nem elég gyors a fogalmazásban, nem elég bő a szókincse, nem találja a megfelelő szavakat a válaszhoz. A matematika és ezen belül a geometria szöveges feladatai – legyenek azok akár csak néhány szóval kifejezhető gondolatok – hatékony eszközei az értő, értelmező olvasás, a szövegértés, szövegalkotás fejlesztésének.

A megfelelő önbizalom és a fejlesztő nyelvi környezet kialakításával képessé válnak a gyerekek a matematikai szókincs helyes alkalmazására, a pontos és választékos szóbeli megfogalmazásokra.

Készítsd el az alábbi két építményt a színes rúdkészlet fehér kiskockáiból vagy akár kockacukrokból! Alaprajzukat itt láthatod.

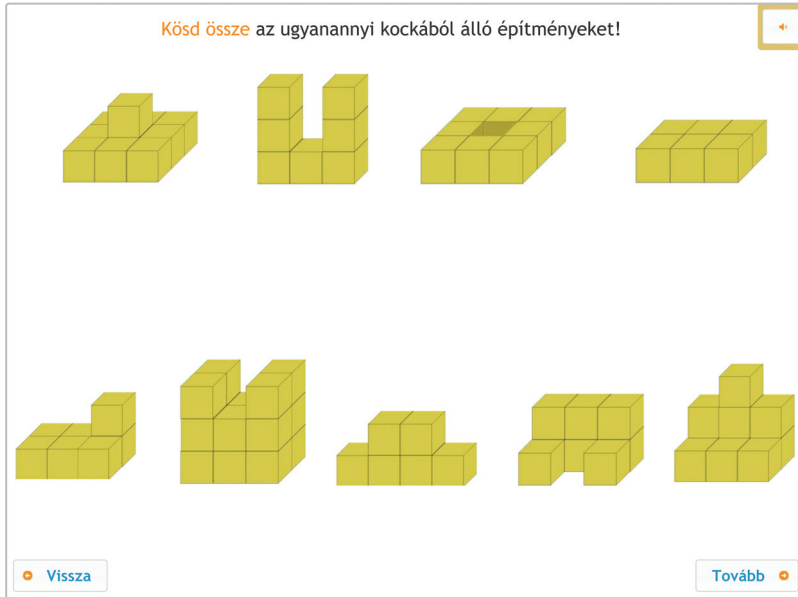
3	2	1
2	2	1
1	1	1

3	2	1
2	2	1
1	1	1

A számok azt mutatják, hogy hány kiskockát kell egymás tetejére tenni.

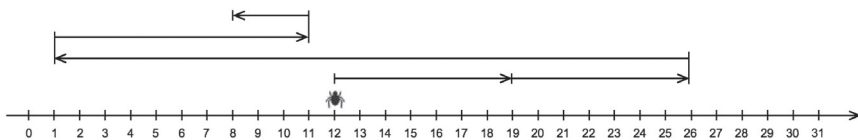
A D18. feladat a „fogd és vidd” módszerrel szerkesztett geometriai feladatra mutat példát.

D18. feladat



A következő feladathoz szükséges eszköz: egy számegyenes, melyen 0-tól 30-ig jelölve vannak az egészek.

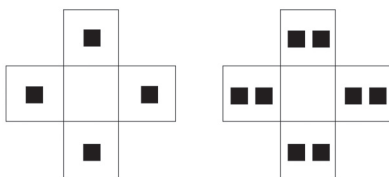
Egy bolha a számegyenes 12-vel jelölt pontján pihen. Majd hirtelen ugrálni kezd. Először jobbra ugrik 7 egységet, majd tovább jobbra 5 egységet, innen balra 23 egységet, majd ismét jobbra 10 egységet, végül balra 3 egységet. Hány egységre van az indulás helyétől?



Csoportos feladat lehet az alábbi:

Négy gyerek az asztal négy oldalára ül. Az asztalon kiterített csomagolópapíron egy közös építményt konstruálnak a csomagolópapíron megadott feltételek szerint. Építhetnek kockacukrokból, fehér rudakból.

Csomagolópapírra öt nagy és egybevágó négyzetből keresztformát rajzolunk. A középső négyzet üres marad, a négy „kilógó” négyzetre egyszerű elrendezésben kisebb, egybevágó négyzetlapokat rajzolunk, például az alábbi ábrák szerint.



Megalkotható-e olyan építmény, amelyet négy különböző irányból nézve éppen a kis fekete négyzetek által mutatott ábrát láthatjuk?

Megoldás:

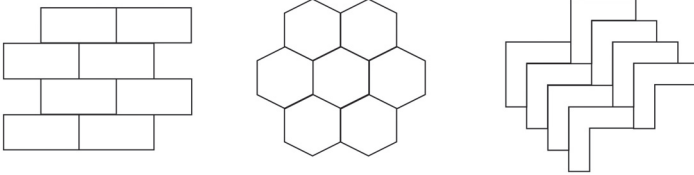
- 1. Ahol csak egy-egy kis fekete négyzet van a négy nagyobb négyzet mindegyikére rajzolva, ott az építmény egyetlen kocka, középen jól elhelyezve.*
- 2. Ahol mind a négy vetület két négyzet egymás mellett, ott már többféle alakzat megépítése is jó megoldást ad. A két kocka átlós elhelyezésétől a 3 vagy 4 kocka jó elhelyezése is megoldás.*

A gyerekek általában négy kockát tesznek középre, ilyenkor javasoljuk, hogy próbáljanak elvenni közülük kiskockát úgy, hogy közben az oldalnézetek ne változzanak.

Már ebben a korban is adható olyan feladat, melynek több jó megoldása van, és a tanulónak képessé kell válniuk az összes jó megoldás megkeresésére. Itt mindig az életkornak megfelelő, egyszerű feladatokra gondolunk.

A második évfolyamon a geometriai tevékenység kiterjed a különböző síkbeli alakzatok cernával, zsinórral való körbekerítéséhez, síklapok különböző egységekkel való teljes (hézagmentes és egyrétű) lefedésére. Ezek a tevékenységek a kerület, terület fogalmának tapasztalati előkészítését szolgálják.

Ilyen lefedések az alábbiak is:



Transzformációk

A transzformációk közé a különböző alakzatok mozgatásához (tükrözés, eltolás, forgatás) és ezek irányának a tudatosításához kapcsolódó tevékenységek tartoznak.

A két- és háromdimenziós alakzatok mozgatása, különböző rácsokon való elmozdítás során megfigyeljük, hogy megváltoznak-e egymáshoz képest az eredeti és az újonnan keletkezett alakzat tulajdonságai (D19. feladat).

D19. feladat

a) Felül egy Rubik-kocka oldalát látod. A Rubik-kocka forgatásával mely állások jöhetnek ki az alsó képek közül? **Döntsd el** mindegyiknél!

☐ Lehet.

☐ Nem lehet.

☐ Lehet.

☐ Nem lehet.

☐ Lehet.

☐ Nem lehet.

b) **Színezd ki** ennek a lapnak a tükörképét! (A szürke egyenes a tükör helyét jelzi.)

☐ Vissza
☐ Tovább

Vannak-e öröklődő formai vagy méretbeli tulajdonságok? Például egy négyzet rácson két oldalszomszédos négyzetet körberajzolunk, ezt átmásoljuk egy másik papírra, precízen kivágjuk, és a kapott téglalapot mozgatjuk úgy, hogy kijelölünk egy irányt két rácspont irányított összekötésével, s ebben az irányban toljuk el a kivágott téglalapot valamennyivel. Vagy szívoszállhoz ragasztjuk a téglalapot, és kijelölünk egy rácspontot, mely körül elforgatjuk a téglalapot, vagy két rácspontot összekötő egyenes mentén meghajtjuk a lapot, és bejelöljük a téglalap tükörképének a helyét.

A geometriai transzformációs feladatok fejlesztik az alkotó fantáziát, a kreativitást, az ötletességet, esztétikai érzéket. Tükrözésekkel, eltolással gyönyörű sormintákat tudunk előállítani. A tanulók ebben az életkorban már képesek a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetésére az összkép alapján. Igen egyszerű a kisméretű fehér papírszalvéták pontos összehajtogatását követő bevagdósásokkal, kivágásokkal szép mintákat alkotni. Például kétszeri összehajtás után az egyik sarkát vágjuk le, nyissuk ki, hogy lássák a gyerekek a kapott mintát. Biztassuk őket különféle mintázatok előállítására. Ha több, együtt meghajtott szalvétát vágunk meg, akkor ezekből periodikusan változó (pl. a periódus 5 elemű) sorozatokat tűzhetünk fel a táblára, és számtalan kérdést tehetünk fel, sok kis szöveges feladatot fogalmazhatunk meg a szép látvánnyal kapcsolatban. (A fekete színű rész a hiányzó papírt jelöli.)



1. Melyik minta esetén hiányzik a legtöbb papír az eredeti papírszalvétából?
2. Hány lyuk van az 5. papírszalvétán?
3. Azonos vagy különböző mintázatú a 3. és a 7. szalvéta? És a 3. és a 8. szalvéta?
4. Ha ugyanúgy folytatnánk a mintákat és a kirakást, a 20., 30. és a 100. helyen milyen mintájú szalvéta állna?

A sorminta folytatására és az elforgatás felismerésének mérésére alkalmas a D20. feladat.

D20. feladat

Bence színes pörgettyűket készített.

a) A pörgettyűk közül két pörgettyű teljesen egyforma. Melyik ez a kettő?
Kattints rájuk!

b) Kattints az 1. pörgettyű tükörképére!

c) Ez a két pörgettyű egyforma legyen! Milyenre kell színezní a fehér háromszöget?
Kattints a megfelelő színfoltra!

d) Ez a két pörgettyű is egyforma legyen! Hányadik háromszöget kell pirosra színezní a 2. pörgettyűn? Jelöld meg!

Vissza Tovább

Tájékozódás

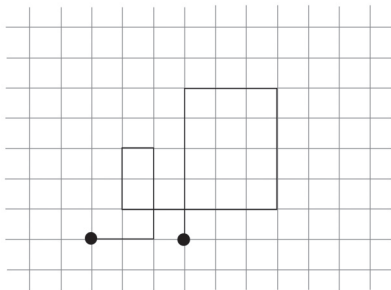
A helyzetviszonyok kifejezésével, irányok megmutatásával, adatokkal jellemzett helyek megkeresésével jelentősen hozzájárulunk a tanulók tér-szemléletének fejlesztéséhez, a térben és a síkban való helyes eligazodási képesség fejlesztéséhez. A számegyenes, majd a később megjelenő koordináta-rendszer fogalmának elemi tapasztalati szintű előkészítését (elhelyezkedések viszonyításával, kezdve az előre, hátra, alatt, fölött, mellett, mögött, messzebb, közelebb, a kettő között, tőle kettővel jobbra, hárommal balra, aztán csak számokkal kifejezve a viszonyokat stb.) e témához kapcsolódó tevékenységek sora segíti.

Az alábbi példában mindenkinél van négyzethálós papír, melyen a rácsvonalak irányában jelölve van a négy égtáj:

Egy négyzetrácsos lap valamelyik rácspontjából kelet felé indulok. Mindig rácsvonalon haladok, s rácspontnál fordulok. Mindig balra fordulok. Egy négyzetoldal a hosszegység. A megtett útszakaszok hossza sorrendben a következő: 2, 3, 1, 2, 5, 4, 3, 5.

Rajzold le az utamat!

Az út kezdő s végpontja hány egységnyi távolságra van egymástól?



Megoldás: 3 egységnyi távolságra van egymástól az út kezdő- és végpontja.

Mérések

A mérések részterületen a mérhető geometriai tulajdonságok vizsgálatára vonatkozó tevékenységekről, követelményekről van szó.

A térbeli és síkbeli alakzatok jellemzői közé – a formai tulajdonságok mellé – bekerülnek a számszerűsíthető, mennyiségi jellemzők is. Ez a tevékenység- és követelménycsoport a matematika más területeihez is köthető, például hozzájárul a szám- és műveletfogalom kialakításához, megerősítéséhez. A hosszúságot, kerületet, területet, tömeget, űrtartalmat sokféle alkalmilag választott és néhány szabvány egységgel pl. méter, kilogramm, liter, az időtartamot az óra, nap, hét helyes alkalmazásával mérjük sokféle szituációba ágyazva. A jól megtervezett tevékenységek során szerzett tapasztalások lehetővé teszik az egység, mennyiség, mérőszám kapcsolatának felfedezését, az arányos változások tapasztalati előkészítését. *Az 1–2. évfolyam végére elvárható, hogy a tanuló jártas legyen az alkalmi mértékegységekkel végzett gyakorlati mérésekben, a tanult szabványmértékegységek ismeretében, gyakorlati használatában (D21. feladat).*

D21. feladat

Írd be a hiányzó számokat!

$1 \text{ dm} = \square \text{ cm}$	$6 \text{ cm} + 2 \text{ dm} = \square \text{ cm}$
$3 \text{ cm} + 1 \text{ dm} = \square \text{ cm}$	$2 \text{ dm} - 15 \text{ cm} = \square \text{ cm}$
$2 \text{ dm} - 7 \text{ cm} = \square \text{ cm}$	$\square \text{ cm} + 1 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$

Vissza Tovább

A fenti négy téma tanítása rendkívül eszközigényes. A követelmények teljesülésének vizsgálata során is szükség van papír-ceruza és számítógépes tesztelési módszereken túllépő manipulatív és mozgásos feladatok alkalmazására, gyakorlati megoldásuk, kivitelezésük értékelésére.

A geometriai fogalmak kialakítására és alkalmazására számos lehetőség kínálkozik a tanórákon kívül is. Ezek olyan apróbb feladatok, kis projektek, melyek hosszabb-rövidebb határidők mellett akár családi, baráti együttműködéssel is megvalósíthatók, és amelyek a geometriai tudás gyarapítása mellett lehetőséget adnak az egymás közti munkamegosztásra, a közös siker élményére, a szociális kompetencia egyéb komponensei fejlesztésére.

A mérések területén fontos fejlesztéseket végezhetünk azzal, hogy a gyerekek kezébe adjuk a méterrudat, a mérőszalagot, az űrmértékeket, a kétkarú mérleget a megfelelő súlyokkal, és sok mérést végeztetünk velük. Készíthetünk például zacskókat, melyekbe majd homokot, kavicsot, babot, kukoricát, búzát, apró gyümölcsöket, az uzsonnát is beletehetjük, hogy összehasonlítsuk, megmérjük a tömegüket. Az egység sok minden lehet. Mérjük meg az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt is. A körlapos, 1–12 számokkal és jól megkülönböztethető mutatókkal ellátott óra használatát javasoljuk.

