TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette:
Csapó Benő és Szendrei Mária

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Tartalmi keretek
a matematika diagnosztikus értékeléséhez

TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette
Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet
és
Szendrei Mária
Szegedi Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszék

Nemzeti Tankönyvkiadó
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projekt azonosító: TÁMOP 3.1.9-08/1-2009-0001

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Szerzők:

Csapó Benő, Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária,
Szitányi Judit, Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:

Kosztolányi József és Vancsó Ödön

ISBN 978-963-19-7211-5

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu • Vevőszolgálat: info@ntk.hu • Telefon: 06-80-200-788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 42686 • Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Felelős szerkesztő: Szilágyi Edit • Műszaki szerkesztő: Dobó Nándor
Terjedelem: 29,67 (A/5) ív • Első kiadás, 2011

Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni.

Semmilyen emberi vizsgálódást nem nevezhetünk igaz tudománynak, ha azt nem lehet a matematika nyelvén kifejezni.

Leonardo da Vinci

Tartalom

Bevezetés

A matematika, amint arra a kötet mottójául választott *Leonardo*-idézet utal, különleges szerepet játszik a tudományok fejlődésében. Hasonlóan kiemelt jelentősége van az iskolai oktatásban is. A legrégebbi tudomány, melynek korai eredményei ma is iskolai tananyagnak számítanak. Az egyik legkorábban tantárggyá szerveződött tudásterület, amelyet ma is általában a legmagasabb óraszámban tanítanak. A magyar közoktatásban a matematika az egyetlen olyan iskolai tantárgy, amely mind a tizenkét évfolyamon végighalad. Tanításának előkészítése már az iskolába lépés előtt elkezdődik, és a természettudományi, valamint műszaki szakok mindegyikén, továbbá a társadalomtudományi szakok jelentős részén a felsőoktatásban is alaptantárgy.

A matematika tanulása a kezdetek óta összefonódik a gondolkodás fejlesztésével, az absztrakciós képesség és a logikus gondolkodás elsajátításával. A matematika jelen van a hétköznapi élet problémáinak megoldásában, és a matematikatudás alkalmazása számos munkakörben elengedhetetlen feltétel. E kitüntetett szerepe indokolja, hogy a matematika a nagy nemzetközi összehasonlító felmérések egyik állandó mérési területe, melyek eredményeit figyelembe veszik az országok fejlődési potenciáljának becslésénél. Magyarországon a szövegértés mellett matematikából kerül sor az évenkénti teljes körű felmérésekre, és természetes módon került be az olvasás és a természettudomány mellett a diagnosztikus mérési rendszer kidolgozására irányuló projektbe.

Az ezredforduló körüli évtizedekben számos olyan kutatási eredmény született, amely integrálva és a gyakorlatba átültetve fordulatot hozhat az iskolai oktatás eredményességének javulásában. Az a program, amelynek kertében ez a kötet létrejött, három jelentősebb kutatási tendencia metszetében helyezkedik el.

A pedagógiai rendszerek fejlődésének egyik kulcsa, hogy különböző szintű szabályozási köreiben mind gyakoribb, pontosabb és részletesebb visszacsatoló mechanizmusok jelennek meg. Ezen a téren az elmúlt évtizedek leglátványosabb változását a nagy nemzetközi felmérések rendszeressé válása hozta. A nemzetközi összehasonlító adatok lehetővé teszik az oktatás rendszerszintű sajátosságainak megismerését, és az egymást követő felmérések eredményei visszajelzést adnak az esetleges beavatkozások hatásairól is. A nemzetközi értékelési programok mérésmetodikai megoldásai segítették a nemzeti értékelési rendszerek kialakítását, és sok országban, köztük Magyarországon is megvalósult az elsősorban intézményi szintű visszajelzéseket szolgáltató évenkénti felmérés. Az intézmények saját felmérési adataik elemzése révén javíthatják belső folyamataikat, munkájukat, az eredmények nyilvánosságra hozatala pedig ösztönzést jelenthet a fejlődés lehetőségeinek keresésére. Ugyanakkor az ilyen jellegű rendszereket már hosszabb ideje működtető országok gyakorlata azt is megmutatta, hogy az ily módon az iskolákra gyakorolt nyomás csak egy bizonyos mértékig javítja az eredményeket, a túl erős késztetés különböző torzulásokhoz vezethet. A pedagógusok munkáját közvetlenül segítő módszerek és eszközök nélkül nem lehet a teljesítményeket tovább javítani. Ezen a téren az értékelés fejlődésének következő fázisát a gyakoribb, részletesebb, tanulói szintű visszajelzésekre alkalmas rendszerek kidolgozása jelenti.

A hagyományos, papír alapú tesztek révén nem lehet a tanulók felmérését kellő gyakorisággal elvégezni. Így nem valósulhatott meg a pedagógusok ellátása olyan mérőeszközökkel, amelyek közvetlenül a tanulást segítik azáltal, hogy követik a tanulók fejlődését, időben jelzik az esetleges lemaradásokat. Ezért másodikként az új információs és kommunikációs technológiák robbanásszerű fejlődését említjük, melyek az élet minden területén újszerű megoldásokat kínálnak. Alkalmazásukkal az oktatásban is kényelmesen megoldhatóvá válnak korábban megvalósíthatatlan feladatok. Ez utóbbiak közé tartozik a gyakori diagnosztikus visszajelzést biztosító pedagógiai értékelés. A számítógépek oktatási alkalmazása gyakorlatilag az első nagyméretű elektronikus számítógépek megjelenésével megkezdődött, már évtizedekkel ezelőtt is születtek számítógépes oktatóprogramok. Az informatikai eszközök iskolai alkalmazása azonban gyakran a technológia felől indult el, azzal a logikával, hogy ha már adott a lehetőség, alkalmazzuk azt a tanításban. Az online diagnosztikus értékelés a másik oldalról jutott el az informatika alkalmazásához, amikor egy alapvető jelentőségű pedagógiai feladat megvalósításához kerestük az eszközt. Itt az információs-kommunikációs technológia valóban egy mással nem pótolható eleme a rendszernek, amely kiterjeszti a pedagógiai értékelés lehetőségeit.

A harmadik, és e kötet tárgyához legközelebb álló fejlemény a pszichológia kognitív forradalma, amely folyamat a múlt század végén számos területre kihatott, és új lendületet adott az iskolai tanulás és tanítás kutatásának is. Új, a korábbinál differenciáltabb tudáskoncepciók kialakulásához vezetett, amely lehetővé tette az iskolai oktatás céljainak pontosabb meghatározását, tudományosan megalapozott standardok, követelmények kidolgozását. Ez a folyamat megnyitotta az utat a tanulók fejlődési folyamatainak részletesebb feltérképezése előtt is.

A kora gyermekkor meghatározó szerepének felismerése nyomán a figyelem középpontjába került az iskola kezdő szakasza, különösképpen a nyelvi fejlődés segítése és a gondolkodási képességek fejlesztése. Számos vizsgálat bizonyította, hogy az alapvető készségek elsajátítása nélkül a tanulók nem képesek a tananyag mélyebb megértésére, ennek hiányában pedig legfeljebb csak változatlan formában tudják reprodukálni a tananyagot, de nem képesek azt új helyzetekben alkalmazni. A megfelelő alapok kialakítása nélkül a későbbi tanulásban súlyos nehézségek jelentkeznek, az első iskolai években elszenvedett kudarc pedig egész életre meghatározza a tanuláshoz való viszonyt.

A matematika tantárgy kiemelkedő szerepet játszik a gondolkodási képességek fejlesztésében. Más tantárgyakhoz képest viszonylag kevés külső előismeretet feltételez, így már nagyon korán, kisgyermekkorban is elkezdhető a fejlesztés. A matematika tanulása lehetőséget ad arra, hogy a tanulók felismerjenek szabályszerűségeket, mérlegeljék a lehetőségeket, modelleket állítsanak fel. A matematikában korán fel lehet hívni a tanulók figyelmét arra, hogy kételkedjenek a vélt igazságban (sejtésben), keressék az okokat és a bizonyítékokat. A matematika egyedülálló lehetőségeket kínál a bizonyítás jelentőségének megértésére. Ma a strukturálatlan információk, adatok óriási tömege áll rendelkezésünkre. A matematika fejlesztheti az adatok és információk csoportosításának és megfelelő következtetések levonásának készségeit. Felértékelődik az összefüggések felismerésének, a kapcsolatok bizonyításának képessége, melyre az oktatásnak is figyelmet kell fordítania. A tudomány és technika óriási ütemben fejlődik, a tényszerű ismereteket az idő felülírhatja. A gondolkodási és probléma-megoldási képesség azonban nem avul el, és az élet egyre több területén jut szerephez. A matematika oktatásának már az első évfolyamtól kezdve fontos, később nem pótolható feladata a gondolkodási, probléma-megoldási képesség fejlesztése.

Az említett folyamatokkal összhangban indította el a Szegedi Tudományegyetem Oktatáselméleti Kutatócsoportja a „Diagnosztikus mérések fejlesztése” c. projektet. Ennek keretében az olvasás-szövegértés, a matematika és a természettudomány terén került sor a diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek részletes kidolgozására, melyekből e kötet a matematikához kapcsolódó munka eredményeit mutatja be. Ezekre épül az első hat évet lefedő, több száz feladatot tartalmazó feladatbank elkészítése, amely egy online tesztelésre alkalmas számítógépes rendszer részét képezi. Egy ilyen rendszer – melynek teljes kiépítése sok egymásra épülő lépésből álló hosszú folyamat – alkalmas lesz arra, hogy rendszeres és gyakori tanulói szintű visszajelzéseket szolgáltasson a tudás változásának különböző dimenzióiról.

A diagnosztikus tesztek mindenekelőtt azt elemzik, hol tart az egyes tanulók fejlődése bizonyos viszonyítási pontokhoz képest. Miként a rendszerszintű vizsgálatoknál, itt is természetes viszonyítási alap lehet a populáció átlaga: fontos információ, hogy hol tart a tanuló hasonló helyzetű társaihoz képest. Az online diagnosztikus tesztek azonban ennél többet nyújtanak: a rendszer nyilvántartja a tanulók eredményeit, így követni lehet a tanulók fejlődését, tudásuk időbeli változását is.

A mérőeszközök a tudományos alapossággal kifejlesztett tartalmi keretekre épülnek, amit három párhuzamos szerkezetű kötet foglal össze. Ez a kötet a matematika felmérésének tartalmi kereteit tartalmazza, két hasonló mű az olvasás és a természettudomány területén végzett munkáról számol be. A három területen párhuzamosan folyt a fejlesztő munka, ugyanazt a tágabb elméleti koncepciót, azonos fogalmi rendszert alkalmazva került sor a mérések részletes tartalmának meghatározására. A kötetek közös szerkezetén túl e bevezető és a negyedik fejezet is tartalmaz mindhárom területen megjelenő közös részeket.

Az itt bemutatásra kerülő fejlesztő munka épít a Szegedi Tudományegyetemen a pedagógiai értékelés terén folyó több évtizedes kutatómunka tapasztalataira, az MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport eredményeire, mindenekelőtt a tudás szerkezetével, szerveződésével kapcsolatos vizsgálatokra, a pedagógiai értékelés, a méréselmélet, a fogalmi fejlődés, a gondolkodási képességek fejlődése, a problémamegoldás, az iskolakészültség-felmérések eredményeire, továbbá a feladatírás, tesztszerkesztés, tesztfejlesztés terén kialakított technológiákra. Ugyanakkor a diagnosztikus mérések megalapozása olyan komplex feladat, amelynek megoldásához széles körű tudományos összefogásra van szükség. Ennek megfelelően a tartalmi keretek kidolgozása hazai és nemzetközi együttműködésben valósult meg, melyben részt vesznek a felmért területek kutatói is. Az egyes kötetek elméleti fejezeteinek megírásában társszerzőként közreműködnek az adott kérdések kiemelkedő specialistái, ezáltal a nemzetközi szinten elérhető legkiérleltebb tudományos tudásra építhetünk. A tartalmi keretek részleteit tantervfejlesztésben, feladatírásban jártas kutatók és gyakorlati szakemberek, pedagógusok dolgozták ki.

A tartalmi keretek elkészítése egy háromdimenziós tudáskoncepcióra épül, követve azt a hagyományt, amely végigvonul a szervezett iskolázás történetén. Régi törekvés az értelem kiművelése, a gondolkodás, az általános képességek fejlesztése. A modern iskolai oktatás is számos olyan célt tűz ki, amely magára a tanuló személyre vonatkozik. E célok megvalósításában mindenekelőtt az emberrel, a fejlődő gyermekkel foglalkozó tudományok eredményei igazítanak el bennünket. A fejlődéslélektan, a tanulásra vonatkozó pszichológiai eredmények, illetve újabban az agykutatás, a kognitív idegtudomány eredményei lehetnek e dimenzió forrásai. A matematika területén ennek a dimenziónak a lényege a matematikai gondolkodás, a matematikai képességek fejlesztése.

A célok egy másik köre az iskolában tanultak hasznosságával kapcsolatos: a „nem az iskolának tanulunk” figyelmeztetés ma talán aktuálisabb, mint korábban bármikor, hiszen a modern társadalmi környezet sokkal gyorsabban változik, mint amit az iskola követni tud. A korábbi kutatások eredményeiből tudjuk, hogy a transzfer, a tudás átvitele új területekre nem automatikus; megfelelő tanítási módszerekre van szükség az alkalmazás készségeinek fejlesztéséhez. Elengedhetetlen tehát, hogy egy diagnosztikus értékelés tartalmi kereteiben önállóan megjelenjenek a tudás alkalmazásának kérdései. Ez egy másik szempontú célrendszert jelent, annak meghatározását, mit várunk el a tanulóktól, hogy tudásukat az iskolai tanulás más területein vagy az iskolán kívül alkalmazni tudják.

Harmadsorban, fontosak azok a tartalmak, amelyeket az iskolák a tudományok és a művészetek által felhalmozott tudásból közvetítenek. Nem csupán azért, mert ezek nélkül az előző célokat sem lehet megvalósítani, hanem azért, mert önmagában is fontos, hogy a tanulók megismerjék a kultúra adott területét, a matematika, a természettudományok által létrehozott, és az adott tudomány belső értékei szerint szerveződő tudást. A matematika nemcsak a gondolkodás fejlesztésének és a gyakorlati problémák megoldásának eszköze, hanem önálló tudományos diszciplína, amelynek belső logikáját, tudásanyagát, a tudományág rendezőelveit és felépítését érvényesítő formában is el kell sajátítaniuk a tanulóknak. Bár az első iskolai években a tanulók fejlődési sajátosságai és a képességfejlesztés szempontjai kerülnek előtérbe, sem az értelmi képességek fejlesztése, sem a gyakorlati problémák megoldására való felkészítés nem lehet eredményes a tudományos tudás értő elsajátítása nélkül.

Az utóbbi évtizedekben ezek a célok egymással versengve jelentek meg, hol egyik, hol másik vált divatossá, dominánssá, háttérbe szorítva másokat. E projekt keretében feltételezzük, hogy az oktatás e célokat egymással integrálva valósítja meg, ugyanakkor a diagnosztikus értékelésnek ezeket differenciáltan kell kezelnie. A felméréseknek konkrétan meg kell mutatniuk, ha egyik vagy másik dimenzióban lemaradás tapasztalható.

A kötet első három fejezete az előzőekben említett három dimenzió elméleti hátterét, kutatási eredményeit összegzi. Az első fejezetben *Terezinha Nunes* és *Csapó Benő* a matematikai gondolkodás fejlődésének, fejlesztésének és felmérésének pszichológiai kérdéseit tekinti át. Ez a fejezet mutatja be a számokkal, mennyiségekkel való gondolkodás fejlődésének természetes folyamatát, melyet az eredményes matematikatanítás stimulálhat, felgyorsíthat. A második fejezetben *Csíkos Csaba* és *Lieven Verschaffel* a matematikai tudás alkalmazásával és a matematikai műveltséggel kapcsolatos kutatási eredményeket fogalja össze. A harmadik fejezet – *Szendrei Julianna* és *Szendrei Mária* munkája – azt vázolja fel, hogyan szerveződik a matematika mint tudományos diszciplína, mi tanítható, és általában mit tanítanak ebből az iskolában, továbbá milyen tartalmakat kínál a matematikai gondolkodás fejlesztése és a gyakorlati alkalmazások számára. Mindegyik tanulmány gazdag szakirodalmi háttérre épül, és részletes irodalomjegyzékük segítheti a későbbi fejlesztő munkát is. A negyedik fejezetben *Csíkos Csaba* és *Csapó Benő* a tartalmi keretek kidolgozásának elméleti kérdéseit és gyakorlati megoldásait tekinti át, továbbá bemutatja a diagnosztikus mérések részletes tartalmainak kidolgozása során követett alapelveket. Ez a fejezet teremt kapcsolatot az elméleti fejezetek és a részletes tartalmi leírások között.

A leghosszabb, a kötet terjedelmének felét kitevő ötödik fejezet tartalmazza a diagnosztikus értékelés részletes tartalmi kereteit. Ennek a fejezetnek az a funkciója, hogy megalapozza a mérőeszközök kidolgozását, a feladatok elkészítését. A mérés tartalmait az említett három dimenzió szerint csoportosítja. A diagnosztikus értékelés tekintetében az iskola első hat évfolyamát egy egységes fejlesztési folyamatnak tekintjük. Ennek megfelelően a mérési eredmények a hat évfolyamot átfogó skálákon helyezik el a tanulókat aktuális fejlettségi szintjük alapján. Így lényegében a feladatok tartalmainak leírása is egyetlen folyamatos egységet alkothatna. Az áttekinthetőség és az oktatási standardok leírásának hagyományait követve azonban a folyamatot három, egyenként két évet átfogó szintre bontottuk. Így mutatjuk be a három dimenzió mentén az összesen kilenc tartalmi blokkot, melyek mindegyike négy fő matematikai területet tartalmaz.

A tartalmi kereteknek azt a formáját, amelyet ebben a kötetben összefoglaltunk, egy hosszabb fejlesztési folyamat kezdő lépésének tekinthetjük. Meghatároztuk, hogy a ma rendelkezésre álló tudás alapján mit célszerű mérni, melyek a felmérések fő dimenziói. Az áttekintett területeken azonban nagyon gyors a fejlődés, ezért a későbbiekben időről időre integrálni kell az új tudományos eredményeket. A feladatbank kidolgozásában szerzett tapasztalatok, majd később a diagnosztikus rendszer működése révén keletkező adatok elemzése lehetőséget nyújt a tartalmi leírások folyamatos finomítására. A feladatok bemérése, majd az adatok összefüggéseinek elemzése nyomán az elméleti modelleket is újraértékeljük. Néhány év múlva azt is elemezni lehet, hogy a korai fejődés egyes területei milyen összefüggésben állnak a későbbi teljesítményekkel, így mód lesz a feladatok prediktív és diagnosztikus validitásának meghatározására, ami szintén fontos forrása lehet az elméleti keretek továbbfejlesztésének.

A kötet elkészítésében meghatározó szerepet játszott *Csíkos Csaba,* aki azon túl, hogy társszerzőként részt vett három fejezet megírásában, irányította a részletes tartalmi kereteket kidolgozó munkacsoport tevékenységét is. A munkában a szerzőkön kívül számos további munkatársunk működött közre, akiknek ezúton is köszönetet mondunk. Külön is köszönjük a projektet irányító és szervező team, *Molnár Katalin*, *Kléner Judit* és *Túri Diána* munkáját. A tartalom kidolgozásához és végső formába öntéséhez sok segítséget kaptunk szakmai lektorainktól. Ezúton is köszönjük *Kosztolányi József és Vancsó Ödön* értékes kritikai észrevételeit és javaslatait.

Csapó Benő és *Szendrei Mária*

1.

A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése

Terezinha Nunes
University of Oxford Department of Education

Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Bevezetés

A matematika az egyik legrégebbi tudományág, amely ma is érvényes forrásként használható az iskolai tananyag tervezéséhez. Bár nyilvánvalóan fontos az alkalmazhatósága a mindennapi életben, a matematika nagy részét mégis inkább abban a reményben oktatják, hogy a matematika elsajátítása általában is fejleszti a gondolkodást, csiszolja az elmét. A matematika szisztematikus megközelítési módokat kínál a tanulók számára a különféle problémák kezeléséhez és alkalmas a fizikai, biológiai és társadalomtudományok területén felmerülő helyzetek elemzésére és modellezésére. A matematikának a világ megértésében játszott szerepét nagyon világosan fogalmazta meg Galilei, amikor azt írta, hogy az univerzum, ez a hatalmas könyv, amely mindig nyitva áll a szemünk előtt, ám csak akkor érthető meg, ha először megtanuljuk olvasni azt a nyelvet, amelyen írták: a matematika nyelvét (*Sobel,* 1999).

A matematikával ellentétben a matematika tanításának és oktatásának tudományos kutatása viszonylag fiatal tudományág, mindössze egy évszázados. A vizsgálódásra érdemes kérdések és a kérdések megválaszolásához használt kutatási módszerek idővel sokat változtak, egy dolog azonban továbbra is központi kérdés maradt a fejlődéslélektanban és az oktatásban: vajon a matematikatanulás javítja-e a gondolkodást, vagy a matematika tanulása csak azok számára áll nyitva, akik már elértek egy megfelelő gondolkodási szintet? Az általános kognitív képességek fejlesztése különösen fontos a rendkívül gyorsan változó társadalmi környezetben; ezért sürgető, hogy választ adjunk erre a kérdésre.

A modern fejlődéslélektanban kétféle, látszólag egymástól eltérő megközelítés próbált magyarázatot adni a kognitív fejlődésre. Egyrészt *Piaget* és munkatársai azokat a gondolkodási formákat elemezték, amelyek a gyermekeket fejlődésük során jellemzik, a gyerekek problémamegoldó stratégiáira (vagyis cselekedeteire és gondolkodására) és e stratégiák igazolására összpontosítva (*Inhelder* és *Piaget,* 1958; *Piaget* és *Inhelder,* 1974, 1975, 1976). A másik oldalon *Vigotszkij* kövezte ki az utat annak mélyebb megértéséhez, hogy a tanulók hogyan tudják a kulturális jelrendszerek (mint pl. a számrendszer, a gráfok és az algebra) segítségével kifejezni saját gondolataikat, majd gondolkodni és beszélni ezekről a külső jelekről, tárgyiasítva és gondolkodási eszközzé téve őket (*Vigotszkij,* 1971).

Egy egyszerű példával megvilágítható ez a szempont. Ha valaki megkérdezi tőlünk, hogy hány óra, azonnal az óránkra nézünk. Ahogy a mindennapi életben és a tudományban az időről gondolkodunk, azt befolyásolják az időmérő eszközeinkben, például karóráinkban megtestesülő matematikai viszonyok. Az állítjuk, hogy „egy nap 24 órából áll”, mert az időt órákban mérjük; az 1 nap és az 1 óra közötti arány 24:1; az órák és a percek közötti arány 60:1, és a percek és a másodpercek közötti arány szintén 60:1. Az időt ennek a kulturális eszköznek – az órának – a segítségével jelenítjük meg, és az órába beépített matematikai viszonyok teszik lehetővé számunkra, hogy a nap időtartamát kifejezzük. Ennek a kulturális eszköznek a segítségév el finom különbséget tudunk tenni az idő és azon struktúrák között, amelyekben az időről gondolkodunk. E nélkül nem tudnánk időpontot egyeztetni a barátainkkal, megállapodni mondjuk 11 órában, majd azt mondani: „Elnézést, 10 percet késtem”. Az időről nincs olyan pontos képzetünk, hogy a nap egy adott időpontjában pontosan meg tudnánk mondani, hogy 11 óra van, vagy megállapitani a különbséget 11 óra és 11:10 között. Ez a történetnek *Vigotszkij*-féle változata.

A történet *Piaget* által felvázolt változata akkor válik fontossá, amikor arról gondolkodunk, hogy a gyerekeknek mit kell megérteniük ahhoz, hogy megtanulják leolvasni az órát és összehasonlítani a különböző idő-pontokat. Az óra számlapján lévő számoknak kétféle jelentése van: az órát és a percet mutatják. Ahhoz, hogy egy gyermek a perceket le tudja olvasni, képesnek kell lennie viszonyítani az 1-et az 5-höz, a 2-t a 10-hez, a 3-at a 15-höz stb. Ahhoz, hogy megállapítsa például az 1 óra 15 perc és a 2 óra 35 perc közötti intervallumot, tudnia kell, hogy egy óra 60 percből áll, és a 2 óráig eltelt perceket hozzá kell adnia a 2 óra után eltelt percekhez. Ezeket a gondolkodási folyamatokat társítani kell az eszközhöz annak érdekében, hogy a gyerek megtanulja használni azokat. Itt most nem kívánunk további példákat felhozni: elég világosnak látszik, hogy az óra használatának elsajátításához meg kell érteni a percek és órák közötti viszonyt, valamint ismerni az óra számlapján lévő számokat. A kutatások azt mutatják, hogy ez még egy nyolcéves gyermek számára is kihívást jelenhet (*Magina* és *Hoyles,* 1997).