Elvárás a szabványmértékegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl; óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati ismerete, használata konkrét feladatokban. Ez nem zárja ki az alkalmi mértékegységek használatát (D22. feladat).

D22. feladat

Az erdei tisztásra érve a mama egy nagy flakon gyümölcslevet vett elő. Mind az öten ittak két teli pohárral belőle, és ezzel kiürült a flakon. Csak ezután vették észre, hogy Daninak a poharába kétszer annyi gyümölcslé fért, mint a többi négy családtag kisebb, egyforma méretű poharába.

Hány kisebb pohár gyümölcslé volt a flakonban?

VisszaTovább

A mérések során sokszor kérdezzük meg: mit mértetek? Mivel mértetek? Meg tudnád mutatni a két keziddel, hogy milyen hosszú lehet az 1 méter? A 3 deciméter? És az 5 cm? Tennél a papírtányéromra egy fél kilónyi kavicsot? És erre 30 dekagramm homokot? Stb. Együtt ellenőrizzünk le minden becslést méréssel, beszéljük meg a tapasztaltakat. Ezzel elérhető, hogy a tanulók becslőképessége fejlődjön, képessé váljanak a különböző nagyságú mértékek kapcsolatának felismerésére (D23. feladat).

A mérés lényege az összehasonlítás. Hogy mikor, mit és mivel hasonlítunk össze, az eleinte szinte mindegy. Például hosszúság méréséhez használhatunk egy darab madzagot, egy lécet, a tanulók lépéshosszát, kifeszített tenyerünk két ujjhegyének távolságát. Térfogatmérésnél egy bögrényi vagy papírpohárnyi vizet, homokot, babot, stb. Ezeket az úgynevezett alkalmi mértékegységeket a tanulókkal együtt válasszuk meg, s az adott feladatban következetesen használjuk.

Szervezzünk 5-10 mérésből álló versenyt. A mérést megelőzően becsüljük meg a várható eredményt. Az előre elkészített lapokon négy oszlopos táblázat első oszlopában legyen a mérési feladat, mellette a becsült eredmény, melyet rendre beírnak a gyerekek, majd a harmadik oszlopba a konkrétan mért érték, a 4. oszlopba a becsült és mért érték különbsége kerüljön. Minél többször csinálunk ilyen feladatot, annál nagyobb a valószínűsége, hogy kicsik lesznek az eltérések a becsült és mért eredmény között. A D24. feladatban az induktív gondolkodást mérő feladatok megszokott kakukktójas típusát találjuk.

D23. feladat

Válaszoldj a kérdésekre!



A 2 literes palack megtöltéséhez hány 5 deciliteres teli üvegre van szükség?

Az 1 literes teli kancsóból legfeljebb hány 2 deciliteres poharat lehet megtölteni?

A 2 literes palack megtöltéséhez hány 1 deciliteres teli pohárra van szükség?

6 darab 5 deciliteres teli palackkal legfeljebb hány 1 literes kancsót lehetne megtölteni?

D24. feladat

Kattintással válaszd ki mindkét csoportból az oda nem illőt!

4.1.4. Kombinatorika, valószínűesszámtás, statisztika

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése során általában a következő fokozatokat tartják szem előtt a tanítók:

- adott feltételnek megfelelő egy vagy néhány eset előállítása;
- minél több eset előállítása az adott feltétel szerint;
- az összes eset keresése a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok pótlása;
- adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése.

A felsorolt négy követelmény közül az *a)* és *b)* jelű az induktív gondolkodás fejlesztésének eszköze lehet. A diszciplináris értelemben vett matematikai tudás értékelése során elsősorban a *c)* és *d)* típusú követelményeket fogalmazhatunk meg.

Matematikai tesztek tipikus feladata a következő (*D25. feladat*).

D25. feladat

Hány kétjegyű számot tudsz alkotni ezekből a számkártyákból?

Állítsd elő az összeset úgy, hogy a számkártyákat a megfelelő vonalra húzod!

Vigyázz, több hely van, mint ahányat elő tudsz állítani!

3

4

6

2

◁ Vissza
Tovább ▷

Nyilvánvaló, hogy egyik számkártyán szereplő szám sem tölti be azt a szerepet, mint a hagyományos szöveges feladatoknál megszoktuk, hiszen itt a 3, 4, 6, 2 számokkal nem kell semmilyen számtani műveletet végezniük, mégis eljuthatnak a megoldáshoz.

A D26. feladat az előzőnek egy ekvivalens megfogalmazása:

D26. feladat

Hány monogramot tudsz alkotni ezekből a betűkártyákból?

Állítsd elő az összeset úgy, hogy a kártyákat a megfelelő vonalra húzod!

Vigyázz, több hely van, mint ahányat elő tudsz állítani!

A B C D

Vissza Tovább

A szöveges feladatok megoldásához is segítséget kell adnunk tanítványainknak, hogy megtalálják a feladatot jól leíró modellt.

A D27. feladat a kombinatorika témaköréhez tartozik, és ugyanakkor a rendszerező képességet méri.

D27. feladat

Tréfás Ferkó összekeverte a mágneses betűket a „2. a osztály” feliratban.

Ez lett belőle:

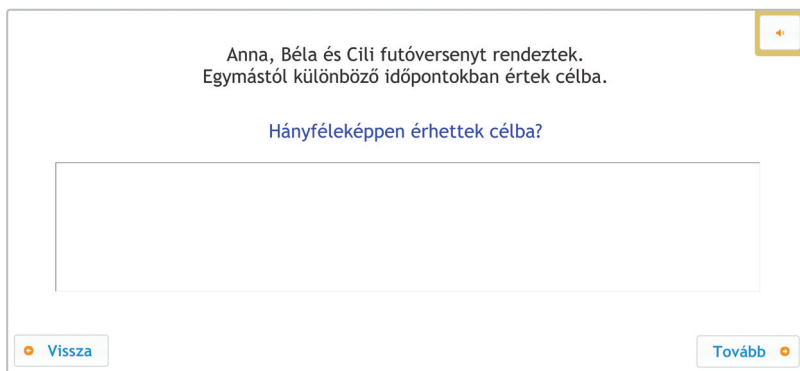
2 0 A S Z T Á L Y

Hány betű van rossz helyen?

Vissza Tovább

A következő feladat kapcsán megmutatjuk, hogy különféle megoldási stratégiák egyaránt elvezethetnek a megoldáshoz. A manipulatív, képi és fogalmi szintű megoldási lehetőségek egymással egyenértékű felhasználása erősíti a kapcsolatot a hétköznapi jelenségek és a matematikai fogalmak között (*D28. feladat*).

D28. feladat



Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek.
Egymástól különböző időpontokban értek célba.

Hányféleképpen érhettek célba?

Vissza Tovább

Egy lehetséges megoldása a feladatnak, hogy a tanító kihív 3 gyereket az osztály elé. A helyükön ülő gyerekek irányítják a kinn állókat. Megállapítják a lehetséges sorrendeket. Mivel nehéz fejben tartani a már számba vett eseteket, természetesen adódik, hogy a problémát modellezniük kell. Például úgy, hogy felírják a neveket cédulákra (egy nevet több cédulára is), és ezek rakosgatásával oldják meg a feladatukat. Nyilvánvalóan ilyen tevékenységet nem végezhetnek írásbeli teszteken.

Az értékelés során megfogalmazott feladatoknál is ügyelni kell arra, hogy megmutassunk egy jó modellt, melynek segítségével a feladat érthetőbbé válik. Lehetséges, hogy elkezdjük az esetek felírását, majd ezt a gyerekeknek folytatni kell. Ezáltal a feladat tulajdonképpen az esetek közül minél több felírására korlátozódik, melyben a szemponttartás válik hangsúlyossá (*D29. feladat*).

D29. feladat

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. **Hányféleképpen érhetek célba? Állítsd elő az összes lehetséges sorrendet úgy, hogy a névkártyákat a megfelelő vonalra húzod!**

Vigyázz, több hely van, mint ahány sorrendet elő tudsz állítani!

ANNA

BÉLA

CILI

ANNA

BÉLA

CILI

ANNA

CILI

BÉLA

BÉLA

ANNA

CILI

Vissza
Tovább

A másik lehetőség, hogy megadunk egy rendszert (például egy táblázatot), melynek segítségével a feladat áttekinthetőbb (D30. feladat).

D30. feladat

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. **Hányféleképpen érhetek célba?**

Folytasd a lehetőségek felírását!

1.	A					
2.	B					
3.	C					

Vissza
Tovább

Az adott feltételhez tartozó összes eset megkereséséhez vezető rendszer kiépítésére is tesznek előkészületeket már ebben a szakaszban is. Például 3 elem lehetséges sorba rendezéseit vizsgálva a tanórán már megfigyelték, hogy hányféleképpen színezhető a háromcsíkos zászló piros, fehér és zöld színeket használva. Újabb példákat látunk a D31. és D32. feladatokban:

D31. feladat



Három hangból álló dallamokat készítettem. Melyik változat hiányzik a sorból?

dó - mi - szó	mi - dó - szó	szó - mi - dó
dó - szó - mi	mi - szó - dó	

 Vissza

Tovább 

Nehezebbé akkor válik a feladat, ha növeljük az információk zajt.

D32. feladat



Mi lehet a „vers” utolsó sora?

Tirim taram turum
Tirim turum taram
Taram turum tirim
Taram tirim turum
Turum tirim taram

 Vissza

Tovább 

A zászlószínezés és a fenti két feladat szerkezete azonos, de a tartalmuk nagyon különböző. A szerkezet azonban ebben az életkorban csak kevesek számára válik fontossá, ezért jelent új kihívást ugyanannak a problémának más megfogalmazása.

A valószínűség témakörében az alapozó években a biztos és a nem biztos elkülönítése válik fontossá. Sok-sok tapasztalat előzi meg a feladatlatlan megfogalmazott feladatokat (D33. és D34. feladat).

D33. feladat

Piros, sárga és kék Lego-elemkből ezeket a toronyokat építettem. Egyet kiválasztottam, és állításokat mondtam a kiválasztott toronyról.

Döntsd el, hogy biztosan igaz-e az állítás! Kattints rá!

◀ Van benne piros elem.	<input <="" td="" type="button" value="◦ Biztos igaz."/> <td style="width: 30%; vertical-align: top;"> <input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/> </td>	<input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/>
◀ A középső elem sárga.	<input <="" td="" type="button" value="◦ Biztos igaz."/> <td style="vertical-align: top;"> <input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/> </td>	<input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/>
◀ Mindhárom szín szerepel benne.	<input <="" td="" type="button" value="◦ Biztos igaz."/> <td style="vertical-align: top;"> <input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/> </td>	<input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/>
◀ Nincs benne kék.	<input <="" td="" type="button" value="◦ Biztos igaz."/> <td style="vertical-align: top;"> <input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/> </td>	<input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/>
◀ Van két egyforma eleme.	<input <="" td="" type="button" value="◦ Biztos igaz."/> <td style="vertical-align: top;"> <input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/> </td>	<input <="" td="" type="button" value="◦ Nem biztos, hogy igaz."/>

Miután sok hétköznapi tapasztalatot szereztek lehetetlen eseményekről, kísérletet tehetünk arra is, hogy rákérdezzünk erre a nehéz fogalomra.

D34. feladat

Egy zsákba beletettünk 5 piros és 1 kék golyót. Ezután kettőt kihúztunk, és állításokat mondtunk.

Kattintással jelöld meg azokat az állításokat, amelyek szerinted hamisak!

☐ Mindegyik piros.

☐ Mindegyik kék.

☐ Van közöttük kék.

☐ Nincs közöttük piros.

4.2. A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

4.2.1. Számok, műveletek, algebra

Számok, számhalmazok

Harmadik osztályban 1000-ig, negyedik osztályban 10 000-ig bővítjük a számfogalmat a számok valóságtartalmára építve. A három-, illetve négyjegyű számok körében a pontos számlálás mellett egyre nagyobb szerepet szánunk a darabszám és a mérőszám becslésének, a közelítéssel való számlálásnak, az alkalmi és szabvány egységgel és többszöröseivel való adott pontosságú mérésnek. A gyakorlati mérések során a gyerekek képessé válnak értelmezni a különböző egységekkel való mérésekben kifejeződő viszonyokat, megértik a mértékváltás gondolatát.

Különböző taneszközök használatával megismerkednek különböző számrendszerekkel, tapasztalatot szereznek a csoportosításról, a beváltásokról és felváltásokról. A tízes számrendszer lényegének és a helyiérték-rendszernek a gyakorlati ismeretével tudatossá és biztonságossá válik számukra a számok írása és olvasása, felismerik a számnévképzésben megfigyelhető rendszert. Megbízhatóan használják a számjegyek alaki-, helyi és valódi értékeit. Megvizsgálják a számokat az ismert számtulajdonságok, illetve számkapcsolatok szerint (pl. párosság, számszomszédok), és megismerkednek újabb számtulajdonságokkal (pl. oszthatóság, számok tízesekre, százásokra, ezresekre kerekített értékei) (*D35. feladat*).

D35. feladat

◀

Kattints rá a felsorolt számok közül a páratlan számokra!

1

2

4

5

6

8

◀

Kattints rá a következő számok közül a 2 számszomszédaira!

0

1

2

3

4

5

Vissza

Tovább

Felismerik és ki tudják fejezni a számokat különféle alakjaikban, meg tudják ítélni számok nagyságát, képessé válnak megadott számokat nagyság szerint növekvő és csökkenő sorrendbe rendezni. El tudják helyezni a számokat számtáblázatokban, illetve különböző beosztású számegyeneseiken.

Kétféle értelmezésben ismerkednek a gyerekek a negatív szám fogalmával. Egyrészt irányított mennyiségek mérőszámaként (hőmérséklet, elmozdulás, elfordulás, idő), másrészt hiányként értelmezik a negatív számokat. Ehhez „adósság” és „vagyon” kártyákat használnak. A számokat konkrét tartalommal ellátva hasonlítják össze. Előállítják a számok többféle alakját. Tevékenységgel megtapasztalják, hogy a hozzátevés nem jár mindig érték-növekedéssel, de az elvétel eredményezhet növekedést.

A számolási készség értékelésében gyakran alkalmazunk szöveges feladatokat. Ezek az egy művelettel megoldható feladatok (*D36. feladat*) nem igényelnek adatgyűjtést, egyszerűen számfeladattal lejegyezhetők és megoldhatók.

D36. feladat

◀

750 forint volt a pénztárcámban. Elköltöttem 480 forintot.

Mennyi pénzem maradt?

◀

Egy buszjegy 320 forint.

Mennyibe kerül öt buszjegy?

◀

Kati egy 1000 forintossal fizetett az írószertboltban. A pénztárgép 578 Ft-ot mutatott.