Ebben a fejezetben elsősorban azokra a gondolkodási formákra koncentrálunk, amelyek a matematika tanulásához nélkülözhetetlenek, valamint azoknak a konvencionális matematikai jeleknek az elsajátítására, amelyek lehetővé teszik és strukturálják a gondolkodást. A fejezet első részében három fő kérdésre fordítunk kiemelt figyelmet: egész számok, racionális számok és feladatmegoldások matematikaórán. Mindegyik területen megkíséreljük feltárni a matematika és a hozzá kapcsolódó kulturális eszközök elsajátításának pszichológiai elveit. A fejezet az általános iskolai matematikatanulásra összpontosít, és az 5-12 éves korú gyerekekkel végzett kutatások eredményeit veszi alapul. Nem foglalkozunk az idősebb korosztályba tartozó gyermekekkel, és nem véljük úgy, hogy az itt felvetett kérdések megválaszolása elegendő a későbbi matematikatanulás megértéséhez.

Azokra a gondolkodási folyamatokra, amelyeknek fejlesztésével az iskolai matematikatanítás foglalkozik, hatással vannak az iskola előtti és az iskolán kívüli tapasztalatok is. A matematikában tanultak felhasználására más tantárgyakban is sor kerül, ahogy a más tárgyakban szerzett tapasztalatok is gazdagítják a matematika tanulását. Különösen a természettudomány tanítása segítheti a matematikai gondolkodás fejlődését, elsősorban tapasztalati alapot és gyakorlóterepet szolgáltatva a matematikában is fejlesztendő gondolkodási folyamatoknak. Vannak azonban olyan területek, mint például a szimbólumok használata, amelyeken a matematikának meghatározó szerepe van, ezért ebben a fejezetben ezekre fektetjük a fő hangsúlyt. Ugyanakkor, bár kevésbé részletesen, áttekintjük azokat a gondolkodási folyamatokat is, amelyeket a matematikában és más tárgyakban egyaránt fejlesztendőnek tartunk.

Matematikaoktatás és kognitív fejlődés

Egész számok

Az általános iskola első éveiben a számok tanításának az a célja, hogy a gyerekek megismerjék a gondolkodási szimbólumokat és a mennyiségeket. A későbbi években a gyerekektől elvárhatjuk, hogy a számok koncepcióját absztraktabb módon is felfedezzék, és olyan számokat elemezzenek, amelyek nem mennyiségeket reprezentálnak, de az általános iskolai években a számokat a mennyiségek és a köztük lévő viszonyok kifejezésére használják.

A mennyiségek és a számok nem azonosak. *Thompson* érvelése szerint „egy személy azáltal alkot mennyiséget, hogy egy tárgy minőségét úgy értelmezi, hogy megérti annak mérhetőségét is. A mért mennyiségeknek számbeli értéke van, de ahhoz, hogy gondolkodjunk róluk, nem kell mérnünk őket, illetve tudnunk az értéküket. Gondolhatunk például a saját magasságunkra, egy másik ember magasságára, vagy arra, hogy mennyivel vagyunk magasabbak valaki másnál úgy is, hogy nem tudjuk a pontos értékeket" (*Thompson,* 1993. 165–166. o.). Számok használata nélkül is megállapíthatjuk, hogy ha magasabb vagy a barátodnál, Ricknél, és Rick magasabb, mint barátja, Paula, akkor te magasabb vagy Paulánál. Ebben biztos lehetsz akkor is, ha soha nem találkoztál Paulával. Tehát a mennyiségek közötti viszonyról gondolkodhatunk anélkül is, hogy azokat konkrét számokban fejeznénk ki. De ha számokban is ki tudjuk fejezni őket, akkor többet tudunk: ha tudod azt, hogy 4 centivel vagy magasabb Ricknél, és Rick 2 centivel magasabb Paulánál, akkor tudod, hogy te és Paula magassága között 6 cm különbség van.

Az általános iskola első éveiben a gyerekek megismerik a számokat mint a gondolkodás és a mennyiségekről való beszéd eszközeit. A számokra mint megjelenítő eszközökre helyezett hangsúly a számrendszerek mint gondolkodási eszközök jelentőségéről szól. Nem tudunk mennyiségeket rögzíteni vagy másokkal beszélgetni róluk, ha nem rendelkezünk egy olyan számrendszerrel, amellyel a mennyiségek kifejhetőek. A mennyiségek kifejezésére szolgáló rendszer segítségével képesek vagyunk különbséget tenni, amire a rendszer nélkül nem lennénk képesek. Például, nem tudunk puszta ránézésre különbséget tenni 15 és 17 gomb között, de nincs problémánk a különbségtétellel, ha megszámoljuk őket. Vagy lehet például, hogy nem tudjuk megállapítani, hogy egy szekrény, amit az üzletben kinéztük, befér-e egy adott helyre a lakásunkba, de tudni fogjuk, ha lemérjük a szekrényt és a helyet is, ahová be akarjuk tenni. A mennyiségeket kifejező rendszerek segítségével képesek vagyunk olyan különbségtételre, amire ránézésre nem lennénk képesek, valamint térben és időben összehasonlításokat tehetünk a mennyiségek között. Képessé teszik és strukturálják gondolkodásunkat: a mérésnél számokban gondolkodunk.

Így tehát két fontos dolog van, amit a gyerekeknek el kell sajátítaniuk, hogy megértsék az egész számokat. Először, fel kell ismerniük, hogy a számokról és a mennyiségekről meglévő ismereteiket össze kell kapcsolni. Másodszor, meg kell érteniük, hogyan működik a számrendszer.

Piaget, és utána még sok más kutató is számos olyan fogalmat vizsgált meg, amelyekkel a gyerekeknek rendelkezniük kell ahhoz, hogy a mennyiségeket össze tudják kapcsolni és számokban kifejezni. A gyerekeknek tudniuk kell például, hogy:

(1) ha két mennyiség ekvivalens, ugyanazzal a számmal kell kifejezni őket;

(2) ha két mennyiség azonos számmal van leírva, akkor azok ekvivalensek;

(3) ha egy adott halmazhoz néhány elemet hozzáadunk, az a szám, amely a halmazt reprezentálja, megváltozik és nagyobb számosságú lesz;

(4) ha egy halmazból elveszünk néhány elemet, a számosságának meg kell változnia, és kisebbnek kell lennie;

(5) ha egy halmazhoz ugyanolyan számú elemet teszünk hozzá, és veszünk el belőle, a mennyisége és az elemek száma nem változik (vagyis érteniük kell az összeadás és kivonás közötti fordított viszonyt).

A körülbelül négy-öt évesnél a fiatalabb gyerekek még nem értik a számok és a mennyiségek közötti viszonyt (lásd *Ginsburg, Klein* és *Starkey,* 1998, az első négy pont tekintetében; lásd *Nunes, Bryant, Hallett, Bell* és *Evans,* 2009, az utolsó pont tekintetében). Egyes kutatások szerint a kicsi gyerekek, sőt még a csecsemők is belátják, hogy ha az egy elemből álló halmazhoz még egy elemet hozzáadunk, akkor két elemünk lesz, de nincs bizonyíték arra, hogy a nagyon picik tudják, hogy kapcsolat van a mennyiségek és a számmal kifejezett szimbólumok között. A kicsikkel végzett minden vizsgálat érzékelésen alapul, ezért semmit nem mond nekünk arról, hogy az 1 számmal reprezentált halmaz többé már nem írható le 1-gyel, ha egy újabb elemet hozzáadunk. Az érzékelésen alapuló ítéletek és a szimbólumok használata közötti különbség a lényege a matematikatanulás és gondolkodás megértésének.

A mennyiségek és a számok közötti ezen öt összefüggés belátása szükséges (de ahogy a továbbiakban kifejtésre kerül, nem elegendő) feltétele az egész számok megértésének, de az öt kapcsolat belátása nem azonos nehézségi fokú. Az első négy sokkal egyszerűbb, mint az utolsó, amit szokás úgy megfogalmazni, hogy az összeadás és kivonás között inverz kapcsolat van.

Az összeadás és kivonás közötti összefüggés megértésének nehézsége abból adódik, hogy két műveletet, az összeadást és a kivonást kell egymással összehangolni és megérteni azt, hogy ez a koordináció hogyan érinti a számokat; ez nem következik abból az információ mennyiségből, amit a gyermeknek figyelembe kell vennie ahhoz, hogy a kérdésre válaszolni tudjon. *Bryant* (2007) az állítást egy vizsgálattal bizonyította, amelyben gyerekeket arra kértek, hogy halmazokkal kapcsolatban azonos mennyiségű információt vegyenek tekintetbe; egyes feladatok tartalmazták az összeadás és kivonás közötti fordított kapcsolatot, míg mások nem. Az inverz feladatoknál azonos számú tételt adtak hozzá és vontak ki egy halmazból. Az inverz kapcsolatot nem tartalmazó feladatoknál azonos számú tételt adtak hozzá egy halmazhoz és vontak ki egy vele ekvivalens halmazból. Néhány gyerek képes volt felismerni, hogy az eredetileg ekvivalens halmazok megváltoztak, miután egyikhez néhány tételt adtak hozzá, míg a másikból elvettek, de mégis sikertelennek bizonyultak az inverz kapcsolattal, amely ugyanazon a halmazon végzett műveleteket igényelt.

Ha tényleg fontos a mennyiségek és számszerű kifejezésük közötti összefüggés megértése, akkor a gyereknek e viszonyok felismerésére való képessége és a matematikatanulás között is összefüggésnek kell lennie. A matematikatanulás terén előnnyel indulnak azok a gyerekek, akik már az iskolába lépéskor tudják, hogy a mennyiségek és a számok milyen viszonyban vannak egymással, szemben azokkal, akik még nem jutottak el erre a felismerésre. Két különböző kutatócsoport által (*Nunes, Bryant, Evans, Bell, Gardner, Gardner* és *Carraher,* 2007; *Stern,* 2005) végzett két vizsgálat kimutatta, hogy a gyerekek körében az összeadás és a kivonás közötti fordított összefüggés megértése előre vetíti, hogy későbbiekben milyen matematikai eredmények elérésére képesek, még akkor is, amikor az olyan általános kognitív tényezők szerepét, mint az intelligencia és a munkamemória, kiszűrték.

A fordított összefüggés megértése idővel javul a gyerekeknél. A gyerekek először annak felismerésére képesek, hogy fordított összefüggés van az összeadás és a kivonás között, ha a feladatot mennyiségekkel is illusztrálják számukra (akár vizuálisan, akár képzeletben); később is képesnek tűnnek ennek megértésére, ha a számokról kérdezzük őket, nem hivatkozva a mennyiségekre. Ha azt kérdezzük, mennyi 34 meg 29 mínusz 29, tudják, hogy nem kell kiszámítaniuk az eredményt: tudják, hogy a válasz 34. Számolás nélkül tudhatják a választ a 34+29–28-ra is, de ez már egy bonyolultabb kérdés.

Összefoglalva, az egész számok megértéséhez a gyerekeknek fel kell ismerniük, hogy speciális összefüggés van a mennyiségek és a számok között. A gyerekek négy-öt éves kor körül megértik azt, hogy ha két halmaz egyenlő, és az egyiket megszámolják, számolás nélkül tudni fogják, hogy mennyi van a másikban. Hatéves korban már megértik az összeadás és kivonás közti inverz összefüggést, és tudják, hogy ha azonos számot adnak hozzá, és vonnak ki egy halmazból, a szám nem változik. Ennek a korai megértése jól előre jelzi a későbbi matematikai teljesítményeket.

Az előző bekezdésekben leírt felismerések a mennyiségek és számok közötti logikai kapcsolatokra vonatkoznak, de csupán ez nem elegendő az egész számok elemzéséhez. Fel kell tenni azt a kérdést is: ha a számokat a tízes számrendszerben reprezentáljuk, milyen követelményeket támaszt ez a reprezentáció a tanuló kognitív képességeivel szemben? A tízes számrendszer kétféle követelményt támaszt: a tanulónak értenie kell az összeadási és a szorzási összefüggéseket is.

Az additív relációk a rész és egész viszonyáról való gondolkodást feltételezik. Annak megértéséhez, hogy mit jelent a 25, a tanulónak tudnia kell, hogy a két rész, a 20 és az 5 együtt összesen pontosan 25-öt tesznek ki. Általánosabban fogalmazva a tanulónak ismernie kell a számok additív összetételét, ami azt jelenti, hogy minden szám előállítható két másik szám összegeként, illetve általában több szám összegeként. A tízes számrendszernél egyébként a lényeg éppen az, hogy minden szám egyértelműen bontható fel a tíz különböző hatványainak lineáris kombinációjaként.

A szorzási relációk a tízes számrendszerben számok alakjával és a helyiérték-rendszerben elfoglalt helyével kapcsolatosak. Amikor a számokat leírjuk, az a hely, ahová a számjegyet írtuk, implicite egy szorzást jelent: ha a szám jobbról az utolsó, akkor 1-gyel van szorozva, ha a második, 10-zel, ha a harmadik, 100-zal és így tovább.

A kisgyerekeknél az összeadási és szorzási összefüggések megértése nehezen megfogható és rejtett lehet, ezért speciális feladatokra van szükségünk a gondolkodás felméréséhez. Olyan feladatokat készítettünk, amelyek fel tudják mérni az összeadási műveleteket és a szorzásban érvényesülő gondolkodási folyamatokat. Az összeadást egy „vásárlási feladattal" értékeltük. Arra kértük a gyerekeket, hogy tegyenek úgy, mintha egy boltban vásárolnának; különböző értékű pénzérméket kaptak a vásárláshoz. Ha például meg akarnak venni egy játékautót, ami 9 centbe került és van egy 5 centes érméjük és hat darab 1 centes, az 5 centest négy 1 centessel kell kiegészíteniük. Azok a gyerekek, akik nem értik az összeadási műveleteket, úgy gondolják, hogy nincs elég pénzük ahhoz, hogy megvegyék a játékot: azt mondják, hogy van öt meg hat centjük, de a pénzükből nem „jön ki" a 9 cent. A hatéves korú gyermekek kétharmada meg tudja oldani a feladatot. Ez a feladat nagyon jól megjósolja az általános iskolai tanulók későbbi várható matematika teljesítményét (*Nunes* és mtsai., 2007; *Nunes, Bryant, Barros* és *Sylva,* 2011).

A kisgyerekeknek a szorzási összefüggések megértésére való képességét oly módon mértük fel, hogy megkértük őket szorzási és osztási feladatok tárgyak segítségével való megoldására. Mutattunk például nekik egy négy házból álló sort és arra kértük őket, képzeljék el, hogy mindegyik házban három nyuszi lakik. Aztán megkérdeztük tőlük, hogy hány nyúl lakik a házakban. Azok a gyerekek, akik már rendelkeztek bizonyos ismeretekkel a szorzási összefüggésekre vonatkozóan, egyenként háromszor rámutattak és házakra és közben „számolták a nyulakat". Az, hogy a kisgyerekek mennyire képesek az ilyen típusú feladatok megoldására, jól előrejelzi a későbbi matematikai teljesítményüket (*Nunes* és mtsai., 2007; *Nunes, Bryant, Barro*s és *Sylva,* 2011).

Összefoglalva, a gyerekeknek kétféle ismeretet kell elsajátítaniuk ahhoz, hogy megértsék az egész számokat. Fel kell fogniuk a mennyiség és a számok közötti kapcsolatot, és meg kell érteniük az egész számok megjelenítésére használt számrendszer, a tízes számrendszer elveit, és általában a számrendszerek elveit, hiszen nemcsak tízes számrendszer van. Az említett óra példája a 60-as számrendszerre utal, a számítógépek a kettes számrendszert használják. A kutatók rámutattak arra, hogy azok a gyerekek, akik az általános iskola elején megszerzik ezt a tudást, később magasabb szintű matematikai teljesítményre képesek 8, 11 és 14 éves korukban (*Nunes, Bryant, Barros* és *Sylva,* 2011). Ezért a matematikai tudás korai felmérésének e képességek értékelésére kell irányulnia, hogy segítsék a tanárokat annak eldöntésében, mit tanítsanak a gyerekeknek.

Racionális számok

A racionális (nem egész) számok ahhoz szükségesek, hogy ki tudjuk fejezni az egy egységnél kisebb mennyiségeket. Ezek a mennyiségek mérési és osztási (hányados) helyzetekben jelennek meg. Méréskor, ha például a cukrot csészével mérjük és egy csészénél kevesebb mennyiségünk van, mondhatjuk azt, hogy egyharmad csésze – vagy, számmal kifejezve, 1/3. Hányadosok esetén, ha pl. egy csokoládét három gyerek között osztunk el; minden gyerek annyit kap, amennyi az 1-nek 3-mal való elosztásakor eredményként adódik, vagyis 1/3-ot. Ezekben az esetekben az a közös, hogy ahhoz, hogy hányadokról tudjunk beszélni, egyenlő részekre való osztásnak kell bekövetkeznie. Tehát a törtek számok, amelyek, szemben az egész számokkal, osztás, nem pedig megszámolás eredményei.

Az osztásban három fogalom szerepel:

(1) az osztandó, ami az elosztandó mennyiséget jelenti,

(2) az osztó, azon részek száma, amelyekre a mennyiséget osztani kell,

(3) a hányados, ami az osztás eredménye és a tört által kifejezett érték.

Ahhoz, hogy a gyerekek megértsék a törtszámokat mint bizonyos mennyiségek kifejezésére alkalmas matematikai eszközt, meg kell érteniük a számok közötti kapcsolatot és a mennyiségeket, amit kifejeznek. A törtek sok tekintetben különböznek az egész számoktól: itt most három olyan alapvető különbséget vizsgálunk, amelyet a gyerekeknek tudniuk kell ahhoz, hogy megértsék ezeket a számokat.

(1) Egy adott törtön belüli kifejezésnek a másikhoz való viszony ad jelentést: ily módon az 1 az 1/2-ben nem ugyanazt a mennyiséget fejezi ki, mint az 1 az 1/4-ben.

(2) Ugyanaz a törtszám eltérő mennyiségeket fejezhet ki, mert a tört önmagában az egészhez való viszonyt jelenti. Ezért 8-nak az 1/2-e nem azonos 12-nek az 1/2-ével, bár ugyanazzal a számmal van kifejezve.

(3) Különböző törtszámok azonos mennyiséget is kifejezhetnek: ugyanannak a pitének az 1/2-e és a 2/4-e azonos mennyiségek; a matematika órán ezt az egyenlő törtszámok vizsgálatának hívjuk.

Úgy tűnik, hogy sok tanuló először nem érti, hogy a törtben lévő számok mennyiségek közti viszonyt fejeznek ki (*Vamvakoussi* és *Vosniadou,* 2004); eltart bizonyos ideig ennek a megértése, legalábbis az oktatás jelenlegi körülményei között. Az alábbiakban bemutatunk néhány példát a törtek megértése ezen aspektusának vizsgálatára.

A tanulók által megértendő egyik összefüggés az, hogy minél nagyobb az osztandó, annál nagyobb a hányados, ha az osztó változatlan marad. Rész-egész helyzetekben az osztandó az egész, ami nem teljesen világos a törtszámmal történő kifejezéseknél; amikor azt mondjuk, hogy 1/3 csésze, a csészében levő mennyiséget osztjuk el. Könnyen megérthető, hogy egy kis csésze 1/3-a és egy nagy csésze 1/3-a nem azonos mennyiségek. A tanulók számára azonban nem könnyű annak megértése, hogy az 1/3 szimbólummal kifejezett mennyiség nem lesz mindig ugyanannyi, mert a felosztandó mennyiség eltérő lehet.

Nem ismerünk olyan tanulmányt, amely foglalkozott volna azzal a kérdéssel, hogy ugyanaz a tört jelenthet-e különböző számokat, de *Hart, Brown, Kerslake, Kücherman* és *Ruddock*nak (1985) a törtek tanulók általi megértését vizsgáló nagyszabású munkája felvetett olyan kérdést, amely a törtszámok és a mennyiségek közötti összefüggés megértését firtatja. A diákoknak azt mondták, hogy Mary zsebpénzének 1/4 részét költötte el, John pedig zsebpénze 1/2 részét, majd feltették a kérdést: lehetséges-e az, hogy Mary többet költött, mint John? Ha a tanulók tudják azt, hogy az egésznek a nagysága számít, meg tudják mondani, hogy igen, lehetséges az, hogy Mary több pénzt költött. A 11-12 éves gyerekek 42%-a és a 12-13 évesek 34%-a azt válaszolta, hogy ez nem lehetséges; válaszukat azzal indokolták, hogy 1/2 mindig több, mint 1/4. Így tehát ebben az életkorban nem egyértelmű a gyerekek számára, hogy az azonos törtszám nem mindig azonos mennyiséget fejez ki.

A törtek egyelőségének – vagyis annak, hogy a különböző törtek azonos mennyiséget fejezhetnek ki – a megértése döntő fontosságú a menynyiségek és a törtek összekapcsolása, valamint a törtek összeadása és kivonása szempontjából. A kutatások azt mutatják, hogy a törtek ekvivalenciájának megértése nem minden tanuló számára könnyű (*Behr, Wachsmuth, Post* és *Lesh,* 1984; *Kerslake,* 1986) és nem egyszer és mindenkorra adott: a tanulók egyes helyzetekben felismerhetik a dolgot, más helyzetekben nem. Korábban a törtek egyenlőségének megértését vizsgáltuk 8-10 éves korosztályú tanulókkal rész-egész és hányados helyzetekben, mindkettőnél rajzok segítségével (*Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans* és *Wade,* 2007). A rész-egész szituációban a feladat a következő volt: Peter és Alan egyforma csokoládét kaptak, amelyek túl nagyok voltak ahhoz, hogy egy nap alatt megegyék. Peter 8 egyenlő részre osztotta a csokoládéját és megevett belőle 4-et; Alan a csokiját 4 részre törte és 2-t evett meg belőle. A tanulóktól azt kérdeztük, hogy a fiúk vajon azonos mennyiségű csokit ettek-e. A helyes válaszok aránya ennek a feladatnak az esetében 31% volt. A hányados szituációban a feladat a következő volt: egy 4 lányból álló csoport egyenlően oszt el egy tortát, míg egy 8 fiúból álló csoport két tortát oszt el, a lányokéval azonos tortából. A tanulóknak meg kellett mondaniuk, hogy a fiúk ugyanannyi tortát ettek-e, mint a lányok. A helyes válaszok aránya ebben az esetben 73% volt. Tehát a tört mennyiségek esetében az ekvivalencia megértése különböző lépcsőkben történik: hányados helyzetekben sokkal jobb a teljesítmény.

A tanulók által e két helyzetben nyújtott teljesítmény sok tanár számára talán meglepő lehet, de fontos tudni, hogy azok a feladatok, amelyek a matematikusok számára nagyon hasonlónak tűnnek, a tanulók szemében teljesen különbözőek lehetnek (*Vergnaud,* 1979). A fejlődéslélektannal foglalkozó pszichológusok azt vizsgálják, hogy a gyerekek a különböző tárgyakat ugyanazon kategória megjelenésének tekintik-e, megtanítva őket a tárgyak nevére és megkérve őket arra, hogy tanítás nélkül nevezzék meg a második tárgyat. Ha a gyerekek az első tárgynál megtanult elnevezést általánosítják a második tárgyra, ebből arra lehet következtetni, hogy mindkettőt ugyanazon kategória egy-egy példányának tekintik.

Ezt a megközelítést a törtek elemzésével kapcsolatos két vizsgálatban is alkalmazták (*Nunes, Campos* és *Bryant,* 2011; *Mamede,* 2007). Ezekben a kísérletekben két olyan tanulói csoportot, akik az iskolában még nem tanultak törtekről, megtanították a számok törtek formájában való reprezentációjára. A tanulókat véletlenszerűen választották ki a különböző tanítási módszerekben részt vevő csoportba, majd egyik csoportot arra tanították, hogy a tört-szimbólumot a rész-egész viszonyok kifejezésére használják, míg másikat arra, hogy a mennyiségeket hányados szituációkban reprezentálják. A kísérleti időszak végére az előteszt eredményeihez képest mindkét csoport fejlődött, el és jóval többet haladt, mint egy kontroll csoport, de ez a fejlődés ahhoz a szituációhoz kötődött, amelyben tanították őket. Azok a tanulók, akik a rész-egész viszonyokra tanulták meg alkalmazni a törteket, nem tudták őket használni hányados helyzetek leírására, és megfordítva. A gyerekek tehát nem látják át azonnal, hogy a törteket alkalmazhatják rész-egész és hányados helyzetekben is: nem általánosítják a szimbólumok használatát egyik helyzetből a másikra. Ez a megállapítás óvatosságra intheti a kutatókat a tekintetben, hogy általános következtetést vonjanak le a tanulók törtekkel kapcsolatos ismereteiről akkor, ha csak egyfajta szituációban vizsgálták a tanulók teljesítményét.