Mennyi a visszajáró pénz százasokra kerekítve?

○
Vissza

○
Tovább

Harmadik osztályban az 1000-es, negyedik osztályban a 10 000-es számkörben gyakran közelítő értékekkel számolnak a gyerekek, a feladatokban megfogalmazott kérdések is ezt igénylik (*D37. feladat*).

D37. feladat

A számegyenesen piros nyíl mutat négy számra.
Írd a nyilakba a számok pontos értékét!

A) B)
C) D)

Mennyi a legkisebb szám ezresekre kerekített értéke?

Melyek a legnagyobb szám ezres számszomszédai?

Melyek a C szám tízes számszomszédai?

Írj egy számot, melynek tízesre kerekített értéke a B szám!

Népszerűek a számkitalálósdi játékok, amelyek online változatai egyszerűen elkészíthetők (D38. feladat).

D38. feladat

Bence a nagypapájával számkitalálósdi játékot játszik.
Fejtsd meg te is, hogy ki melyik számra gondolt!

Bence kezdte a játékot: először megszoroztam kettővel, majd elvettem belőle 300-at és így 700-at kaptam. Melyik számra gondoltam? Válaszd ki, melyik számra gondolt Bence, kattints rá!

☐ 500 ☐ 800 ☐ 1100

Majd a nagypapa következett: először vettem a harmadát, majd hozzáadtam 270-et, így 570-et kaptam. Melyik számra gondoltam? Válaszd ki, melyik számra gondolt a nagypapa, kattints rá!

☐ 460 ☐ 280 ☐ 900

Zsófi, Bence testvére sem akart kimaradni a játékból, a nagymamával ők is játszottak egy fordulót főzés közben.

Zsófi feladványa: először hozzáadtam 130-at, majd elfeleztem és 290-et kaptam. Melyik számra gondoltam? Válaszd ki, melyik számra gondolt Zsófi, kattints rá!

☐ 710 ☐ 275 ☐ 450

A nagymama feladata: elvettem belőle 690-et, majd vettem a tízszeresét és 100-at kaptam. Melyik számra gondoltam? Válaszd ki, melyik számra gondolt a nagymama, kattints rá!

☐ 310 ☐ 700 ☐ 790

Műveletek

Harmadik és negyedik osztályban a kibővített számkörben is szükségessé válik a műveletek értelmezése tárgyi megjelenítéssel, rajzzal, elvontabb ábrákkal és szöveggel. Különös figyelmet fordítunk a közelítő számokkal való műveletértelmezésekre. Kétirányú tevékenységek járulnak hozzá a matematikai modellek megértéséhez. Egyrészt kirakásokról, képekről, ábrákról műveleteket olvasnak le a gyerekek, másrészt adott matematikai modellhez példákat gyűjtenek, problémákat fogalmaznak meg. A nagyobb számok összeadásának, kivonásának értelmezéséhez segítséget jelent a szakaszokkal vagy területekkel való ábrázolás. Ezt előkészítheti a színes rudak használata (*D39. feladat*).

D39. feladat

◀

Az egyik szám a 723.
Ez 209-cel nagyobb a másiknál.

Melyik a másik szám?

A másik szám a: .

◉ Vissza
Tovább ◉

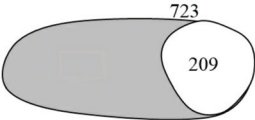
A kirakásokat, a kirakásokról a leolvasásokat követheti a szakaszok, illetve a területek használata. Ezek alkalmasak a számok közelítésekkel való ábrázolására, a számok közti viszonyok bemutatására. A *D40. feladat* területarányokkal szemlélteti a számok nagyságrendi különbségeit.

D40. feladat

◀

Az egyik szám a 723. Ez 209-cel nagyobb a másiknál. Melyik a másik szám?

A keresett szám a(z): .



◉ Vissza
Tovább ◉

A kibővített számkörben a szóbeli számolási eljárásokat analógiák alapján végezzük. Ezek megértését jól támogatja a játékpénz használata. A tevékenységek során biztonságossá válik a gyerekek szóbeli számolási készsége a kerek számok körében. A 2. osztályban a 100-as számkörben megismert számolási eljárásokat végigjárák a gyerekek 3. osztályban az 1000-es számkörben kerek százasokkal és kerek tízesekkel, majd 4. osztályban a 10 000-es számkörben kerek ezresekkel és kerek százasokkal is. Számolásaikban egyszerűsítő eljárásokat alkalmaznak, melyek alapja az összeg, illetve a különbség változatlansága. Ezekről tevékenységekkel szereznek tapasztalatokat, majd alkalmazzák azokat a számolások során.

A kerekített értékek segítségével végzett közelítő számítások szükségesek lesznek az írásbeli műveletek eredményeinek előrebecslésénél is.

Az írásbeli műveletek algoritmusai, a számolás eredményeinek ellenőrzési módjai is építenek a műveletek tulajdonságaira, kapcsolataira. Ez is indokolja a tagok, tényezők felcserélhetőségének, illetve csoportosíthatóságának ismeretét, célszerű alkalmazását (*D41. feladat*).

D41. feladat

Mindegyik feladatban válaszd ki azt a műveletet,
amelyiknek feleakkora az eredménye, mint a megadott műveleté!
Kattints rá!

a = $2562 + 4328$

☐ $1281 + 4328$
☐ $2562 + 2164$
☐ $1281 + 2164$
☐ $1281 + 5609$

b = $7648 - 2956$

☐ $3824 - 2956$
☐ $3824 - 1478$
☐ $7648 - 5912$
☐ $7648 - 1478$

c = $358 \cdot 24$

☐ $358 \cdot 12$
☐ $179 \cdot 12$
☐ $358 \cdot 48$
☐ $716 \cdot 12$

d = $9872 : 4$

☐ $4936 : 2$
☐ $4936 : 8$
☐ $9872 : 8$
☐ $9872 : 2$

☐ Vissza
☐ Tovább

Például 3. osztályban, amikor a gyerekek még nem tanulták a kétjegyűvel való írásbeli szorzást, képesek a 26×24 kiszámítására az egyjegyűvel való írásbeli szorzási eljárás alkalmazásával. Néhány számolási lehetőség: $(26 \times 8) \times 3 = (26 \times 6) \times 4 = (26 \times 3) \times 2 \times 2 \times 2$

3–4. osztályban különös hangsúlyt kapnak a szöveges feladatok a problémamegoldó képesség fejlesztésében. Ezek a feladatok többnyire összetettek, nem oldhatók meg közvetlen úton (*D42. feladat*). A probléma megoldásához célszerű megfelelő lépéseket betartva eljutni. A probléma megismerését az értelmezése, adatainak lejegyzése és az adatok összefüggéseinek megértése követi. Az ismert és az ismeretlen adatok közti kapcsolat kifejezésére sokféle modellt használhatnak a gyerekek. Lehet modell például a több műveletet tartalmazó számfeladat. Ezekben a lejegyzésekben célszerű zárójeleket használni akkor is, amikor ezeket csak az összetartozó adatok jelzésére használjuk.

D42. feladat



Petiék családja háromnapos autós kirándulást tervezett. Az első nap 160 km-t tettek meg, a második napon 80 km-rel többet. A harmadik napon kétszer annyit, mint az első napon.

Hány kilométert tettek meg Petiék a három nap alatt?

 Vissza

Tovább 

Algebra

A számfeladatok mellett egyre nagyobb hangsúllyal jelennek meg a nyitott mondatok. Folytatva az 1. és 2. osztályban megkezdett tevékenységeket, a nyitott mondatokat igazzá, illetve hamissá tevő elemeket próbálgatással keresik, de alkalmazzák a gyerekek a tervszerű próbálgatás módszerét is a megoldás keresésére véges alaphalmazokon.

A feladatok összefüggéseit – kiemelten a fordított szövegezésű feladatokét – gyakran nyitott mondat formájában jegyezzük le. A 8-10 évesek számára egyszerűbb annak a műveletnek a felismerése és lejegyzése, amelyre a szöveg utal, mint az inverz műveletre való átfogalmazás (D43. és D44. feladatok).

D43. feladat



Csabiék iskolája 12 évfolyamos. 160 alsó tagozatos tanulója van az iskolának. Az alsó tagozatra 2-szer annyi gyerek jár, mint a középiskolába. Az alsósok 40-nel többen vannak, mint a felsősök.

Hány gyerek jár a felső tagozatra, és hányan járnak középiskolába Csabiék iskolájában?

 Vissza

Tovább 

D44. feladat

Lacinak összegyűlt 4650 Ft-ja. Testvérének a zsebében ennek a tizede van. Barátjának 1875 Ft-tal több pénze van, mint Lacinak. Kati pénzénél 870 Ft-tal több Lacié. Laci anyukájának a pénztárcájában kétszer annyi pénz van, mint Lacié.

Kinek mennyi pénze van?

Laci testvérének: Ft

Laci barátjának: Ft

Katinak: Ft

Laci anyukájának: Ft

[Vissza](#)

[Tovább](#)

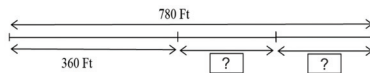
A szöveggel megfogalmazott feladatok megoldását segíthetik sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok vagy grafikonok, még akkor is, ha a feladatnak csak egy megoldása van.

Egyszerűsítő rajz járul hozzá a megoldáshoz a D45. feladatban:

D45. feladat

Az írószerboltban két egyforma füzetet és egy tollat vásároltam, összesen 780 forintot fizettem. A toll 360 forintba került.

Az ábra segítségével számold ki, mennyibe került egy füzet!



Egy füzet ára: Ft.

[Vissza](#)

[Tovább](#)

A feladathoz választott matematikai modellen belül a számításokat azok ellenőrzése követi. Ellenőrizhetünk az előzetes becsléssel való összevetéssel, inverz művelettel, és használhatunk zsebszámológépet is. Az inverz művelet választása az ellenőrzéshez erősíti a műveletek közti kapcsolatot.

4.2.2. Relációk, függvények

A relációk, függvények témakörben a 3–4. évfolyamon a fejlesztés fontosabb területei:

- összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés képessége, megfigyelőképesség;
- válogató-, osztályozó-, rendszerező- és lényegkiemelő képesség;
- adatok gyűjtése, rögzítése, rendezése;
- absztraháló és konkretizáló képesség;
- összefüggések felismerése, oksági és egyéb kapcsolatok feltárása, analógiák felismerése, követése;
- tapasztalatok kifejezése különféle módokon (megmutatással, rajzzal, adatok rendezésével, példák, ellenpéldák gyűjtésével, stb.), megfogalmazása saját szókincssel, egyszerűbb esetekben matematikai szaknyelv, illetve jelrendszer alkalmazásával.

Az összehasonlítások sorozatában megfigyelt relációk és például a kisebb vagy nagyobb reláció tranzitivitásának értékelésére példaként a *D46. feladatot* mutatjuk.

D46. feladat

Peti, Tomi, Misi, Marci és Ádám távolugrásban versenyeztek. Ádám 2 m 63 cm-t ugrott.

- Tomi kisebbet ugrott, mint Misi.
- Misi ugyanakkorát ugrott, mint Peti.
- Peti alulmaradt Ádámmal szemben.
- Marci nagyobbbat ugrott, mint Misi, de kisebbet, mint Ádám.

a) Ki ugrott a legkisebbet?

b) Ki ugrotta a legnagyobbbat?

c) Igaz vagy hamis, hogy Marci nagyobbbat ugrott, mint Peti?

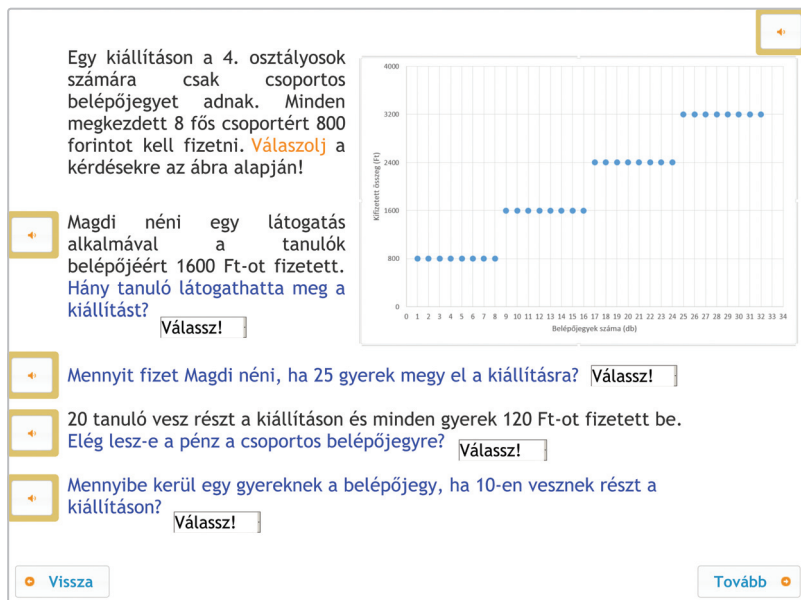
d) Kattints rá arra a kérdésre, amelyikre nem lehet válaszolni a feladat adatai alapján!

Ki ugrott a legkisebbet?
Mennyivel ugrott nagyobbbat Ádám Petinél?
Misi vagy Peti ugrott nagyobbbat?

A felismert összefüggéseket képesek megfogalmazni a matematika nyelvén, kifejezni szavakkal, jelekkel, szabállyal (függvény esetében nyíl jelöléssel, relációk esetében nyitott mondattal). A megkezdett párosításokat tudják folytatni adott és felismert összefüggés szerint.

Az összetartozó adatképek kezelésében új elemként jelenik meg 3–4. osztályban a relációk grafikus ábrázolása Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Mivel az adatképek ábrázolása során lényeges az adatképek tagjainak sorrendje, olyan gyakorlatokat is érdemes végezni, amelyekben az elő- és utótag cseréjével előálló adatképeket közös koordináta-rendszerben tüntetjük föl (D47. feladat).

D47. feladat



Legördülő lista szövege: 1–8 fő / 9–16 fő / 17–24 fő / 25–32 fő
 800 Ft / 1600 Ft / 2400 Ft / 3200 Ft
 Igen. / Nem.
 80 Ft / 160 Ft / 240 Ft / 320 Ft

A tanulók képesek adatokat, számokat tartalom, illetve nagyság szerint sorozatba rendezni, a folytatásra vonatkozó sejtéseket megfogalmazni. A felismert összefüggést a sorozat folytatásával vagy szavakkal fejezik ki. A megfogalmazott szabály alapján tudják folytatni a sorozatot, képesek ellenőrizni a szabály és az adatok megfelelőségét. Néhány elemével elkezdett sorozathoz többféle szabályt keresnek (D48. feladat).