Végül, a törtek nagyság szerinti sorrendbe való állításához szükség van az osztásnál az osztó és a hányados, vagy a törtben a nevező és a hányados közötti összefüggés ismeretére: konstans számláló mellett minél nagyobb a nevező, annál kisebb mennyiségről van szó. Ha a gyerekek inkább a mennyiségekre és nem a számjegyekre koncentrálnak, akkor jobban felismerik az osztó és a hányados közötti fordított összefüggést: például a 6-7 éves gyerekek többsége érti, hogy minél több ember osztozik egy tortán (vagy bizonyos számú édességen), annál kevesebb jut egynek. Ennek megértése azonban nem vezet el ahhoz a tudáshoz, hogy a törtek hogyan tehetők nagyságrendi sorrendbe. *Hart* és munkatársai (1985) arra kérték a tanulókat, hogy rakják növekvő sorrendbe az 1/4, 1/2, 1/100 és 1/3 törteket. Ez könnyű feladat lenne, hiszen a számláló minden esetben azonos, de a 11-13 éves korú diákoknak csupán 2/3-a találta el a helyes sorrendet.

Összefoglalva, a racionális számok osztási művelet és nem pedig számlálás eredményeként létrejött mennyiségek kifejezésére szolgálnak. Ezért ahhoz, hogy a tanulók megértsék a racionális számok és a törtek által kifejezett mennyiségek közötti összefüggést, ismerniük kell az osztási műveletnél a három mennyiség közötti viszonyt. Ugyanaz a tört különböző mennyiségeket fejezhet ki, mert különböző egész számok tört része lehet. Két különböző tört szám azonos mennyiséget fejez ki, ha a számláló és a nevező közötti összefüggés megegyezik annak ellenére, hogy a két törtszám számlálója és nevezője eltérő. Azonos számlálójú törteknél minél nagyobb a nevező, annál kisebb a kifejezett mennyiség. Végül, a tanulók számára nem egyértelmű a törtek általános alkalmazása a rész-egész és a hányados feladatokban; a hányados feladatokban megszerzett ismeretek nem vihetők át a rész-egész feladatokra, és megfordítva.

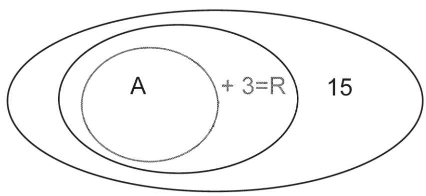
Számtani feladatok megoldása

A számtani feladatok megoldásával foglalkozó kutatások sok figyelmet fordítottak a többjegyű számokkal való számolás elsajátításának. Ez az értékes vizsgálat (*Brown* és *VanLehn*, 1982; *Resnick*, 1982) sok mindent elmond nekünk arról, hogy a gyerekek alapvetően hogyan közelítik meg a számolást, még akkor is, ha hibát követnek el. Magát a vizsgálatot itt most nem tárgyaljuk, mivel a különböző fajta többjegyű számokkal való számolás nehézségei jól dokumentáltak: ismert például, hogy az átcsoportosítással (vagyis átvitellel, illetve kölcsönvétellel) való számolás nehéz; tudjuk azt is, hogy a kivonás, szorzás és osztás elvégzése gondot jelent abban az esetben, ha a számok között nulla is van, az összeadásnál azonban a nulla kevesebb problémát okoz. Így tehát nem nehéz néhány olyan számtani feladatot találni, amelyekkel jól megítélhetők a tanulók számolási készségei. Sajnos továbbra is ellentmondásos marad, hogy mi a legjobb módja a tanulók számolásra való megtanításának, mint ahogy az is, hogy mennyire van szükség a hagyományos írásbeli számítási algoritmusok megtanítására a modern technológiai társadalmakban (lásd *Nunes*, 2008). Ez utóbbi probléma ellenére jelen fejezet nem azzal foglalkozik, hogyan végezzünk számításokat, hanem azzal, hogy tudjuk, mikor melyik számítást kell elvégezni.

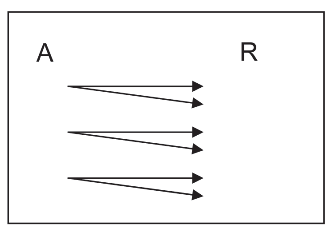
Az általános iskola első 6-8 évében a tanulóknak azt a matematikát tanítják, amely a mennyiségek közötti kétféle összefüggésen alapul: az összeadáson, amelyek a mennyiségek közötti rész-egész viszonyra épül, és a szorzáson, amely a különböző mennyiségek (különböző típusok) megfeleltetésére épül. A kétfajta összefüggés közötti különbséget úgy érthetjük meg a legjobban, ha veszünk egy példát. Az 1.1. ábrán két feladat látható és mindegyikben adottak a mennyiségek és az összefüggések.

Mindkét feladat mennyiséggel, a Rob és Anne által birtokolt könyvek számával foglalkozik, valamint a két mennyiség, Rob és Anne könyvei arányával. Az 1. feladatban a mennyiségek közötti viszony rész-egész struktúrában kerül leírásra, ahogy az ábrán is látható. A rész-egész viszonyok additív jellegűek. A 2. feladat a mennyiségek közötti viszonyt az egy-sok megfeleltetéseként írja le, ahogy az ábra mutatja; ezek szorzási viszonyok.

(1) Robnak és Anne-nek összesen 15 könyve van (mennyiség). Robnak 3-al több könyve van, mint Anne-nek (vagy Anne-nek 3-al kevesebb könyve van, mint Robnak) (arány). Hány könyvük van külön-külön? (mennyiség)



(2) Robnak és Anne-nek összesen 15 könyve van (mennyiség). Robnak kétszer annyi könyve van, mint Anne-nek (vagy Anne-nek fele annyi könyve van, mint Robnak) (arány). Hány könyvük van külön-külön? (mennyiség)



1.1. ábra. A mennyiségek közötti viszony sematikus ábrázolása az összeadási és szorzási műveletekben

A problémamegoldás során felhasznált matematika főként eljárásokat jelent, amelynek során nem közvetlenül a mennyiségekkel, hanem számokkal végzünk műveleteket, vagyis modellezzük a valóságos helyzeteket. *Thompsont* idézve: „A mennyiségi gondolkodás a mennyiségi struktúrák elemzését jelenti – a mennyiségek és a mennyiségi viszonyok hálózatának elemzését… A mennyiségi gondolkodásnak az egyik fő jellegzetessége, hogy a számok és a számszerű kapcsolatok másodlagos fontosságúak, és nem lépnek be az adott szituáció elsődleges elemzésébe. A legfontosabb a mennyiségek közötti viszony” (*Thompson,* 1993. 165. o.). Ha a tanulók olyan mennyiségi viszonyokat elemeznek, amelyek jól jellemzik a szituációt, akkor az általuk felépített matematikai modell megfelelő lesz, és az elvégzett számítások helyes eredményt fognak adni. Ha azonban a mennyiségek közötti összefüggéseket a szituációt torzító módon elemzik, a felépített modell nem lesz megfelelő, és az elvégzett számítások is helytelen eredményt adnak.

Egyes helyzetekről azonnal megérthető, hogy összeadás, vagy szorzás jellegű-e, és az 5-6 éves korú kisgyerekek már képesek e feladatok megoldására, még azelőtt is, hogy megtanulnának számolni. Különböző, számolással kapcsolatos lépéseket alkalmaznak a feladatok megoldására. Ezen műveletekből megállapítható, milyen viszonyokat állapítottak meg a mennyiségek között.

Számos kutatás igazolja (pl. *Brown*, 1981; *Carpenter*, *Hiebert*, és *Moser*, 1981; *Carpenter* és *Moser*, 1982; *De Corte* és *Verschaffel*, 1987; *Kintsch* és Greeno, 1985; *Fayol*, 1992; *Ginsburg*, 1977; *Riley*, *Greeno*, és *Heller*, 1983; *Vergnaud*, 1982), hogy az óvodás korú gyerekek megfelelően cselekszenek, amikor összeadással vagy kivonással kell mennyiségi változásokkal kapcsolatos feladatokat megoldaniuk. A feladatok megoldásához összesítik és megszámolják a tételeket, vagy szétválasztják őket és megszámolják a megfelelő halmazt. Nagyon kevés óvodás korú gyerek van tisztában az összeadás és kivonás tényével; mégis, amikor két rész nagyságát közlik velük és megkérik őket, hogy nevezzék meg az egészet, 70%-uk helyes választ ad, ha kis számokról van szó, és a számolás nem okoz nekik nehézséget. Ez valószínűleg a legtöbb ember számára nem meglepő.

A legtöbb ember azonban meglepődik azon, hogy az ilyen kicsi gyerekek meglehetősen magas százalékban képesek szorzási és osztási feladatok elvégzésére, ha tárgyakkal segítjük a válaszadást. *Carpenter*, *Ansell*, *Franke*, *Fennema* és *Weisbeck* (1993) szorzási feladatokat adtak óvodás korú gyerekeknek az Egyesült Államokban, amelyekben a halmazok között a 2 : 1, 3 : 1 és 4 : 1 arányt kellett megtalálniuk (pl. minden csészében 2 darab édesség van; hány édesség van 3 csészében?). A feladatokra 71%-uk jó választ adott. *Becker* (1993) 81%-ban jó válaszokat kapott multiplikatív gondolkodási feladatoknál 5 éves korú óvodásoktól az Egyesült Államokban, amikor a 2 : 1 és 3 : 1 mennyiségi arányt kellett megadniuk.

Ha tehát a számolást tárgyakkal segítjük, a kisgyerekek könnyen különbséget tesznek az összeadási és a szorzási műveletekkel megoldható problémák között. Azonban az összeadási és a szorzási feladatok csoportjain belül is eltérő nehézségűek lehetnek a feladatok attól függően, hogy milyen jellegű összefüggéseket tartalmaznak. *Vergnaud* (1982) szerint a számtani feladatokat nem a tanulók által elvégzendő számolás teszi nehézzé, hanem a szituációban rejlő összefüggések megértése. *Vergnaud* a feladatmegoldás ezen részét relációs kalkulusnak (*relational calculus*) nevezi, amit megkülönböztet a numerikus kalkulustól (*numerical calculus*) – vagyis magától a számolástól. A következő részekben először a relációs gondolkodás nehézségeit tárgyaljuk, először az additív gondolkodást, majd a multiplikatív gondolkodást igénylő feladatokat mutatjuk be.

Additív gondolkodási feladatok

Különböző kutatók (például *Carpenter*, *Hiebert* és *Moser*, 1981; *Riley*, *Greeno* és *Heller*, 1983; *Vergnaud*, 1982) hasonló módon javasolták osztályozni a legegyszerűbb összeadási és kivonási feladatokat. Ezen osztályozások alapja, hogy milyen típusú relációs kalkulust tartalmaznak. E megközelítés alapján három feladatcsoportot különböztetünk meg. Az első csoportba, az összegzési csoportba olyan mennyiségekkel kapcsolatos feladatok tartoznak, ahol a mennyiségeket egyesítik (illetve elkülönítik), de közben nem változtatják meg (például Paulnak 3 kék golyója és 6 piros golyója van; hány golyója van összesen?). A második csoportba a változási feladatok tartoznak, amelyek az eredeti állapothoz képest a végső állapotig átalakuláson mennek keresztül (például Paulnak 6 golyója van; egy játék során 4 golyót elvesztett; hány golyója van most?). A harmadik csoportba tartozó összehasonlító feladatok viszonyításokat tartalmaznak (pl. Marynek 6 golyója van; Paulnak 9 golyója van; mennyivel van több golyója Paulnak, mint Marynek?). A „mennyivel van több golyója Paulnak, mint Marynek" kérdés inkább a viszonyításra, és nem a mennyiségre vonatkozik. A kérdés feltehető úgy is, hogy „mennyivel van kevesebb golyója Marynek, mint Paulnak?" A viszonyításoknak van inverze (fordítottja, a „mennyivel több" fordítottja a „mennyivel kevesebb?"); a mennyiségeknek nincs.

Ezekkel a különböző típusú feladatokkal végzett vizsgálatok azt mutatták, hogy a legkönnyebbek az összegzési és a változási feladatok, amelyeknél ismert a kiinduló helyzet. Az ilyen típusú feladatokban a 6 éves kor körüli gyerekek a maximumhoz közeli teljesítményt nyújtanak.