D48. feladat

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Mit kell tennünk a $\triangle$ sorában lévő számokkal, hogy megkapjuk a $\square$ sorában alatta lévő számot?

$\triangle$	3	4	6	7
$\square$	8	10	14	

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A $\triangle$ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a $\square$ sorában lévő számot.” Ehhez a táblázathoz kapcsolódóan megfogalmazható egy olyan zárt feladat is, amelyben azt kérjük, hogy a tanuló válassza ki a táblázat adataihoz illő szabályt (D49. feladat).

D49. feladat

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?
Kattintással jelöld meg, hogy melyik összefüggés igaz és melyik hamis!

$\triangle$	3	4	6	7
$\square$	8	10	14	

$\square = (\triangle + 1) \times 2$

$\square = (\triangle - 1) \times 2$

$\square = (\triangle + 2) + 3$

$\square = \triangle \times 2 + 2$

4.2.3. Geometria

A geometriai területen a 3. és 4. évfolyamokon ugyanaz a négy tartalmi részterület alakítja a tartalmi kereteket, mint az 1. és 2. évfolyamon. Az ott megismert (1) konstruálások, (2) transzformációk, (3) tájékozódás és (4) mérés területek átfogják mindazokat a követelményeket, amelyeket geometriai fogalmak, egyszerű rutinfeladatok, realisztikus és autentikus geometriai problémák esetén ezeken az évfolyamokon definiálunk.

Konstruálás

Az 1–2. évfolyam követelményeihez hasonlóan továbbra is a téglatest, kocka, téglalap és négyzet alakzatok felismerése és konstruálása szerepel a követelmények között. A tanulók elsajátítják az *él* és a *lap* fogalmakat.

A tanulók megismerik a testháló kifejezést, konkrétan a téglatest és kocka jellemző testhálóját.

A geometriai tulajdonságok közül – gyakorlati tevékenységeik során – elsajátítják a következő fogalmakat: forma, szomszédosság, irány, párhuzamosság, merőlegesség. A tanulók képessé válnak arra, hogy az egyes geometriai tulajdonságok szerint csoportosítsanak testeket és síkidomokat. A csoportosítás során megfigyelt további jellegzetes tulajdonságok: szögletesség, lyukasság, tükrösség, méretek azonossága és különbözősége.

A tükrösség (szimmetrikusság) fogalmát egyrészt papírhajtogatásos tevékenységek, másrészt térbeli alakzatok tükörképének megépítésével fejlesztjük.

A térbeli alakzatok elsőbbsége mellett nagyobb teret kapnak a síkidomokkal végzett tevékenységek. A tanulók képessé válnak testek és síkidomok másolására, síkidom és test tükörképének megalkotására. Elsődlegesen kézbe vehető testekkel, pálcikákkal másolnak, de 3–4. osztályban a rajzolás nyújtotta absztrakciós lehetőséget is fokozottan kihasználjuk.

A tanulók képesek a körző és vonalzó használatára. A körző alapszintű használata valósul meg például akkor, amikor a tanuló körzőnyílásba vesz 5 cm-es távolságot.

Transzformációk

Az 1–2. osztályban megszerzett tapasztalatokra építve az egybevágóság és a hasonlóság fogalmának tapasztalati és képi szintű összetevőit alakítjuk ki. A tanulók képesek fölismerni, ha két alakzat vagy azok képe egybevágó.

gó vagy hasonló. A formai jegyek azonosságát és különbözőségét képesek megállapítani és megfogalmazni. Alakzatok különbözősége esetén képesek szavakkal megfogalmazni az adott szempontú különbséget (pl. hosszúkább, ferdébb).

Testek esetében az eredeti test alkotóelemeiből, síkidomok esetében a négyzetrácsos hálózat segítségével képesek alakzatokat kicsinyíteni és nagyítani. A tanulók képesek síkidomok tengelyes tükrözésére és elforgatására másolópapír segítségével.

Az eltolással és a tengelyes tükrözéssel nyert alakzatok között képesek különbséget tenni, még összetett alakzatok esetén is.

Mintafeladatunk a tengelyes tükrözés és az eltolás közötti különbségtélt ellenőrzi olyan alakzatok esetén, amelyeknél a fogalmi tudás alapvető. A feladatok tartalma lényegében tetszőleges, nem hivatkoznak (és nincs is igény) a hétköznapi tapasztalatok felhasználására (*D50. feladat*).

D50. feladat

Ebben a feladatban két, összetartozó ábráról kell eldöntened, hogy azok egy tengelyes tükrözéssel vagy egy eltolással egymásba átvihetők-e. **Húzd** a párokat a megfelelő halmazba!



Tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők

Eltolással egymásba vihetők

Vissza
Tovább

Tájékozódás

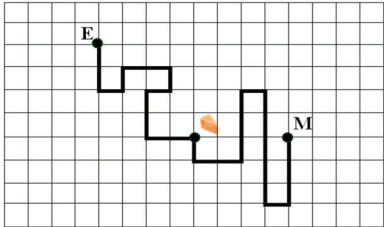
Előrebocsátjuk, hogy a geometriai értelemben vett tájékozódás jelentős része összefügg a földrajzi tudás kategóriájaként azonosított tájékozódással. A két terület kapcsolatát fölfoghatjuk úgy, hogy különböző kontextusban fejlesztik a tájékozódás képességeit. A matematikai kontextusban fejlesztett tájékozódási képesség a koordináta-rendszer mint univerzális matematikai eszköz elsajátítását készíti elő, és ennek során a hétköznapi életből ismert fogalmakat használunk föl. Ahogyan az 1–2. osztály követelményeinél jeleztük, a síkbeli koordináta-rendszer használata esetében jellemző két, egymástól független adat rendezett adatként a hétköznapi értelemben vett tájékozódás alapját jelenti (*D51. feladat*).

D51. feladat

Két egér egyszerre indul el sajtot keresni a labirintusban. A sajt helyét a négyzetrács közepén lévő fekete pötty jelöli. Az egerek egyforma gyorsan mozognak, mozgásukat egységnyi hosszúságú vonalak segítségével rajzoltuk le. Az egerek egyszerre indulnak el, és egyforma sebességgel haladnak.

Melyik egér (E vagy M) találja meg előbb a sajtot?

Írd a téglalapba betűjelét!



A lenti nyílsorozatok közül melyik adja meg annak az egérnek a mozgását, amelyik előbb találja meg a sajtot?

Írd a téglalapba a megfelelő nyílsorozat betűjelét!

A ↓ ↓ → → ↑ → → ↓ ↓ ↓ →

B ↓ ↓ ↓ ← ↑ ↑ ← ↓ ← ↓ ↓ ← ↑ ↑

C ↓ ↓ ↓ → ↑ → → ↓ ↓ ↓ ↓ → →

Vissza
Tovább

A tájékozódás a térbeli mozgások során szerzett tapasztalatokból indul. 3–4. osztályban a tanulók képessé válnak egy, két vagy három adat alapján tájékozódni. A három adat alapján való tájékozódást, amely a térbeli tájékozódás matematikai modelljét jelenti, a gyakorlatban sok esetben a két adat alapján való tájékozódás helyettesíti. A tanulók tájékozódási képessége magában foglalja azt is, hogy képesek fogadni és megérteni a vonatkozó információt

(pl. „ha előre lépsz ötöt, majd jobbra kettőt, akkor célba érsz”), és képesek maguk is megfogalmazni a tájékozódást segítő információt.

A tájékozódás képi elemeinek konstruálását, például egyszerű térkép-vázlatok készítését a természettudományi tartalmi keretek földrajzi fejeze-teiben tárgyaljuk (*D52. feladat*).

D52. feladat

Négy turista érkezett a kisvárosba vonattal. Városnézésre indultak.
 Ki mit nézett meg?

1. turista: A vasútállomástól ment egyenesen az utca végéig, majd kétszer balra fordult és megállt az első téren. **Válassz!**
2. turista: Egyenesen ment és az első utcánál jobbra fordult, és elment az utca végéig. **Válassz!**
3. turista: Egyenesen ment. Az első lehetőségénél balra fordult, majd a második kereszteződésnél jobbra ment az első nevezetességig. **Válassz!**
4. turista: Egyenesen ment a 4. utcáig. Ott balra fordult, majd a második utcán jobbra ment. **Válassz!**

Vissza Tovább

Legördülő lista szövege: templom / múzeum / tájház / vár / kilátó

Mintafeladatunk akár a földrajz vagy a természetismeret tantárgyak tesztjében is helyet kaphatna. Meggyőződésünk szerint ez nem jelent érvényességi problémát, hiszen a feladatok kontextusa, már pusztán a teszt címében szereplő matematika vagy természetismeret szó önmagában hatás-sal van a tanulói teljesítményre. Kíváncsiaknak tartjuk, hogy a tájékozódás alapját jelentő képi és verbális tudás rendszere mind matematikai, mind más kontextusban megfelelő szinten kifejlődjék (*D53. feladat*).

D53. feladat

A rajzon Magyarország térképészletét látod. Az autópályákat berajzoltuk. Budapestről indulsz egy megadott város felé. **Határozd meg**, hogy Magyarországon milyen irányban haladsz a megadott autópályán!

Válaszd ki a megfelelő irányt!

☐ Budapestről az M1-esen Győr felé indulok, akkor

☐ Budapestről az M3-ason Eger felé indulok, akkor

☐ Budapestről az M5-ösön Kecskemét felé indulok, akkor

☐ Budapestről az M7-esen Székesfehérvár felé indulok, akkor

Legördülő lista szövege: felfelé haladok / lefelé haladok / balra lefelé haladok / balra felfelé haladok / jobbra felfelé haladok / jobbra lefelé haladok.

Mérés

Amint az 1.3. részben említettük, a hazai matematikadidaktikai hagyományban mérés a geometria tárgykörével együtt szerepel, ugyanakkor a számunkra fontos viszonyítási pontként szereplő amerikai „*Principles and Standards for School Mathematics*” kötetében a mérés külön tartalmi területként jelenik meg. Ennek okát részben kulturális hagyományokban kell keresnünk (pl. a metrikus rendszer alkalmazásában mutatkozó különbségek), másrészt érvényesül az a hazai megközelítésmód, amely a mérést az ismert geometriai idomokhoz kapcsolódó tevékenységnek tekinti. Egy jóval általánosabb megközelítésmód szerint ugyanis, amely megközelítést a tudományok világában természetesnek vesszük, a mérés számok hozzárendelését jelenti objektumokhoz, eseményekhez, tulajdonságokhoz valamilyen szabály alapján. Bár van törekvés arra, hogy a geometriai alakzatok mérésében ez utóbbi, általános megközelítést is bevigyük az iskolába (úgynevezett „alkalmi mértékegységekkel” való mérés – ld. 1–2. osztály követelményei), a iskolai gyakorlatot mégis a szabvány mértékegységekre

246

való gyors áttérés, majd a mértékváltás számolósos műveleteiben való elmélyedés jellemzi.

3–4. osztályban a tanulóknak ismerniük kell az *egység*, a *menyiség* és a *mérőszám* fogalmakat. A mérési tevékenységek során a kerület mérését körülkerítéssel, a terület mérését lefedéssel, a térfogat mérését alkalmi egységekkel („kis kocka”) végezzük el. A síkidomok közül a téglalap, a testek közül a téglatest szerepeljen a kerület-, terület-, illetve a térfogatmérés tárgyaként.

A tanulóknak ismerniük kell a következő mértékegységeket: mm, cm, dm, m, km, hl, l, dl, cl, ml, t, kg, g. Az egymással szomszédos mértékegységeket át kell tudniuk váltani egymásba. Az átváltás elsősorban gyakorlati tevékenységekhez kapcsolódjék, tehát az egyik mértékegység használatával lezajlott mérést követően egy szomszédos mértékegységgel ismételt mérést alkalmazunk. Az idő mérésére az órát, a percet és a másodpercet kell ismerniük, és tudniuk kell a szomszédos egységeket egymásba átváltani.

A mérés témaköréhez kötődő szöveges gyakorlófeladatok jelentős része a mértékváltáshoz kapcsolódik (*D54. és D55. feladat*).

D54. feladat

Veréb Geréb 4 ugrással tesz meg 1 métert.

Írd be a kérdés utáni téglalapba a megfelelő számot!



Hány ugrással tesz meg 8 métert?

Hány métert tesz meg, ha 12-t ugrik?

Hány ugrással tesz meg 2 méter 75 centimétert?

Hány centimétert tesz meg, ha 17-et ugrik?

○ Vissza
Tovább ○

D55. feladat

Hány deciliter tej fogyott ma, ha három doboz literes tejet ittunk meg?

Ha egy negyedikes gyerek lépései 60 centiméteresek, akkor hány lépéssel tesz meg 12 métert?

A rádióban két óra hosszáig játszottak 5 perc hosszúságú zeneszámokat. Hány zeneszámot játszottak le ennyi idő alatt?

Angliában gyakran használják a mérföldet a távolság mérésére. Egy mérföld 1 km és még 609 méter. Hány méter egy mérföld?

Egy kis csomag teavaj tömege 100 gramm. Hány csomaggal vegyünk, ha 3 kg-ra van szükségünk?

Vissza

Tovább

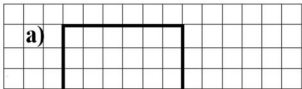
A mértékváltás mellett egyszerű kerület- és területszámításos feladatokat tudunk szöveges gyakorlófeladatként megfogalmazni. A tanulók manipulatív tevékenységéből a képi szintű feladatmegoldáshoz jutunk a következő feladattal (D56. feladat).

D56. feladat

A négyzetrácsos táblán egy kis négyzet egy területegységet jelent.

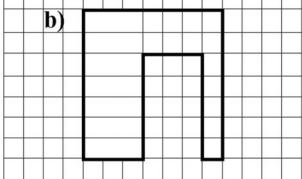
Számold ki a vastag vonallal keretezett két síkidom területét!

a)



a) jelű síkidom területe:

b)



b) jelű síkidom területe:

Vissza

Tovább

4.2.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanítása 3–4. osztályban is főleg a tapasztalatszerzést célozza.

A tanulók kombinatív gondolkodását továbbra is elsősorban a rendszerezés fontosságának megértetésén keresztül formáljuk. 3–4. osztályban még nem elsősorban az összes lehetőség számának megkeresése érdekli a gyerekeket, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes számukra. Ugyanakkor teljességre való törekvés kis elemszámú halmaz előállítása esetén ebben az életkorban már reális elvárás. Továbbra is segítséget kell adnunk a gyerekeknek a rendezőelv megtalálásában, hiszen az összes eset megtalálásához ez fontossá válik (*D57. feladat*). Csak nagyon kis elemszám esetén mondhatunk le arról, hogy támpontot adjunk legalább a feladat elkezdéséhez.