Ugyanakkor még a legegyszerűbb összehasonlításos feladatok is nehéznek bizonyultak sok 8 éves korú gyerek számára, míg a legnehezebb feladatok, ahol az összehasonlítás fordítottjára kell gondolni, még a 10-11 éves korosztály számára is kihívást jelentenek. Például *Verschaffel* (1994) kísérlete a belga diákok egy kisebb mintáján azt mutatta, hogy a következő feladatban: „Charles-nak 34 diója van. Charles-nak 15 dióval kevesebb diója van, mint Anthonynak. Hány diója van Anthonynak?", a tanulók kb. 30%-a kivonta a 15-öt a 34-ből és helytelenül válaszolt. *Lewis* és *Mayer* (1987) arról számolt be, hogy az ilyen jellegű hiba az Egyesült Államokban még a 18 éves, vagy annál is idősebb középiskolásoknál is előfordul, bár kisebb mértékben (kb. 16%-ban).

Az összegzési feladatok mindig mennyiségekre vonatkoznak és viszonylag egyszerűek még akkor is, hogy ha feladatban nő a mennyiségek száma. Ugyanakkor a változási feladatokban átalakítások vannak; az átalakítások kombinálása nehezebb, mint a mennyiségek kombinálása, és az átalakítások elemzése nehezebb, mint a mennyiségek szétválasztása. Vegyük például az alábbi két feladatot, az első a mennyiségek összekapcsolására és átalakításra, a második két transzformáció összekapcsolására vonatkozik.

(1) Pierre-nek 6 golyója volt. Játszott egy játékot és elvesztett 4 golyót. Mennyi golyója maradt a játék után?

(2) Paul két golyós játékot játszott. Az első játékban 6 golyót nyert, a másodikban 4-t vesztett. A két játék alapján összességében mi történt?

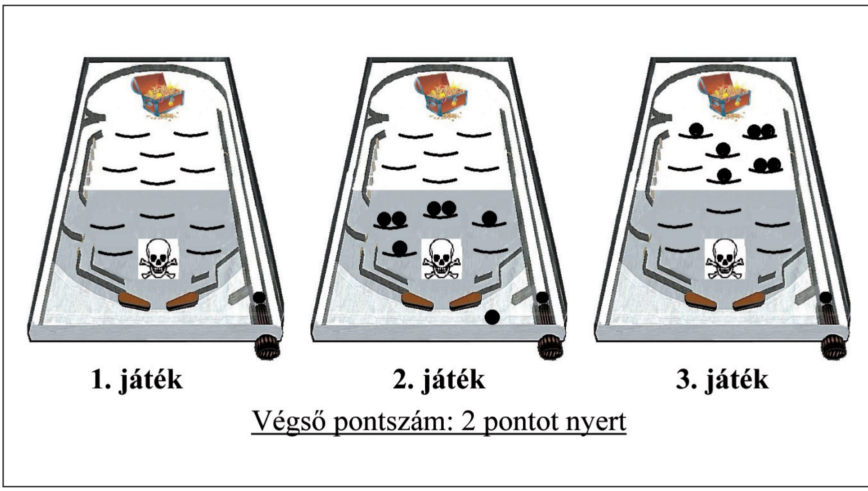
Az óvoda és az iskola negyedik osztálya közötti korcsoportba tartozó francia gyerekek következetesen jobban szerepeltek az első, mint a második feladat típusban, pedig mindkét feladatnál ugyanazt a számítási műveletet (6–4) kellett elvégezni. A második iskolai évben, amikor a gyerekek 7 év körüliek, 80%-ban jó választ adtak az első feladatnál, a második feladattal kapcsolatban azonban csak kb. két évvel később, 9 éves korban értek el hasonló eredményt. Tehát az átalakítások (transzformációk) kombinálása sokkal nehezebb, mint a mennyiség és transzformáció összekapcsolása.

A mennyiségek közötti viszonyok illusztrálására három tanulmányt mutatunk be példaként, amelyekből az első kettő kvantitatív, a harmadik kvalitatív kutatási módszereket alkalmazott.

Az első példát a *Chelsea Diagnostics Mathematics Test*ből vettük (*Hart*, *Brown*, *Kerslake*, *Kuchermann* és *Ruddock*, 1985), amely három relációs feladatot tartalmaz. Mindhárom feladat a távolsággal foglalkozik, ahol a távolság nem mint mérték, hanem mint két pont közötti viszony szerepel. A legegyszerűbb feladat az volt, hogy „John 8 mérföldet kerékpározik az otthonától az iskolába. 2 mérföld után megáll egy édességboltnál. Hogyan számolod ki, hogy Johnnak mennyit kell még mennie?" A kérdés a többszörös választás technikáját alkalmazta, és három olyan lehetséges választ tartalmazott, melyek összeadást és kivonást is magukban foglaltak: 8-2, 2-8, és 2+6. További négy választási lehetőség szorzás vagy osztás jeleket alkalmazó műveleteket tartalmazott. A vizsgálatban összesen 874 tanuló vett részt, a 10-11, 11-12 és 12-13 éves korosztályokból. A helyes válaszok aránya a 10-11 és 12-13 éves korosztályok között nem emelkedett, a válaszok kb. 68%-a volt jó. A másik két feladatnál, amelyek hasonló típusúak voltak, hasonló teljesítményt tapasztaltak, kb. 70% arányt képviseltek a helyes válaszok. (Az egyik feladatnál, amelynek két jó megoldása volt, valamivel nagyobb volt a jó válaszok aránya, elérte a 78%-ot a 11-12 évesek körében.)

A második feladatnál pozitív és negatív számokat és viszonyukat kellett alkalmazni a feladat megoldásához. Saját munkánk (amit még ilyen részletességgel nem publikáltunk) illusztrálja ezt. Az adatokat két csoport vizsgálatából gyűjtöttük; mindkét csoportot akkor vizsgáltuk, amikor átlagosan 10 évesek 7 hónaposak voltak (N=7981) majd az első csoportnál elvégeztük ugyanezt a vizsgálatot 12 év 8 hónapos (N=2755) korban is.

A feladatban egy olyan flipper játék szerepelt, amelyben a játékos pontszáma attól függött, hogy hány golyót tudott elhelyezni a tábla különböző részein (lásd *1.2. ábra*). A kincses zónába (az ábra felső része) bevitt minden golyóért a játékosok egy pontot kaptak; a koponya részbe lőtt golyók egy-egy pont veszteséget jelentettek; végül nem járt pont legaljára (lásd a 2. játékot, ahol egy ilyen golyó is van) került golyókért. Az egyes játékokban szerzett pontok kiszámítása viszonylag egyszerű, ha minden pont értéke pozitív: a tanulók kb. 90%-a helyesen adta meg a választ a 3. játék esetében. A jó válaszok aránya azonban 48% ill. 66%-ra csökkent a 10-11 és 12-13 éves korosztályokban, amikor a játékos pontokat veszített. Sokkal nehezebb feladat azonban a végeredménynek a két játékról szerzett információval való egyesítése annak érdekében, hogy megkapjuk a játékos első játékban szerzett pontszámát: a 10-11 korosztályú tanulók mindössze 29%-a, míg a 12-13 évesek 46%-a volt sikeres ennek megoldásában. Mivel a feladatokban szereplő számok kicsik, a számítással nem lehet magyarázni a feladat nehézségét: a nehézséget a relációs kalkulussal kell összekapcsolni. A flipper játékban a pozitív és negatív számokat össze kell kapcsolni, és a két játék pontjainak és a végső pontszámnak az arányából lehet kikövetkeztetni, hogy mennyi lehetett az első játék pontszáma.



1.2. ábra. Példa egy flipper játékkal kapcsolatos feladatra

Az előjeles (pozitív és negatív) számokkal végzett néhány korábbi vizsgálat azt mutatja, hogy ha minden számnak azonos az előjele (vagyis mindegyik pozitív vagy negatív), a tanulók természetes számokként kezelik őket és azt az előjelet teszik melléjük, amivel eredetileg rendelkeztek. A negatív és pozitív előjelű információk összekapcsolásához azonban jóval több viszonyításra van szükség. *Marthe* (1979) például úgy találta, hogy a 14-15 éves korosztályú tanulóknak mindössze 67%-a tudta megoldani a következő feladatot „Dupont úr 684 frankkal tartozik Henry úrnak. De Henry úr is tartozik Dupont úrnak. Ha mindent figyelembe veszünk Dupont úrnak 327 frankot kell megadnia Henry úrnak. Mennyivel tartozott Henry úr Dupont úrnak?”

Végül a harmadik példát *Thompson* (1993) kvalitatív elemzéséből vettük, amely azt vizsgálta, hogy a 7 és 9 éves tanulóknak milyen nehézségekkel kell szembenézniük, az arányok és a mennyiségek megkülönböztetésénél. A tanulók érvelését olyan komplex összehasonlító problémákban elemezte, amelyekben legalább három mennyiség és három viszonylat szerepelt. Célja annak vizsgálata volt, hogy a gyerekek hogyan értelmezik a komplex relációs feladatokat, és hogyan változik a gondolkodásuk, ha több azonos problémával találkoznak. A feladatok szemléltetésére itt bemutatjuk az elsőt: „Tom, Fred és Rhoda összeadták almáikat, hogy egy gyümölcs standot hozzanak létre. Frednek és Rhodának együtt 97 darabbal több almája volt, mint Tomnak. Rhodának 17 almája volt. Tomnak 25 almája volt. Hány almája volt Frednek?" (167. o.). Ebben a feladatban három mennyiség (Tom, Fred és Rhoda almája) és három viszonyítás szerepel (mennyivel több almája volt Frednek és Rhodának, mint Tomnak; mennyivel volt kevesebb almája Rhodának, mint Tomnak; e két viszonyítás összekapcsolása). Az előteszt során különböző eredményeket elért hat gyereket (hárman magasabb, hárman közepes pontszámmal) kért fel kétféle osztályból, másodikosok (kb. 7 évesek) és ötödikesek (kb. 10 évesek) köréből, hogy vitassanak meg hat feladatot, amelyet négy különböző napon mutatott be. A gyerekeket arra kérte, hogy gondolkodjanak el a feladatokon, ábrázolják őket és beszéljék meg.

Az első napon a gyerekek rögtön a számolással próbálkoztak és a viszonylatokat mennyiségként kezelték: azt a kijelentést, hogy „97-tel több almája van, mint Tomnak" úgy értelmezték, hogy „97 almája van". Ez ahhoz a következtetéshez vezetett, hogy Frednek 80 almája van, mert Rhodanak 17 almája van. A második napon – amikor a játék során nyert és elvesztett golyókról szóló feladattal dolgoztak – a kutató megtanította a gyerekeknek az előjelek használatát az összefüggések kifejezésre azzal, hogy például. „plusz 12" azt jelzi, hogy valaki 12 golyót nyert, vagy „mínusz 1", ami azt jelenti, hogy valaki egy golyót veszített. A gyerekek a kutató segítségével már tudták használni ezeket a jelöléseket, de amikor két állítást összekapcsoltak, például a mínusz 8-at és a plusz 14-et, úgy gondolták, hogy a válasz 6 golyó (egy mennyiség), nem pedig plusz hat (egy viszonyszám). Először tehát viszonyítási megállapításokat tettek mennyiségi megállapításként, nyilvánvalóan azért, mert nem tudták, hogyan jelöljék a viszonylatokat. Miután azonban megtanulták, hogyan jelöljék a relációs megállapításokat, még mindig nehézségeik voltak a pusztán viszonylatokban való gondolkodással, és akaratlanul is mennyiségi megállapításokra fordították le a műveletek eredményét. Ha azonban azt kérdezték tőlük, hogy vajon mindig igaz lesz-e, hogy ha valaki a játékban 2 golyót nyert, annak 2 golyója lesz, a gyerekek felismerték, hogy ez nem szükségképpen igaz. Megértették, hogy az összefüggések és a mennyiségek különbözőek, de két viszonylat összekapcsolásának eredményét mennyiségként értelmezték.

Sajnos *Thompson* tanulmánya nem terjed ki azokra az eredményekre, amelyek alapján meg tudnánk ítélni az ilyen típusú feladatok nehézségi fokát a különböző korosztályok számára, de joggal feltételezhető, hogy a 13-15 éves korú gyerekek még nem tudnak olyan feladatokat megoldani, ahol sok viszonylat és mennyiség kapcsolódik össze a feladatban.