D57. feladat

Vízipók ma délután szeretné meglátogatni barátait. Hányféle sorrendben teheti meg, ha a keresztes pókhoz, a vízi csigához és az öreg rákhoz szeretne elmenni?

Mozgatással keresd meg az összes lehetőséget!

Elsőnek meglátogatott barát							keresztes pók	
Másodiknak meglátogatott barát							vízi csiga	
Harmadiknak meglátogatott barát							öreg rák	

b) Hányféle sorrendet választhat Vízipók, ha az öreg rákot szeretné legelőször meglátogatni? Kattints!

c) Hányféle sorrendet választhat Vízipók, ha nem a keresztes pókhoz akar utoljára menni? Kattints!

d) Hányféle sorrendet választhat Vízipók, ha az öreg rákot csak akkor szeretné meglátogatni, ha a keresztes póknál már járt? Kattints!

Vissza Tovább

Az órai valószínűségi játékok alapvetően azt hivatottak bemutatni, hogy ami gyakrabban előfordult, az valószínűbb. Ilyenkor a pedagógus valódi résztvevője a tanulói kísérletezésnek, és bízik benne, hogy a játék kime-

nete a „várt” eredményt hozza. Ezekben az években, a játékok elemzése során már az is megfigyelhető, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb (még akkor is, ha a tényleges kísérleti adatok ezt nem támasztják alá). Az értékelés során így követelményként jelenik meg a kisebb vagy nagyobb valószínűség intuitív megállapítása.

A „biztos”, „nem biztos”, „valószínű”, „lehetséges” fogalmak játékkal, tevékenységgel, az alapozó szakasz munkája eredményeként remélhetőleg beépültek a gyerekek szókincsébe. A tantervi követelmények a determinisztikus (biztos vagy lehetetlen) és nem determinisztikus események (lehetséges) elkülönítését fogalmazzák meg. Így természetesen csak közvetve kérdezhetünk rá arra, hogy egy adott eseményt mennyire tartanak valószínűnek.

A tantervi követelményekben is megjelenik az adatok megfigyelése, gyűjtése, rögzítése, rendezése. Ez a statisztikai témák mélyebb megértésén túl a valószínűségi döntések segítségét is célozza.

A valószínűségi tevékenységek és feladatok általában nem önálló fejlesztési célként szerepelnek, hanem összekapcsolva más (pl. számolás, geometria, kombinatorika) területekkel. Mondjuk két dobókockával dobunk, és a szorzat paritására kell tippelni. A probléma megoldásához szükség van a gyerek számelméleti ismereteire, esetleg számolási képességére, és emellett valószínűséggel kapcsolatos gondolataira. Ezt érdemes figyelembe venni a mérőlapok készítése során.

Az összes eset keresésére, a talált esetek rendezésére és a rendszerben talált hiányok pótlására más feladatot jelent egy meglévő teljes rendszer hiányzó elemeinek megtalálása.

Ebben a feladatban jogos igény lehet az összes hiányzó elem megtalálása, hiszen előre megtervezett rendszer mutatja a megoldást. Emellett a táblázatban való eligazodás képességét is fejleszti a feladat. Erre ad példát a *D58. feladat*:

D58. feladat

Az 5-ös, 2-es és 7-es számjegyekből alkoss 3-jegyű számokat!

Vesszőkkel elválasztva írd le az összes különbözőt!

Vissza
Tovább

A gyerekeknek ebben a szakaszban még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. Ha felismerik a tevékenységekben már kipróbált hasonlóságot, akkor már nagy lépést tettek az általánosítás felé. A kombinatorikai feladatokban (beleértve azok javítókulcsát is) ebből adódóan nemcsak az a lényeges, hogy az összes lehetőség száma mennyi, hanem a részmegoldások, a lehetőségek felsorolásában megnyilvánuló szabályszerűség is értékelhető és értékelendő.

Természetesen adódik a lehetőség az eljátszott, korábban megélt kombinatorikus tevékenységek szöveges feladattá való átfogalmazására. Továbbra sem mondhatunk le azonban a segítségadásról, mely lehet akár táblázat vagy megkezdett fadiagram. Még mindig fontos, hogy nem elsősorban arra a kérdésre várjuk a választ, hogy valami hányféleképpen fordulhat elő, hanem az összes lehetőség előállítását kérjük a gyerekektől.

Például a D59. és D60. feladatot tekintve a táblázatos megoldás felkínálása tűnik célravezetőnek.

D59. feladat

Nagymama éléskamrájának a feltöltésére készülődik, ezért a piacon vásárolt magának almát, körtét és szilvát. A gyümölcsöket három polcra szeretné pakolni. Egy polcra csak egyfajta gyümölcsöt tesz. **Milyen sorrendben pakolhatja be gyümölcsseit?**

A kezdőbetűk segítségével **írd** az összes megoldást a polcot jelölő táblázatba!

		Lehetőségek					
III. polc	Sz						
II. polc	K						
I. polc	A						

Vissza

Tovább

D60. feladat

Állíts össze a Falánk családnak az étlapról háromfogásos menüt (leves, főétel, desszert) úgy, hogy ne legyen a család tagjai között olyan, aki pontosan ugyanazt a három fogást választja!

Töltsd ki a táblázatot az ételek nevének kezdőbetűjével!

Leves							
Főétel							
Desszert							

Étlap

Levesek:

- húsleves
- gyümölcsleves

Főételek:

- spagetti
- brassói aprópecsenye
- rakott krumpli

Desszert:

- somlói galuska

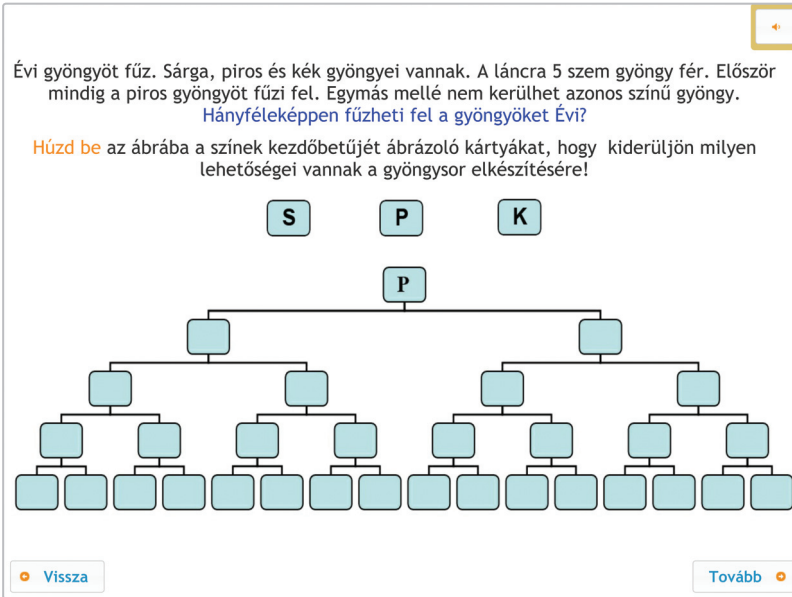
Legfeljebb hánytagú a Falánk család, ha nem volt közöttük két családtag, aki pontosan ugyanazt a három fogást választotta?

Vissza

Tovább

A D61. feladatban a fadiagram segít:

D61. feladat



4.3. Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

4.3.1. Számok, műveletek, algebra

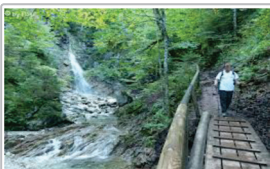
Az 5. évfolyam elején körültekintően fel kell mérni, milyen matematikai felkészültséggel rendelkeznek a diákok ebben a témakörben. A leghitelesebb képet akkor kaphatjuk a tanulók felkészültségéről, ha egyéni képességeik felmérését megelőzi a sokirányú, változatos tevékenykedéshez kapcsolódó ismételtes.

Számok, számrendszerek

A tanulók a hatodik évfolyam végére megismerik a racionális számkört. A számkör bővítése (egészek, törtek, tizedes törtek), ezen belül a negatív számok értelmezése, a törtszám kétféle értelmezése (pl. $\frac{2}{3}$ rész jelentheti

azt, hogy egy egész tortát 3 egyenlő részre osztunk, s veszünk ezekből a részekből 2 darabot, vagy két – fentivel azonos – egész tortának vesszük az 1 harmad részét), az ellentett, abszolút érték fogalmának megismerése, a számok tulajdonságainak vizsgálata (pl. párosság, számszomszédok, felbontási lehetőségek) során képessé válnak a tanult számok helyes leírására és olvasására, értik és alkalmazni képesek a tört, tizedes tört, negatív szám fogalmát (D62., D63. és D64. feladatok).

D62. feladat



Kétnapos kirándulásra mentünk. Az első nap gyalogtúrán vettünk részt, a második nap kerékpároztunk. A gyalogtúra első órájában megtettük aznapi utunk $\frac{4}{11}$ részét, a második órában $\frac{2}{11}$ részét, a harmadik órában $\frac{3}{11}$ részét.

A megoldás beírásához a / jelet használd! (Pl. 3/4; 5/12)

Az első napi utunk hányad részét tettük meg a három óra alatt?

A gyalogtúra mekkora része maradt későbbre?

A kerékpáros túrán az első pihenőig megtettük utunk a $\frac{3}{10}$ részét, majd a második pihenőig $\frac{2}{5}$ részét. A kerékpáros utunk hányad részét tettük meg?



A kerékpáros túra mekkora része maradt későbbre?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

D63. feladat

Borcsiék barátságkarkötőket készítettek. A karkötők $\frac{2}{5}$ része lányoknak, $\frac{1}{3}$ része fiúknak készült. A maradék 4-et szüleiknek készítették.

A feladattal kapcsolatos állításokról **döntsd el**, hogy igazak, vagy hamisak!

a) Összesen 18 karkötő készült. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

b) 6-ot készítettek a lányoknak. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

c) A szülőknek több karkötőt készítettek, mint a fiúknak. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

d) A fiúknak és lányoknak összesen 11 karkötő készült. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

☐ Vissza ☐ Tovább



D64. feladat

A könyvtárban az egyik polcon kétféle könyvet tartanak.

A mesekönyv $4\frac{3}{5}$ centiméter széles, és 6 darab van a polcon.

Az ifjúsági regény $2\frac{1}{5}$ centiméter széles, és 7 darab van a polcon.

A polcra nem fér több könyv.

A szöveg alapján **döntsd el** a következő állításokról, melyik igaz, melyik hamis!

a) Összesen 12 könyv van a polcon. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

b) A polc szélessége 43 centiméter. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

c) A mesekönyvek együttes szélessége 24 centiméter. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

d) A mesekönyvek több helyet foglalnak, mint az ifjúsági regények. ☐ Igaz. ☐ Hamis.

☐ Vissza ☐ Tovább



Ezek az évfolyamokon a tanulók a már kibővült számkörben értelmezik a kerekítés fogalmát, és alkalmazzák a kerekítés szabályát. Megismerik a százalék, alap, százalékláb, százaléktört fogalmát is. Fontos a más műveltségterületeken (pl. természettudományos tárgyak) gyűjtött tapasztalatok megbeszélése, mert ezen fogalmak gazdagítását szolgálja. Hasonlóan, a matematikai szaktárgyi tudásra a természettudományos tárgyak építenek, és a tudástranszfer lehetőségén keresztül a számolási készség a biológiai, kémiai, fizikai és földrajzi számításokban is meghatározó szerephez jut.

A számrendszerek (10-es alapú és az 5–6. osztályban csak bemutatott – nem követelményt jelentő tananyag – 2-es alapú) tanítása kapcsán világossá tehető, hogy a számjegyek (alaki érték) elhelyezkedése (helyi érték) mennyire befolyásolja a szám valódi értékét. Itt újra alkalom nyílik a 0 helyi érték pótló szerepének bemutatására. Ezeken az évfolyamokon a tízes számrendszer biztos ismerete már követelmény (*D65. és D66. feladat*).

D65. feladat

A Kálvária Cukrászdában decemberben összesen
 452 712 db szaloncukrot, 624 db mignont,
 589 szelet dobos tortát és 891 db krémest adtak el.

Válaszolj a kérdésekre számok beírásával!



a) Melyik számjegy áll a szövegben szereplő legkisebb számban a száz helyiértéken?

b) Mennyi a valódi értéke az ezresek helyén álló számjegyek a legnagyobb számban?

c) Melyik számban a legkisebb a 8 valódi értéke?

d) Melyik számban a legnagyobb az alaki értéke a legkisebb helyiértéken álló számjegyek?

[Vissza](#)
[Tovább](#)

D66. feladat

A példasor alapján **töltsd ki a táblázatot!**

TÍZES SZÁMRENDSZER									SZÁMOK ÍRÁSA	SZÁMOK ÍRÁSA SZAVAKKAL
...	10^3	10^2	10	1	1/10	1/100	1/1000	...		
	2		1			3			2010,03	kétezer-tíz egész három század
									207,8	
										hétezer nyolcszázhet

Vissza Tovább

Az egész számok tulajdonságainak, felbontási lehetőségeinek vizsgálata során megismerkedünk az egyszerűbb oszthatósági szabályokkal. *Követelményként fogalmazódik meg a 2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel, 100-zal való oszthatóság ismerete, alkalmazása feladatokban.* Fontos kitérni itt a 0 párosságának, oszthatóságának vizsgálatára is. A számelmélet témájához kapcsolódó feladatok alkalmasak a *bizonyítási igény kialakítására, fejlesztésére* (pl. Hogyan lehetne igazolni, hogy a páratlan számok minden osztója páratlan?).

A számok sokféle megjelenítése, felírása az évek folyamán a tanulók kombinatorikus gondolkodását is fejleszti a (pl. $6 = 3 + 3$ [két egyenlő részre osztható, ezért páros egész] $= 2 \times 3$ [téyzőkre bontásában szerepel a 2, ezért páros egész] $= 4 + 2 = 7 - 1 = 4 - (-2) = \text{stb.}$).

A következő feladat is igazolja, hogy a negatív szám elvételének megértésében nagy szerepe van a számok különféle alakokban való megjelenítésének.

Műveletek

A bővülő számkörre vonatkozóan kiterjesztjük a tanult műveleteket, melyek tulajdonságai öröklődnek, mélyül a műveletfogalom, tudatosulnak a műveleti algoritmusok. A különböző előjelű egészekkel, a törtekkel, tizedes törtekkel akár szóban, akár írásban végzünk műveleteket, a tudatosulásuk gyökere a 10-es számrendszer (helyi érték, alaki érték, valódi érték) pontos értése.

A műveletek kapcsán szólni kell a 0 és 1 számok műveletekben betöltött szerepéről is. Például a 0 szorzótényezőként való szereplésének következményeit a *D67. feladattal* mutathatjuk be:

D67. feladat

Számoljátok ki az alábbi műveletsor eredményét!

$$2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 5 \times 0 \times 4 \times 6 =$$

Vissza Tovább

Megoldás: *A szorzat eredménye 0, mivel már egyetlen 0 szorzótényező szereplése esetén is 0-t kapunk eredményül. Papír-ceruza teszt esetén kevesebb szorzótényezőt használjunk.*

Az évek során fokozatosan tudatosul a 0 és 1 szerepe a műveletekben, a műveleti tulajdonságok ismerete, alkalmazása. Az eredmények előzetes becslése, kiszámítása, majd ellenőrzése, a becslt és a számolással kapott eredmény összevetése, az eltérések lehetséges okainak megbeszélése fejleszti a számolási készséget, az algoritmikus gondolkodást, a becslési készséget, az önellenőrzés igényét. A műveleti sorrend helyes betartása következetességet, figyelemösszpontosítást igényel.

A tanulóknak tudni kell a pozitív törtek pozitív egészekkel való szorzását és osztását, érteniük kell az alpműveleteket és a műveleti tulajdonságokat racionális számkörben, ismerni és alkalmazni kell a helyes műveleti sorrendet (*D68. feladat*).

D68. feladat

Tegyél ki az alábbi számok közé úgy műveleti- és zárójeleket úgy, hogy a megadott eredményt kapd!

3 7 3 3 = 4 Megoldás:

12 3 9 99 = 43 Megoldás:

[Vissza](#) [Tovább](#)

Algebra

A kibővült számkörben a számfeladatok mellett a nyitott mondatokon belül az egyenletek, egyenlőtlenségek (olyan nyitott mondatok, melyekben állítványként az egyenlő, kisebb, nagyobb, kisebb vagy egyenlő, nagyobb vagy egyenlő szerepel) is megjelennek. Az ismeretlent általában betűk jelölik. A betűkkel való műveletvégzéskor kikötéseket fogalmazunk meg a betűk helyébe írható számokra vonatkozóan (pl. $5/b$ esetben a b nem lehet 0). A számok, betűk (ismeretlenek) segítségével kapott kifejezésekkel (pl. $3a$; $-2b$; $c/4$) műveleteket, műveletek közötti kapcsolatokat fogalmazunk meg, és keressük a megadott számhalmazon (alaphalmaz) a megoldásokat (megoldáshalmaz vagy igazsághalmaz). Ezek a tevékenységek előkészítik a későbbi évfolyamokon már önállóan szereplő algebra témakörét (D69. és D70. feladatok).

D69. feladat

18 gyerek mozijegye 16 200 Ft-ba kerül. Még 6 tanuló szeretne elmenni a moziba, így mennyit fizetünk a mozijegyért?

Melyik megoldási terv teszi igazgá, melyik hamissá?



16 200 : 18 • (18 + 6)

16 200 : 18 • 6

16 200 + 16 200 : 18

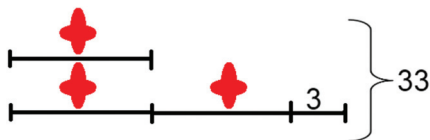
16 200 + 16 200 : 3

[Vissza](#)

[Tovább](#)

D70. feladat

Egy szöveges feladat megoldásához a következő rajz készült:



Döntsd el, hogy az alábbi négy megoldási terv közül melyik felel meg ennek a rajznak és melyik nem!

a) $\text{+} \times 3 + 3 = 33$

b) $(33 - 3) : 3 = \text{+}$

c) $\text{+} + \text{+} + \text{+} + 3 = 33$

d) $33 : 3 + 3 = \text{+}$



[Vissza](#)

[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: megfelel / nem felel meg

4.3.2. Relációk, függvények

Az arányossági feladatok gyakorlatilag az iskoláztatás kezdetétől jelen vannak a matematikaoktatásban. A törtfogalom, a szorzás műveletének megértése és gyakorlása, az összehasonlítás, bizonyos számelméleti kérdések, a mérés, mértékváltás, kerület, terület meghatározása mind-mind arányossági gondolkodáson alapul. Gyakran előfordul sorozattal kapcsolatos feladat is, hiszen egy-egy művelet többszöri elvégzése valamilyen szabályosságot tartalmazó számsort eredményez. A szabályosságok felismerése, ezek alkalmazása kezdettől a szabályfelismerés, a következtetés képességének fejlesztését szolgálja. Az egyéb tantárgyakban a természeti, fizikai jelenségek, folyamatok időbeli változásainak vizsgálata, az ok-okozati összefüggések matematikai leírása, a mindennapi valóság modellezése megalapozza a függvényszemlélet kialakulását. Az ilyen feladatoknak nagy része a rutin-feladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak, valamint a feladatban megjelenő konkrét személyeknek, eseményeknek, jelenségeknek.

Az egyenes arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, leárazás, kamatozás, nagyítás, térkép méretaránya, területek összehasonlítása stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására (*D71. és D72. feladat*).

A fordított arányosság fogalmának alkalmazására, vizsgálatára többnyire megfelelőek az egyenes arányosnáál használt összefüggések más megfogalmazásban. A tankönyvekben, iskolai gyakorlatban leginkább a munkavégzéssel, költségen és hasznon való osztozással, adott út megtételéhez szükséges idő-sebesség kapcsolattal, adott területű téglalap oldalhosszával kapcsolatos feladatok fordulnak elő.

D71. feladat

Oldd meg a feladatokat!

Egy kocs benzintankjába 47,5 l benzin fér. 2,5 l-es kannával töltögetjük a benzint. Hány kannányit tölthetünk bele, hogy tele legyen?

8,5 kg almát vettünk 340 Ft-ért. Mennyibe kerül 12 kg ebből a fajtából? Milyen összefüggés van az alma ára és tömege között?

A coll német mértékegység, 10 coll = 254 mm. Hány mm a számítógép-képernyő átlójának hossza, ha 15 collos?

Az 1 : 30 000 000 méretarányú térképen Budapest és London távolsága 7 cm. A valóságban hány km a két város távolsága légvonaltól?

Egy város lakossága 15%-kal gyarapodott egy év alatt. Hányan laktak év elején a városban, ha ez a gyarapodás 7500 főt jelentett?

Vissza
Tovább

D72. feladat

Oldd meg a feladatokat!

Egy családban málnaszörpöt tesznek el télire. Ha félliteres üvegekbe töltik, 21 üvegre van szükség. 7 dl-es üvegekből hányra lenne szükség?

Két város közötti utat az átlagosan 80 km/h sebességgel haladó gyorsvonat másfél óra alatt teszi meg. Meddig tart az út a két város között személyvonattal, ha az átlagosan 45 km-t tesz meg óránként?

4 ember 12 nap alatt tud elkészíteni egy munkát. 6 ember ugyanakkora munkatempóval hány nap alatt lenne készen?

Mekkora lehetnek a 24 cm² területű téglalap oldalai, ha az oldalak mérőszáma egész szám? **Foglald táblázatba!**

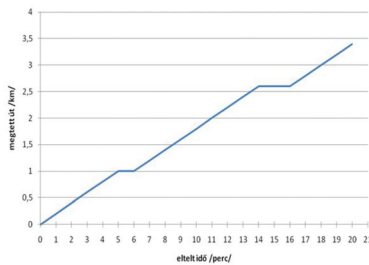
a (cm)											
b (cm)											

Vissza
Tovább

A különböző jelenségek, történések vizsgálatakor a felismert, kigyűjtött adatokat többféle módon (szöveggel, formulával, táblázattal, diagramon, grafikonon) rögzíthetik a tanulók. A különböző megadásokat át tudják alakítani egymásba. Képesek helymeghatározásra gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. A kapcsolatok, összefüggések diagramon, grafikonon való ábrázolására leginkább a mozgással, hőmérséklet-változással, pénzzel összefüggő feladatok alkalmasak ebben az életkorban (D73., D74. és D75. feladatok)

D73. feladat

Karcsi egy reggel kézbe vette az óráját, és megmérte, hogy az iskolájába menet biciklivel mennyi időt tölt tekeréssel, és mennyit áll valamelyik piros lámpánál. A kapott adatokat egy vonaldiagramon ábrázolta.



Hány perct állt összesen?

Hány kilométerre van az iskola a házuktól?

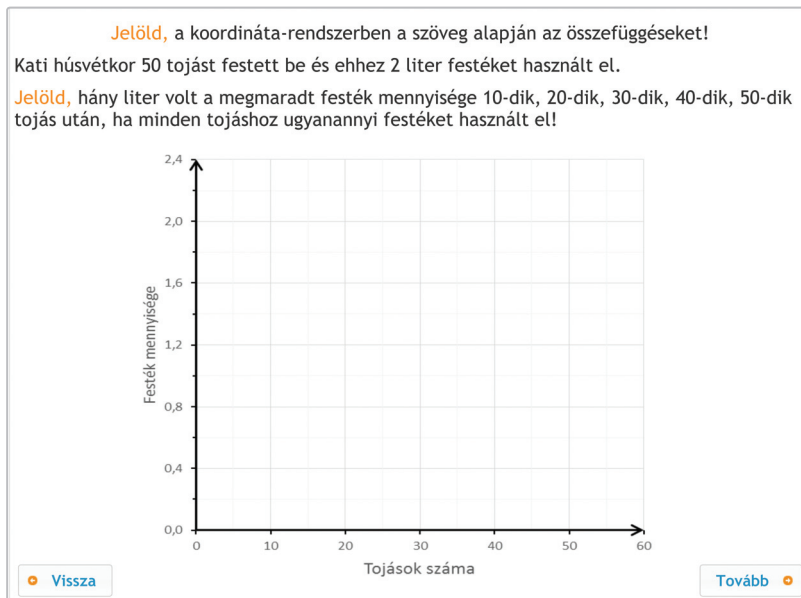
Az első lámpáig hány kilométert tett meg?

A két lámpa között hány kilométer a távolság?

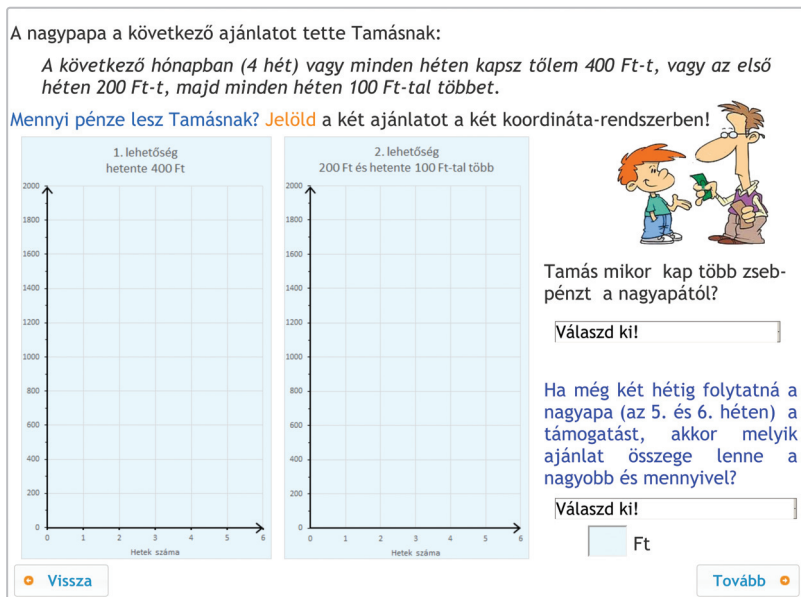
[Vissza](#)

[Tovább](#)

D74. feladat



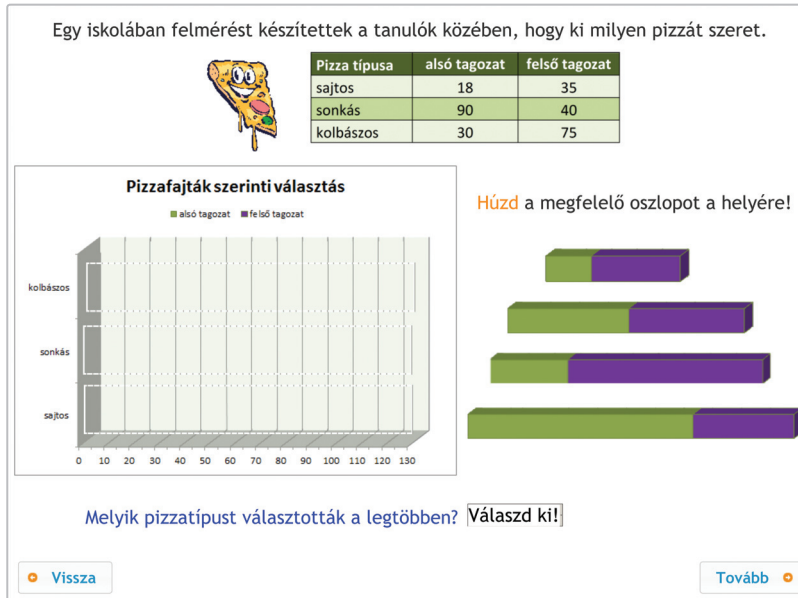
D75. feladat



Legördülő lista szövege: 1. lehetőség – állandó érték / 2. lehetőség – növekvő érték

A vonszolás mint válaszadási technika jól illik az olyan típusú feladatokhoz, amelyekben képi és számok nyelvén előttünk álló információ illesztése a feladat (D76. feladat).

D76. feladat



4.3.3. Geometria

Az 1–4. évfolyam megalapozza a geometriai fogalmakat és ismereteket. Dominálnak a cselekvéshez kötött, tapasztalatokra építő eljárások. Az alsóbb évfolyamok folytatásaként a felső tagozaton is sok, a tanár által előre megtervezett tudatos tevékenység kíséri a fogalmak bevezetését, megértését, érlelését.

Az 5–8. évfolyam összekötő szakasz az alsó évfolyamok szemléletformáló, tevékenykedtető, felfedeztető munkája és a 9–12. évfolyamok deduktív gondolkodásra nevelő fejlesztő munkája között. A felső tagozatos matematika oktatásában nagy hangsúlyt kell fektetni mind a konkrét, gyakorlati tevékenységekre, a gyerekek élményeinek a tanításba való bevonására, mind pedig az absztrakt gondolkodás fejlesztésére. Bár a hangsúlyok

fokozatosan eltolódnak a konkrét tevékenységtől az absztrakció felé, ez a kétféle megközelítés a felső tagozaton végig párhuzamosan jelen van.