A szakirodalomból összeállítható egy rövid összefoglaló arról, hogyan haladnak a tanulók az additív gondolkodásban.

(1) A gyerekek már korán, 5-6 éves kortól kezdik használni a számlálást összeadási feladatok megoldására. Használni tudják az egyesítési és különválasztási sémákat a feladatok megoldásában, vagyis mennyiségek összeadását, mennyiségek kivonását, mennyiségek átvitelét összeadással és kivonással.

(2) Kb. két-három évet vesz igénybe, hogy ezeket a műveleteket összehangolt módon kezdjék használni, általánosabb rész-egész sémákban, amellyel már egyszerűbb összehasonlítási feladatokat is meg tudnak oldani.

(3) A feladatok megoldásában az átalakítások és viszonylatok összekapcsolása (mint pl. két távolság összekapcsolása, hogy megállapítsuk a két pont közötti távolságot) továbbra is nehézséget jelent sok tanuló számára. A CSMS tanulmány a jó válaszadási arány stagnálását mutatja 13 éves kor körül; idősebb korcsoportokat nem vizsgáltak e feladatoknál.

(4) Ugyanaz az összeadási összefüggés különbözőképpen kifejezhető a „több, mint” ill. a „kevesebb, mint” szóhasználattal. Ha a tanulóknak a viszonylati megállapítást az ellenkezőjére kell fordítaniuk a számítás elvégzése érdekében, nem biztos, hogy ez sikerül nekik.

(5) A pozitív és negatív számok összekapcsolása továbbra is nehézséget okoz egészen 14 éves korig (15 éveseket, vagy idősebbeket nem vizsgáltak). A feladatok egy részénél a jó válaszok aránya nem haladta meg az 50%-t.

Multiplikatív gondolkodási feladatok

A multiplikatív feladatokkal kapcsolatos kutatások nem jutottak egységes álláspontra a feladattípusok osztályozásában. A különböző osztályozások a különböző kritériumokon és nem a multiplikatív feladatok koncepcionális eltérésein alapulnak. Itt most nem törekszünk ezen eltérések összhangba hozására, inkább lábjegyzetekben hivatkozunk rájuk a multiplikatív gondolkodás fejlődésének ismertetése során. A továbbiakban *Vergnaud* terminológiáját használjuk, és szükség szerint másokra is hivatkozunk.

Vergnaud (1983) háromféle multiplikatív okfejtést igénylő feladatot különböztetett meg:

(1) mértékek izomorfiája típusú feladatok, amelyekben két mérték szerepel, melyeket egy fix arány kapcsol össze (*Brown,* 1981, ezeket a feladatok arány, ill. ráta feladatoknak nevezi);

(2) többszörös arányok, amelyekben több mint két mérték aránylik egymáshoz;

(3) a mérték szorzás, amelyben két mértékből egy harmadik, a kettő szorzata jön létre (*Brown*, 1981, ezeket Descartes-feladatoknak nevezi).[1]

A mértékfeladatok izomorfiája a korábban leírt egyszerű feladatokat tartalmazza, amelyeket a kisgyerekek a tételek megfeleltetésével meg tudnak oldani. Ezek az iskolában legáltalánosabban használt arány feladatok. Az ilyen feladatoknál leggyakrabban használt példa egy recept elkészítése bizonyos számú ember számára és az ehhez szükséges alapanyagok mennyisége; az elkészített muffinok száma és a liszt mennyisége; a vásárolt mennyiség és a fizetett ár. A feladatok nehézségi foka függ attól, hogy milyen anyagok állnak rendelkezésre a mértékek reprezentálásához; attól, hogy milyen arány áll fenn (2 : 1 és 3 : 1 sokkal könnyebbek, mint más arányok); attól, hogy a feladatban szerepel-e az egység értéke (pl. 3 : 1 könnyebb, mint 3 : 2); valamint a feladatban szereplő értékektől (ha az ismeretlen az azonos mérték ismert értékének a többszöröse, vagy

1 Itt inkább a *mérték* fogalmát használjuk a *mennyiség* helyett, mivel egyes mennyiségek különbözőképpen mérhetők, így a mennyiségekkel kapcsolatos feladatok különböző kategóriába kerülnek. Ha pl. egy paralelogramma területét négyzet egységekkel mérjük, a területszámítás a mértékfeladatok izomorfiájának jó példája lesz: az egy sorban levő egységek száma szorozva a sorok számával. Ha a területet lineáris egységekkel mérjük, a számítás a mértékek szorzását jelenti, mivel az egy 1 cm^2-es egység két lineáris egység szorzata lesz: 1 cm x 1 cm.

osztója, a feladat megoldható numerikus gondolkodással, vagy mennyiségen belüli kalkulációval, ami a tanulók által leggyakrabban használt megoldás). Egyes országokban (pl. Franciaország; lásd *Ricco*, 1982; *Vergnaud*, 1983) a tanulóknak olyan általános algoritmust tanítanak (pl. egységnyi érték megtalálása, hármas szabály), amely felhasználható minden arányossági feladat megoldására, de a tanulók gyakran más módszereket használnak, amikor az arányossági feladatok más struktúrájú, másfajta feladatokban merülnek fel (*Hart*, 1981; *Ricco*, 1982; *Vergnaud*, 1983). A tanulókra szabott módszereket különböző terminológiákkal illették, a különböző országok módszerei azonban meglepően hasonlóak. Tartalmazzák az egyes mértékeken belüli párhuzamos transzformációt (pl. minden mérték osztása kettővel), ami megtartja a mértékeken belüli arányt, vagy a válasz progresszív megközelítését úgy, hogy ne hagyjuk figyelmen kívül az egyes mértékek közötti megfelelést. A megoldás megközelítését jól illusztrálja *Hart* (1981) közismert hagymaleves példája, ahol a 8 főre szóló receptet 6 személyre kell átalakítani. A tanulók kiszámítják, hogy mennyi összetevő szükséges 4 embernek (vagyis a 8 főre szóló mennyiség felét), majd azt, hogy mennyi szükséges 2 ember részére, és a végén összeadják a 4 és 2 ember számára szükséges alapanyagot – így kapják meg, hogy mennyi kell 6 emberhez.

A feladatokban lévő, gondosan párosított értékek szisztematikus összehasonlítása (lásd pl. *Nunes*, *Schliemann*, és *Carraher*, 1993) azt mutatja, hogy a tanulók inkább úgy közelítik meg az arányossági feladatokat, hogy az azonos mértéken belüli viszonyokat mérlegelik, és nem a feladatban lévő két különböző mérték közötti relációt vizsgálják. Ugyanazt a hagymaleves példát véve alapul, a pintben mért vízszükséglet és a személyek számának aránya 1 : 4 volt. A tanulók a 8 főre szóló receptből ki tudták számítani ezt az arányt, majd kitalálni, hogy mennyi víz kell 6 embernek, de ilyen megoldásról *Hart* nem számolt be.[2]

Összefoglalva, amikor kisebb gyerekeknél vizsgáljuk a mértékek izomorfiája típusú feladatok megértési képességét, a feladat nehézségi foka a feladat leírásához rendelkezésre álló anyag nehézségi fokának változta-

2 *Nesher* (1988) és *Schwartz* (1988) szerint egy mennyiségnek egy másikkal való elosztása, vagy az ember víz arány kiszámításához szükséges lépés megváltoztatja a számok jelentőségét: 2 pint víz helyett 4 főnél 1 pint vízre kell gondolni. Ezen transzformáció alapján egyes feladatokat magasabb nehézségi fokúnak találták. Így a multiplikációs feladatok egy más séma alapján kerültek osztályozásra, ami itt most nem kerül tárgyalásra.

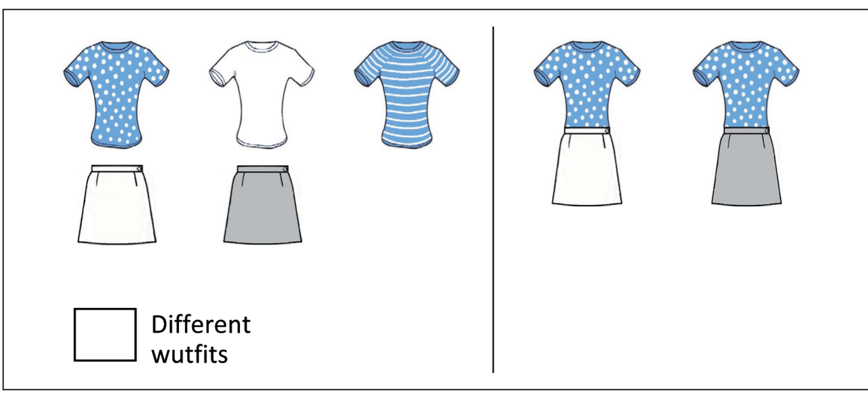
tásával alakítható; nagyobb gyerekeknél a feladat nehézségi foka olyan számok alkalmazásával módosítható, amelyek megkönnyítik a mennyiségen belüli és a mennyiségek közötti számítást.

A többszörös arányt tartalmazó feladatokban olyan szituációk szerepelnek, ahol kettőnél több mérték rendelkezik egy fix aránnyal. *Vergnaud* példaként említi egy farm tejtermelésének a megállapítását a farmon lévő tehenek számának és a napok számának a függvényében. A többszörös arányt tartalmazó feladatok nehezebbek, mint az egyszerű mértékek izomorfiája típusú feladatok, mert több információ szerepel bennük, és több számítást kell végezni. Nem világos azonban, hogy jelentenek-e újfajta koncepcionális kihívást a tanulók számára.

Az arányossági (proporcionális) gondolkodás a matematikatanítás egyik legkritikusabb pontja, mivel kialakulása a matematika számos más területén is a megértés előfeltétele. Több iskolai tárgyban szerepet játszik, mindenekelőtt a természettudomány fogalmainak és jelenségeinek megértéséhez szükséges. A hétköznapi élet különböző helyzeteiben is szükség van az arányok értelmezésére. Jelentőségében megfelelően számos vizsgálat foglalkozott a fejlődésével (*Kishta*, 1979; *Schröder* és mtsai, 2000; *Misailidou* és *Williams*, 2003; *Boyera*, *Levinea*, és *Huttenlochera*, 2008; *Jitendra* és mtsai, 2009). Egy több életkorban elvégzett, az analógiás és az induktív gondolkodással való kapcsolatát elemző elvégzett vizsgálat szerint az ötödik évfolyamon még csak a tanulók 7%-a, a hetedik évfolyamon pedig 20%-a tudott megoldani egy egyszerű arányossági feladatot (*Csapó*, 1997).

A mértékek szorzása típusú feladatok két mértékből egy harmadik létrehozását jelentik: például egy kislány adott számú trikója és szoknyája hányféleképpen állítható össze ruházattá; a különböző színes anyagok száma és az emblémák száma meghatározza, hogy hányféle zászló készíthető belőlük; egy közértben kapható különböző kenyérfélék és töltőanyagok száma meghatározza, hogy hányféle szendvics készíthető. Így tehát a mérték szorzós feladatok minőségi multiplikációt – vagyis a különböző minőségek kombinációját egy többszörös osztályozásban – és mennyiségi multiplikációt egyaránt jelentenek. Ezek a mérték szorzós feladatok sokkal nehezebbek, mint az izomorfiás feladatok (*Brown*, 1981; *Vergnaud*, 1983). E feladatok a multiplikatív gondolkodás fontos részét jelentik, ezért a tanulók multiplikatív gondolkodásának felmérése során kell értékelni őket.

A mértékszorzós feladatok tanulók általi megértése nem egyszer és mindenkorra adott dolog. A feladatok megfogalmazása egyszerűsíthető olyan felvetésekkel, amelyek arra utalnak, hogy a kombinációk hogyan működnek egy lépcsőzetes rendszerben: egy szoknyából és 3 blúzból hány különböző ruházat alakítható ki; ha veszel egy új szoknyát, még hány új kombináció hozható létre? Ha a mérték szorzós feladatokat lépcsőzetesen fogalmazzák meg, jelentősen megnő a jó válaszok száma (*Nunes* és *Bryant*, 1996). Az 1.3. ábra egy ilyen feladatra mutat be példát, ahol az első két kombinációt mutatjuk be; a tanulók könnyen rájöhetnek a többi lehetséges variációra, és megadhatják az összes lehetséges számot. Az Egyesült Királyságban vizsgált 11-12 éves gyerekek e feladatnál 81%-ban helyes választ adtak; ez jóval meghaladta a helyes válaszok 51%-os arányát olyan feladatokban, amelyek csak egy javaslatot tartalmaztak a lehetséges kombinációkra.



1.3. ábra. Példa egy mértékszorzós feladatra, ahol az első kombinációkat vizuálisan is megjelenítjük

A tanulók, azonban nem szükségképpen képesek az összes lehetséges kombinációt megjelölni a fokozatos bevezető után sem. Jelentős erőfeszítést igényel eljutni attól a lépéstől, hogy minden új szoknyához *x* számú új felső tartozik, addig az általános felismerésig, hogy a ruhák száma nem más, mint a szoknyák száma szorozva az új felsők számával.

Összefoglalva, a multiplikatív gondolkodás kialakulása két különböző típusú megfeleltetést igényel: egyrészt a mértékek izomorfiája típusú feladatoknál bemutatott, kvantitatív megfeleltetést, másrészt a mértékszorzós feladatokban bemutatott típust, ahol a többszörös osztályozó rendszer alapján egy első minőségi lépésre van szükség. A kisgyerekek sikerrel megbirkózhatnak a mértékfeladatok izomorfiájával, ha a rendelkezésre álló manipulátorokkal ábrázolni tudják a mértéket; a feladatokat számolással oldják meg (vagyis nem a szorzás eredményét számítják ki), de gondolkodásuk egyértelműen multiplikatív. A mértékszorzós feladatok már nehezebbek.

Ahogy a gyerekek a multiplikatív gondolkodás fejlődése során fokozatosan elsajátítják a relációs kalkulust, a feladatok egyre szélesebb körét tudják megoldani. Egy kihívás azonban marad még az általános iskola végén is. A tanulók általában nehezebben tudnak a mennyiségek közötti (a változók arányával mért) funkcionális relációkban, mint a mennyiségen belüli skaláris viszonylatokban gondolkodni. Ha a tanulók a feladatokat mindig skaláris módon oldják meg, az azt jelenti, hogy a szituációban rejlő viszonylatoknak csak a felét veszik figyelembe. A funkcionális viszonyok megértését segítő oktatás segíti a tanulókat a feladatmegoldási modellekről való tudatos döntéshozásban. A tanulók részben túl sokat, részben túl keveset használják az arányokban való gondolkodást (pl. *De Bock*, *Van Dooren*, *Janssens* és *Verschaffel*, 2002; *De Bock*, *Verschaffel* és *Janssens*, 1998; *Dooren*, *Bock*, *Hessels*, *Janssens* és *Verschaffel*, 2004), emellett túl sokat használják a lineáris viszonyokat akkor, amikor két változó közötti viszonyt kell grafikusan ábrázolniuk. Lehetséges, hogy ha a tanulók jobban megismerkednek a funkcionális viszonyokkal, vagyis a változók közötti viszonnyal, kevésbé fognak ilyen hibákat elkövetni.

Az értelmi képességek fejlesztése a matematikaoktatáson keresztül

Az előző részekben áttekintett kutatások szerint az általános gondolkodási folyamatok és a számokkal kapcsolatos műveletek a matematikatanításban egymással összefüggő és egymást támogató tényezők. A mennyiségekben való gondolkodás minden esetben szükséges a numerikus reprezentáció működésének megértéséhez. Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy a matematikaoktatás hogyan tud hozzájárulni a mennyiségek közötti viszonyok jobb megértéséhez, a matematikai eszközök alkalmazására irányuló és a problémamegoldó képességek fejlesztéséhez.

A matematikatanítás képességfejlesztő hatásával kapcsolatos kutatások

A mennyiségekben való gondolkodás képessége az előző részekben bemutatott példák alapján nem vele született adottság: ezek kialakulásához idő kell, fejlesztésüket pedig elősegítheti a matematikaoktatás. A matematikai gondolkodás fejlődése és a tantermi matematikatanulás között kölcsönhatás van, amennyiben az egyik fejlesztése a másik tökéletesítését eredményezi.

A különböző kutatócsoportok (*Nunes* és mtsai, 2007; *Shayer* és *Adhami*, 2007) vizsgálatai bebizonyították, hogy lehetséges a gondolkodás fejlődésének meggyorsítása, és ha az iskola első éveiben a tanórákon javítjuk a tanulók matematikai gondolkodását, az jelentős hatással van későbbi tanulásukra. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a *Shayer* és *Adhami* által indított program eredményeit, amelyben sok osztály és tanuló vett részt, és a tanárok széles körű szakmai továbbképzést kaptak. A *Shayer* és *Adhami* (2007) által végzett vizsgálatba kb. 700 tanulót és tanáraikat vonták be, akiknek mintegy a fele a kontrollcsoport, míg a másik fele a kísérleti osztályok tagjai voltak. A kutatók a CAME (*Cognitive Acceleration Through Mathematics Education* – a kognitív fejlődés felgyorsítása a matematikaoktatáson keresztül) programot ötödik és hatodik évfolyamos (9-11 éves) tanulók számára dolgozták ki az, amelyben a fő hangsúly a numerikus feladatokkal kapcsolatos gondolkodásra helyeződött. A tanárok kétnapos műhelyfoglalkozásokon vettek részt, ahol megvitatták, és a program saját céljaihoz igazítva átdolgozták a feladatokat. A tanulók térbeli gondolkodásának a program előtti és utáni felmérésére egy Piaget-féle feladat alapján került sor. A kontrollcsoportban közben a matematikaoktatás a megszokott módon folytatódott.

A *Piaget*-féle térbeli viszonyok tesztben (NFER, 1979) a gyerekeknek olyan szituációkban kellett tárgyakat rajzolniuk, amelyekből megítélhető a vízszintesről, a függőlegesről és a perspektíváról alkotott fogalmuk. Például, le kellett rajzolniuk a vízszintest egy félig teli befőttesüvegben különböző irányokból: egyenes állásban, a függőlegestől 30 fokos szögben megdöntve és az oldalára fektetve. A teszt másik feladata az volt, hogy rajzolják le, mit látnának egy olyan út közepén állva, amelyet fasor szegélyez; a rajznak a közeli és a távoli tárgyakat is láttatnia kellett. A gyerekek által adott válaszok értékelése során azt vizsgálták, hogy a helyzetet hányféle aspektusból, hányféle viszonylatban érzékeltetik a rajzaikon. A feladatok alapján az eredmények besorolhatók *Piaget* korai konkrét műveleti szakaszába (2A szint), ha a rajzok csak egy viszonylatot tükröznek, ill. az érett konkrét műveleti szakaszba (2B), ha két viszonylatot tükröznek.

A programban szereplő feladatok sok itt felvetett kérdést vizsgáltak: a racionális számok körében például a tanulóknak össze kellett hasonlítaniuk, hogy két csoport résztvevőinek mennyi csokoládé jutott; az egyik csoportban egy csokoládét osztott el három gyerek, míg a másikban két csokoládén osztozott hat gyerek. Ebben az összefüggésben vizsgálható volt a törtek ekvivalenciája, ami segítette a tanulókat a mennyiségek egyenértékűségének megértésében ott, ahol azonos mennyiségek kifejezésre más törteket használnak.

Shayer és *Adhami* (2007) jelentős különbséget figyelt meg a kontroll és a kísérleti osztályok tanulói között, miszerint a kísérleti osztályok tanulóinak teljesítménye a *Piaget* feladatban, és a hivatalos állami standardokra épült mérésekben – ezáltal a kutatástól teljesen független értékelésben – is felülmúlta a kontrollcsoportét.

Összefoglalva, ha a tanulók gondolkodásával szemben támasztott követelmények tekintetében a jól megválasztott matematika feladatokat úgy prezentálják, hogy azok a tanulók számára lehetővé teszik a matematikai összefüggések, valamint a mennyiségek és szimbólumok megvitatását, akkor azok hozzájárulnak a matematikatanuláshoz és a kognitív fejlődéshez egyaránt.

Numerikus képességek, additív és multiplikatív gondolkodás

A fejezet korábbi részei azokkal a matematikában kialakítandó különböző gondolkodási képességekkel foglalkoztak, amelyek a számokhoz és a velük végezhető alapvető műveletekhez kapcsolódtak. Ebben a részben összegezzük fejlődésük folyamatainak leírását és fejlesztésük feladatait.

Egész számok

Az óvodában a gyermekek számára biztosítani kell a lehetőséget, hogy megismerjék a mennyiségek és a számok közötti viszonyt. Az itt felsorolt jellemzők nem teljes körűek, de minden gyereknek meg kell tudni érteni, hogy:

(1) ha egy mennyiség nő, vagy csökken, az azt kifejező szám változik;
(2) ha két mennyiség egyenlő, azonos számmal fejezzük ki őket;
(3) ha egy halmazból azonos mennyiségű egyedet elveszünk, majd hozzáadunk, a halmazban lévő szám nem változik;
(4) minden szám megalkotható két másik szám összegéből;
(5) különböző értékű érmék (pl. pénzérmék) számolásakor, egy érme egynél többet számíthat, mivel az értékét kell figyelembe venni.

Azok a gyereket, akik tisztában vannak ezekkel az elvekkel, gyorsabban haladnak az iskola első két évében a matematikatanulásban, mint a többiek. Ennek megfelelően az iskolakezdés során ezeknek a felmérésére és szükség esetén a fejlesztésére kiemelt figyelmet kell fordítani.

Racionális számok

A törtek olyan szimbólumok, amelyek osztás és nem számolás eredményeként keletkezett mennyiséget fejeznek ki. Az osztás fogalmai közötti viszonyt fejezik ki. A gyerekek már az óvodában megkezdhetik a velük való ismerkedést, majd az általános iskola első éveiben a törteket szituációkban is megtanulják használni. El kell tudniuk sajátítani, hogy:

(1) ha két osztandó azonos és két osztó azonos, a hányados is azonos (pl. ha két gyerekcsoport azonos számú gyerekből áll, akik azonos mennyiségű édességen osztoznak (vagy ugyanakkora tortát kapnak), akkor az egyik csoport gyerekei ugyanannyit kapnak, mint a másik csoporté;
(2) ha az osztandó nő, a részarány is nő;
(3) ha az osztó nő, a részarány csökken.

Az osztással és törtekkel kapcsolatos további ismeretek nagyjából nyolc-, illetve kilencéves kortól sajátíthatók el:

(4) ugyanaz az osztandó különböző módon is elosztható, a mennyiség mégis azonos marad; az, hogy a részarányt milyen módon osztjuk el, nem számít, ha az osztó és az osztandó azonos;
(5) ha az osztandó és az osztó különböző, a köztük lévő arány még maradhat ugyanaz (pl. 1 csokoládét 2 gyerek között elosztva ugyanazt az arányt kapjuk, mint 2 csokoládét 4 gyerek között elosztva);
(6) ezeket a mennyiségi meghatározásokat össze kell hangolni a törtek leírásával.

A racionális számokkal kapcsolatos ismeretek alapján a tanulók képesek a racionális számokkal mennyiségeket kifejezni, és segítségükkel megtanulhatják, hogyan dolgozzanak a számokkal. A feladatok megoldásához azonban a tanulóknak az általános iskolában meg kell tanulniuk, hogyan gondolkodjanak a mennyiségek közötti kétfajta viszonyról, ami alapján az egyes helyzetek különféleképpen matematizálhatók: rész-egész, ami additív gondolkodást igényel, és a viszonyok megfeleltetése, ami multiplikatív gondolkodást kíván.

Additív gondolkodás

Az additív gondolkodás fejlesztése azt jelenti, hogy a gyermek egyre inkább képes a mennyiségek és az arányok, valamint a pozitív és negatív viszony megkülönböztetésére anélkül, hogy ismerné a mennyiségeket. Bár nincs olyan vizsgálat, amelyik önmagában lefedné az additív gondolkodás fejlődését, az irodalomban található anyagok alapján összefoglalható, hogyan haladnak a tanulók az additív gondolkodásban.

1. szint. A tanulók számlálással, összeadással és kivonással meg tudnak oldani olyan mennyiségi feladatokat, amelyekben növekedésről vagy csökkenésről van szó. Az összehasonlító feladatokban még nem sikeresek.

2. szint. A tanulók már képesek összehasonlító feladatok megoldására, valamint fordított műveletek alkalmazására a feladatmegoldásban. Ugyanaz az additív viszony kifejezhető úgy is, hogy „több mint”, illetve úgy is, hogy „kevesebb, mint”. Amikor a tanulóknak át kell alakítaniuk egy relációt tartalmazó állítást a másik formára annak érdekében, hogy egy számolási műveletet elvégezzenek, ez nem mindig sikerül. Ha azonban már elérték a 2. szintet, képesek egy viszonyt az ellenkezőjére