A geometria, mérések témakörök tanításának különösen fontos feladata a felső tagozaton, hogy tanulás közben a gyerekek az absztrakt fogalmaktól mindig vissza tudjanak térni a konkrét, gyakorlati jelentéshez és természetesen fordítva, a konkrét jelenségek világában felfedezzék az általánosat. A realiztikus matematikai mozgalom szóhasználatával élve: a geometria kiváló terepe a horizontális és vertikális matematikai tevékenységek fejlesztéséhez.

Az alsó tagozat geometriai témakörei a felső tagozaton ugyanúgy szerephez jutnak, és az alapozó szakaszban továbbvisszük az alsó tagozatos módszereket. Változatos tapasztalatszerzés, eszközhasználat, játékoság és játék segíti a konkrétól az általános felé haladó fogalomépítést. A gyerekek gondolkodása elsődlegesen induktív, de folyamatosan előtérbe kerül az általánosítás igénye is.

A tanítás során kiemelt figyelmet kell fordítanunk a rendszeres próbálkozás, becslés, ellenőrzés képességének a fejlesztésére, a megoldások előretervezésére és a megoldási menet érthető leírására.

Az 5–6. osztály geometriai tartalmi kereteinek leírásában követjük az alsó tagozatban megismert tartalmi részterületeket. A matematikai tantervi hagyományainknak megfelelően a tanulók egy-egy fogalommal többször is találkozhatnak iskolás éveik során, így több esetben is látszólag az alsó tagozatos követelmények ismétlődnek. A geometriai fogalmak verbális szintjén ez így is van, ugyanakkor a geometriai fogalmak fejlődésében meghatározó manipulatív tevékenységek és képi emlékek lehetővé teszik, hogy a már ismert fogalmak magasabb absztrakciós szinten építsék tovább a tanulók matematikai tudását. A korábbi évfolyamokon szereplő négy geometriai részterület közül a tájékozódást 5–6. osztályban már nem szerepeltetjük önálló területként. Az akár oda is sorolható tudáselemek ebben az életkori sávban vagy már nem bírnak differenciáló erővel az értékelés során, vagy pedig a mérés területéhez sorolhatók.

Konstruálások

A tanulók képesek adott tulajdonságokkal rendelkező síkidomok és testek létrehozására manipulatív és képi szinten. Az ismert geometriai tulajdonságok között megjelenik a konvexitás. A tanulók képesek a síkidomokat és testeket a megismert geometriai tulajdonságok alapján csoportosítani.

A kocka és a téglatest tulajdonságait és testhálóját, valamint a háromszögek és négyszögek alapvető tulajdonságait ismerni kell. A kör és a gömb fogalmának kialakulása, az alapvető tulajdonságok megismerése is követelmény.

A körző- és vonalzóhasználat terén követelmény, hogy a tanuló képes legyen szakaszt másolni, két vonalzóval párhuzamost és merőlegest rajzolni, szöveget másolni, szakaszfelező merőlegest szerkeszteni.

A tanulók megismerik a szög fogalmát, a különböző szögfajtákat, és megtanulják a szögmérő használatát. 5–6. osztályban a pont, egyenes és szakasz fogalmakat pontosan tudják használni (D77. és D78. feladatok).

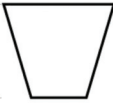
Transzformációk

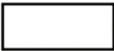
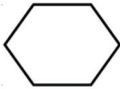
A tanulók képessé válnak arra, hogy megszerkesszék ismert alakzatok tengelyes tükröképét. Fel kell ismerniük a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat. A szimmetriát fel kell ismerniük a hétköznapi és a művészetből ismert konkrét példákon is. Képesek a tengelyes tükrözés tulajdonságait szavakkal megfogalmazni (D79., D80. és D81. feladatok).

D77. feladat

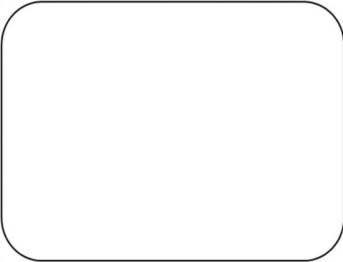
Csoportosítsd az itt látható síkidomokat annak megfelelően, hogy konvex vagy konkáv sokszögek!

Húzd a síkidomokat a megfelelő halmazba!

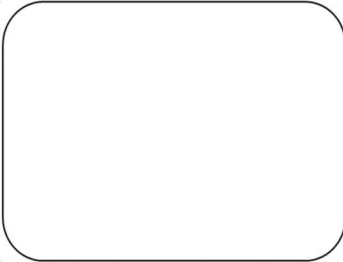



Konvex sokszögek



Konkáv sokszögek



[Vissza](#)
[Tovább](#)

D78. feladat

Írd az egyes betűk alá az alábbiak közül annak az állításnak a sorszámát, amelyik igaz rá!

1. Ez a betű csak egymásra merőleges szakaszokból áll.
2. Ebben a betűben nincsenek egymásra merőleges és egymással párhuzamos szakaszok.
3. Ebben a betűben egymásra merőleges és egymással párhuzamos szakaszok is vannak.
4. Ebben a betűben egymással párhuzamos szakaszok találhatók, de egymásra merőlegesek nem.

F	O	N	A	L
Válassz!	Válassz!	Válassz!	Válassz!	Válassz!

[Vissza](#)

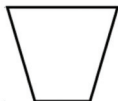
[Tovább](#)

Legördülő lista szövege: 1 / 2 / 3 / 4 / –

D79. feladat

A következő síkidomok közül melyiknek van tükrötengelye?

Kattintással válassz, hogy van-e legalább egy tükrötengelye a síkidomoknak vagy nincs!



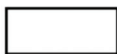
[Van.](#)

[Nincs.](#)



[Van.](#)

[Nincs.](#)



[Van.](#)

[Nincs.](#)



[Van.](#)

[Nincs.](#)



[Van.](#)

[Nincs.](#)

[Vissza](#)

[Tovább](#)

D80. feladat

Helyezd el a tükörtengelyeket az alábbi KRESZ-táblákra!

f _____ h






☐ Vissza
☐ Tovább

D81. feladat

Döntsd el, hogy a kalocsai minták közül melyik tükrös tengelyesen, melyik nem!
Ügyelj az apró részletekre!



☐ Igen.
☐ Nem.



☐ Igen.
☐ Nem.



☐ Igen.
☐ Nem.



☐ Igen.
☐ Nem.

☐ Vissza
☐ Tovább

Mérés

Az 5–6. évfolyamon már kibővült számkörben használhatjuk a mérőszámokat. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a mértékegységváltásnál nemcsak szomszédos, hanem távolabbi mértékegységek közötti átváltás is követelmény, viszont ezáltal már nemcsak a hétköznapi tapasztalatból ismerhető és rekonstruálható mérések szerepelnek, hanem a mértékegységváltás számos feladata tisztán számolási feladattá alakul. A kibővült számkör másrészt az-
zal is jár, hogy tört számok szerepelnek a kerület-, terület- és térfogatszámításokban, valamint a négyzetre emelés mint új művelet felhasználható a geometriai számításokban.

Ebben az életkori csoportban a tanulók képesek háromszögek és négyszögek területének, a kocka és téglatest felszínének és térfogatának kiszámítására. Nem általános képletek ismerete és alkalmazása a követelmény, hanem konkrét, ismert vagy meghatározandó számadatok esetében kell tudni elvégezni a számítást.

A tanulóknak ismerniük kell a hosszúság, a terület, a tömeg, az űrtartalom, a térfogat és az idő szabvány mértékegységeit. Képesnek kell lenniük a mértékegységek közötti átváltásokat elvégezni a milliós számkörön belül. Tudniuk kell a térfogat és az űrtartalom mértékegységeit is egymásba átváltaniuk.

Térfogat- és felszínszámítási feladatokban alkalmazzák az 5. osztályos ismereteket, meghatározzák téglatestből és kockából összeépített testek felszínét és térfogatát. 6. osztályban a téglalap területére visszavezethető területszámítási feladatokban alkalmazzák az előző évfolyamon megszerzett ismereteket, illetve megismerkednek a derékszögű háromszög és a tükrös háromszög területének, a konvex és konkáv deltoid, rombusz, négyzet területének kiszámításával.

A mérési tevékenységekhez kapcsolódóan az előzetes becslésekkel a mérések területét a hétköznapi tapasztalatokhoz kapcsoljuk.

A mérés témaköréhez kapcsolódó legegyszerűbb feladatok, amelyekben a megismert matematikai fogalmakat és szimbólumokat ellenőrizzük, jellemzően a következő néhány alaptípusba tartoznak. A *D82.* és *D83. feladatok* a mértékegységek kezelését ellenőrzik.

D82. feladat

Több, kevesebb, egyenlő?
Pótold a hiányzó relációs jeleket!

negyed perc 15 másodperc

75 perc $\frac{3}{4}$ óra

3 hónap $\frac{1}{4}$ év

két és fél nap 50 óra

másfél év 20 hónap



[Vissza](#) [Tovább](#)

D83. feladat

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

125 m – m = 1050 dm

5,3 km + 0,8 km = m

4,58 dm – 22 cm = dm

mm + 8 cm = 98 mm



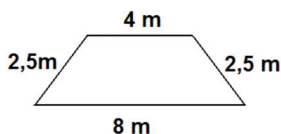
[Vissza](#) [Tovább](#)

A D84. és D85. feladatok a terület- és kerületszámítások körébe tartoznak, a D86. feladat pedig a térfogatszámítás egy példafeladata.

D84. feladat

Négyszög alakú virágágyásokat szeretnénk elkeríteni a kertünkben. Számold ki az egyes virágágyásokhoz szükséges kerítésanyag hosszát!

- a) Az elsőnek az oldalai a körüljárás sorrendjében: 2 m; 4 m; 2 m; 4 m. méter
- b) Két-két szomszédos oldala egyenlő. Az egyik 3 méter, a másik 2,5 méter. méter
- c) Minden oldala egyenlő, ami 1,5 méter. méter
- d) A virágágyás rajzát itt láthatod: méter



[Vissza](#)

[Tovább](#)

D85. feladat

Oldd meg a feladatokat!

Számítsd ki annak a téglalapnak a kerületét, amelynek rövidebb oldala 2 cm, a hosszabbik oldala pedig 3 cm hosszúságú!

Milyen oldalhosszúságú négyzet területe 49 m^2 ?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

D86. feladat

Mekkora annak a téglatestnek a térfogata, amelynek magassága 6 cm, a másik két éle pedig 8 és 10 cm?

Vissza Tovább

A következő feladatok esetében talán magyarázatra szorulhat, hogy miért tekintjük azokat egyszerű, rutinszerűen megoldható szöveges feladatnak, és miért nem tartjuk realisztikus feladatnak. A kulcs az, hogy a feladatban szereplő számadatok és geometriai fogalmak a hétköznapi tapasztalatokkal való összevetés nélkül is elvezetnek a megoldáshoz. Nincs szükség arra, hogy a matematikai szimbólumok és fogalmak segítségével modellt készítsünk a feladatban leírt szituációról, elsősorban a feladat szövegében szereplő dolgokhoz keressük a megfelelő matematikai fogalmakat és műveleteket. A *D87. feladat* szövegében szereplő medence méretei ugyan a hétköznapi tapasztalatokkal összevethetők, azonban belátható, hogy a megadott méretek tetszés szerint variálhatók a már ismert számkörben, és a tanulók többsége számára nem válik könnyebbé a feladat akkor, ha szabványos kerti vagy uszodai medence méretét adjuk meg.

D87. feladat

A nem régen átadott városi fürdő gyermekmedencéje 0,5 méter mély, 10 méter széles és 15 méter hosszú. **Mennyi vízzel lehet feltölteni ezt a medencét?**

Vissza Tovább

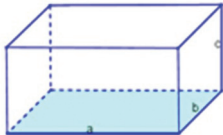
További megfontolást tesz szükségessé az a kérdés, hogy vajon a feladathoz készített rajz vagy éppen a megoldás részeként elvárt rajz megnyílna módosít a feladat nehézségén. Ha az előző feladathoz vázlatrajzot is adunk, amelyen egy téglatest három éléhez adatokat rendelünk, akkor ugyanúgy a rutinszerűen megoldható szöveges feladatok kategóriájában maradunk, amikor alkalmazni kell a tanult szabályokat a matematika fogalmi keretein és szimbólumrendszerén belül (*D88. feladat*).

D88. feladat

A nem régen átadott városi fürdő gyermekmedencéje 0,5 méter mély, 10 méter széles és 15 méter hosszú.
Mennyi vízzel lehet feltölteni ezt a medencét?

○ Vissza

Tovább ○



Amennyiben a tanulóktól kérjük vázlatrajz elkészítését a feladathoz, akkor ugyanúgy nem változik a feladat besorolása a matematikai tudás alkalmazási kategóriái szerint, viszont az értékelés során az elkészült vázlatrajz minőségének megítélése, valamint a tanulói vázlatrajz és a tanulói számítások közötti esetleges disszonancia jelenthet további értékelési szempontot.

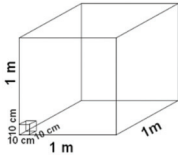
A mértékváltással kapcsolatos feladatok (*D89. és D90. feladat*) mint egyszerű szöveges feladatok a pusztán szimbólumok segítségével felírt feladatokhoz képest a szövegértést tehetik próbára.

D89. feladat

Húzd a mértékegységeket a táblázat megfelelő cellájába!



1 dm^3 1 cm^3 100 cm^3 $0,1\text{ m}^3$



	1 hl		1 l	1 dl	1 cl	1 ml
					10 cm ³	

[Vissza](#)
[Tovább](#)

D90. feladat

A farsangi mulatságon a büfében szörpöt árultak. 12 kancsóval készítettek szörpöt, egy kancsó 2 literes volt.



a) Összesen hány liter szörp készült?

b) 2 dl-es pohárban szerették volna árulni. Hány pohárra lett volna szükség?

c) Végül csak 3 dl-es poharat tudtak vásárolni. Ebből hány darabra volt szükség?

d) A farsang végén megmarad 10 db 3 dl-es pohár szörp. Hány 2 literes kancsóba tudták úgy beleönteni, hogy a legkevesebbet használják fel?

[Vissza](#)
[Tovább](#)

Az iménti feladatok a mértékváltás készségének értékelési problémáit mutatják meg. A mértékváltással kapcsolatos feladatok egy része ismeret jellegű tudás alapján megoldható, más részük a számolási készség működ-

tetését igényli. Az is lehetséges, hogy a feladatkitűzés szövegétől függ, hogy a tanuló számolási feladatként vagy inkább a mértékegységekre vonatkozó ismereteit számon kérő feladatként kezeli a mértékváltásos problémákat.

4.3.4. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A hazai matematikaoktatásban jelentős változás volt az utóbbi évtizedben, hogy a valószínűségszámítás és statisztika témakörök bekerültek az érettségi követelmények közé, ezáltal visszahatva a középiskolai oktatásra, és jelentősen átformálva azt. Ugyanakkor érdemes azt is hangsúlyoznunk, hogy az 1960-as évektől lebonyolított nemzetközi rendszerszintű pedagógiai felmérésekben a kezdetektől jelen van már a legfiatalabb, 10 év körüli korosztály mérésében is a leíró statisztika témaköre. A hazai oktatási gyakorlatban az ide tartozó tudáselemek jórészt a matematikai neveléshez, de a természettudományi nevelés integrált tantárgyaihoz (környezetismeret, természetismeret) is kötődnek.

A tanulók – változatos feladatok és kísérletek megoldása során – olyan fogalmakat sajátítanak el, amelyek használata alapvetően megegyezik matematikai és hétköznapi kontextusban: eset, esemény, kísérlet.

D91. feladat

Alexandra dobozában már csak 4 kék, 3 zöld és 2 rózsaszín, azonos méretű cukorka maradt.

Döntsd el az állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis! **Kattints!**



a) Ha 4 cukrot kivesz a dobozból, akkor lehet, hogy nem marad kék a dobozban.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

b) Ha 5 cukrot kivesz a dobozból, akkor biztosan marad zöld a dobozban.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

c) Ha 2 cukrot kivesz a dobozból, akkor lehet, hogy nem marad rózsaszín a dobozban.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

d) Ha 3 cukrot kivesz a dobozból, akkor lehetetlen, hogy maradjon kék a dobozban.

☐ Igaz.

☐ Hamis.

☐ Vissza

Tovább ☐

Képesek a valószínűségi kísérletek különböző lehetséges kimeneteleit meghatározni és ábrázolni eseményfa és táblázat segítségével. Használják a biztos esemény és a lehetetlen esemény fogalmakat (*D91. feladat*). Ismerik a tanulók az egymást kizáró és egymást nem kizáró események fogalmát. Események gyakoriságát képesek táblázatban és többféle ábratípuson – gyakorisági oszlopdiagramon, kördiagramon – megjeleníteni. Képesek meghatározni a legkisebb és legnagyobb gyakoriságú eseményt, és képesek néhány szám számtani közepét kiszámítani. Képesek rendezetlen adatsokaságot az előforduló események gyakorisága vagy más szempontok szerint rendezni lista, táblázat vagy diagram formájában.

A valószínűség fogalmát ebben az életkorban a „kedvező esemény/összes esemény” törtszám segítségével értelmezik a tanulók, és megfogalmazhatnak néhány nevezetes valószínűségi értéket is: pl. a lehetetlen valószínűsége 0%, két egyforma esélyű dolog kimenetelének valószínűsége 50-50%. Találkoznak bizonyos tévképzet kiküszöbölésére alkalmas feladattal is. Ilyen szólhat például a következőkről: egy kétgyermekes családban (fiú-lány születésre 50-50%-os valószínűséget feltételezve) az egy -fiú – egy lány eset előfordulásának a valószínűsége nem $\frac{1}{3}$, hanem $\frac{1}{2}$, vagy a kétszer feldobott pénzérme esetén egy fej és egy írás bekövetkezésének valószínűsége nem $\frac{1}{3}$, hanem $\frac{1}{2}$.

A tanulók ismerik a dobókockát mint a véletlen események szemléltetőeszközét. Egyszerű kísérletekkel kipróbálják, hogy ha sokszor dobunk a dobókockával, a hat lehetséges érték nagyjából megegyező számban fordul majd elő.

Az összes lehetséges eset összeszámlálásának módszerei közül tapasztalati úton (formális képlet nélkül) ismerik a tanulók az ismétlés nélküli és ismétléses permutációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját tízeleműnél kisebb halmazok esetén; az ismétléses és ismétlés nélküli variációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját, ha a végeredmény a százaz számkörben marad; az ismétlés nélküli kombinációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját legfőbb hatelemű halmazból induló részhalmazválasztás esetén.

A *D92. feladat* alapvetően matematikai szimbólumokkal kitűzött feladat (tehát nem soroljuk a szöveges gyakorlófeladatok közé), amelyben a nyelvi elemek kizárólag a feladat matematikai struktúrájának közvetítését szolgálják.

D92. feladat

Az 1, 2 és 3 számjegyekből hány kétjegyű számot készíthetünk, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk föl?

[Vissza](#)[Tovább](#)

A D92. feladat szöveges rutinfeladattá minősül, ha az egyik szereplő számjegyet 0-ra cseréljük.

A leíró statisztika területén megfogalmazható követelmények egy része a *függvények*, *relációk* témakörbe is tartozik. Grafikonok, ábrák elemzése, a leggyakoribb érték leolvasása, a megfigyelhető értékek terjedelme jelenti az elvárt tudáselemeket.

A kombinatorika területe hagyományosan integrált része a magyar matematikatanításnak. Kifinomult hagyományai vannak a manipulatív, képi és szimbolikus szintű feladatkitűzésnek, amelyekben lehetőségek számát kell meghatározni. Ezeknek a tankönyvi feladatoknak a túlnyomó része a rutinfeladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak. Tipikus feladatkitűzési stratégia ilyen esetekben az „Anna, Béla, Cili és Dani...” kezdetű feladat, ahol például négyféle, egyenrangú tevékenység társítható a gyerekekhez (D93. feladat). Hasonló jellegzetes megoldás, amikor a tanulók tapasztalataitól idegen témakör válik megszokottá a feladatszövegekben: vízvezetékrendszerek, telefonvonal-hálózatok, vezetői kinevezések stb.

D93. feladat

Anna, Béla és Cili testvérek. Egyikük minden nap leviszi a szemetest, másikuk pedig meglocsolja a virágokat.

Hányféleképpen lehetséges beosztaniuk a házimunkát?

 Vissza  Tovább 

A korosztályi jellemzőkből következik, hogy a kombinatorika területén várhatóan alulreprezentáltak lesznek a tanpéldák a realisztikus feladatokhoz képest. Az alapvető leszámlálási feladatok képlet nélküli megoldása általában akkor elvárható, ha a memóriából előhívható emlékképek vagy például rajzos modellek segítik a feladat megértését.

4.4. Irodalom

- Csikos, C. és Verschaffel, L. (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–97.
- Dreher, A. és Kuntze, S. (2015): PCK about using multiple representations – an analysis of tasks teachers use to assess students’ conceptual understanding of fractions. In: Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (szerk.): *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference*, Vol. 2., PME, Hobart, Australia. 225–232.
- Gilmore, C. K. és Bryant, P. (2008): Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology*, **26**. 301–316
- Huey-Min, W., Bor-Chen, K. és Ssi-Nu, Y. (2015): Growth in cognitive domain of geometry: a 3-year longitudinal study. In: Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (szerk.): *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference*, Vol. 1, PME, Hobart, Australia. 252.
- Ion, P. és Sperber, W. (2012): *MSC 2010 in SKOS – the Transition of the MSC to the Semantic Web*. EMS Newsletter, 84. June, 55–57.
- Korom Erzsébet (2005): *Fogalmi fejlődés és fogalmi váltás*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004): *DIFER Programcsomag: Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer 4-8 évesek számára*. Mozaik Kiadó, Szeged.
- Pólya György (1945/1957): *A gondolkodás iskolája*. Bibliotheca, Budapest.
- Schoenfeld, A. H. (1987): What’s all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ London. 189–215.
- Skemp, R. (1975): *A matematikatanítás pszichológiája*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- Streefland, L. (1991, szerk.): *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Vol. 8. Springer Science & Business Media, Dordrecht, Boston, London.
- Szendrei Mária és Szendrei Julianna (2011): A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 99–139.
- Sztányi, J. és Csikos, C. (2015): Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In: Beswick, K., Muir, T. és Wells, J. (szerk.): *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference*. Vol. 4. PME, Hobart, Australia. 225–232.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. és Drijvers, P. (2014): Realistic mathematics education. In: Lerman, S. (szerk.): *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London. 521–525.

A kötet szerzői

Ambrus Gabriella

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikatanítási és Módszertani Központ adjunktusa. Az ELTE Tanárképző Főiskolai Karán matematikakémia szakon, majd a Debreceni Egyetem matematika tanári szakán szerzett diplomát. A Salzburgi Egyetemen doktorált matematikadidaktikából. Fő kutatási területei: gyakorlás a matematikatanításban, a valóságközeli matematika tanításának kérdései, modellezési feladatok az iskolai gyakorlatban, a magyar problémamegoldó hagyományok lehetőségeinek beépítése a hazai feladat kultúrába, valamint az előbbi témák tanítástörténeti vonatkozásainak kutatása. Több hazai és nemzetközi projektben vett részt. Rendszeresen ad elő magyar és külföldi konferenciákon. 2014 óta a Német Matematikadidaktikai Társaság (GDM) Tanácsadó Testületének (Beirat) tagja. Részt vett tankönyvek írásában, valamint számos módszertani publikáció szerzője magyar, német és angol nyelven.

Csapó Benő

Egyetemi tanár, az MTA doktora, a Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola, az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport és a MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport vezetője. Kémia–fizika szakos középiskolai tanári diplomáját a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karán szerezte 1977-ben. A Brémai Egyetemen Humboldt-ösztöndíjas kutatóként dolgozott 1989-ben, 1994–95-ben pedig Stanfordban a Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences meghívott kutatója volt. Fontosabb kutatási területei: kognitív fejlődés, a tudás szerveződése, longitudinális vizsgálatok, pedagógiai értékelés, tesztelmélet, technológiaalapú tesztelés.

Csíkos Csaba

A Szegedi Tudományegyetem Pedagógiai Értékelés és Tervezés Tanszékének docense. Matematika–földrajz szakos tanári és pedagógiai értékelési szakértői végzettséget követően a neveléstudomány területén szerzett PhD-fokozatot. 2002–2005 között Békésy György posztdoktori ösztöndíjas. Kutatási témái elsősorban a 10–12 éves korosztály stratégiai gondolkodásának vizsgálatához kapcsolódnak; angol és magyar nyelvű publikációi elsősorban e korosztály matematikai gondolkodásának és olvasási folyamatainak kutatásából születtek. Az International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) vezetőségi tagja.

Józsa Krisztián

A Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Tanszékének egyetemi docense. A József Attila Tudományegyetemen matematika és fizika szakon diplomázott 1996-ban, 2000-ben pedagógiai értékelési szakértői végzettséget szerzett. PhD-értekezését 2003-ban védte meg, 2013-ban habilitált. 2004–2007, majd 2015–2018 között Bolyai kutatási ösztöndíjas. 1997-ben Pro Scientia Aranyéremben, 2008-ban Akadémiai Ifjúsági Díjban részesült. 2011-ben a Colorado State University meghívott kutatója. 2012-ben elnyerte a Fulbright kutatói ösztöndíjat. Fontosabb kutatási területei: eljárási motiváció, óvodás- és kisiskoláskori fejlesztés lehetőségei, tanulásban akadályozottság.

Lajos Józsefné

Az Oktatási Hivatal osztályvezetője, tanügyigazgatási, pedagógiai értékelési és akkreditációs szakértő. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán szerzett matematika–fizika szakos diplomát. 1986-tól az OPI országos matematikatanterv-gondozója. A központi matematika versenyeknek, az állami tantervek- és taneszközök készítésének, a matematikát tanítók továbbképzésének az országos felelőse. Részt vett az érettségi tartalmi munkálatainak megszervezésében. Számos közoktatási matematikai fejlesztési feladat résztvevője, bekapcsolódott a Nemzeti alaptanterv előkészítésébe, taneszközök fejlesztésébe, tanulmányi versenyek szervezésébe. Tagja ma is a BJMT Oktatási Bizottságának, a Beke Manó Díjbizottságnak, az Ericsson Díjbizottságnak és a Rátz Tanár Úr Életműdíj Kuratóriumának. Munkáját több kitüntetéssel jutalmazták.

Makara Ágnes

Az ELTE TÓK ny. adjunktusa. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán matematika, fizika és ábrázoló geometria szakon végzett. Két évtizeden keresztül a közoktatásban dolgozott, ezt követően pedig a felsőoktatásban, az ELTE TÓK Matematika Tanszékének adjunktusaként. Iskolaalapító, tankönyvíró, tananyagfejlesztő, mentor, pedagógiai kutatások résztvevője. Fő kutatási területe a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének lehetőségei a geometriatanulásban, illetve a matematika-tanulásban lemaradó tanulók fejlesztésének segítése.

Molnár Gyöngyvér

A Szegedi Tudományegyetem Oktatáslélmélet Tanszékének egyetemi tanára, az MTA SZAB Pedagógiai és Pszichológiai Szakbizottság elnöke. Matematika, illetve német nyelv és irodalom szakos középiskolai tanári diplomáját a József Attila Tudományegyetemen szerezte 1999-ben, előtte a heidelbergi Ruprecht–Karls–Universitát, majd a münsteri Westfälische Wilhelms–Universitát ösztöndíjasa. 2005–2008 és 2009–2012 között MTA Bolyai János Kutatási ösztöndíjban, 2007-ben Akadémiai Ifjúsági Díjban részesült, illetve Párizsban Innovatív Tanári oklevelet kapott. 2015-ben az U. S. Department of State IVLP ösztöndíjasa. Fontosabb kutatási területei: technológiaalapú tesztelés, a problémamegoldó gondolkodás fejlődése és fejlesztése.

Szitányi Judit

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszékének tanszékvezető adjunktusa. A Budapesti Tanítóképző Főiskolán szerzett főiskolai diplomát, majd nyolc évig tanítóként dolgozott. Egyetemi diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, matematika szakon szerezte. Kutatásai az óvodás és kisiskolás korosztály valószínűségi gondolkodásához kapcsolódnak. Szerepet vállalt a kompetenciaalapú matematikaoktatás kidolgozásában és elterjesztésében. Aktívan részt vesz a Bolyai Társulat munkájában, az Oktatási Bizottság tagjaként szervezi a Rátz László Vándorgyűlések alsó tagozatos szekciójának munkáját.

Zsinkó Erzsébet

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszékének címzetes egyetemi docense. Tantervíróként, szakmai tanácsadóként, programfejlesztőként és szerkesztőként szerepet vállalt a kompetenciaalapú képzés és oktatás matematikaprogramjának kidolgozásában. Részt vett abban a pedagógiai kutató-fejlesztő munkában, amelynek során kidolgozták a négyéves tanítóképzés programját. Résztvevője a matematika tanításával, tanulásával kapcsolatos számos kutatási projektnek.



Raktári szám: NT-42701
ISBN 978 963 19-7936-7



OFI



9 789631 979367



SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE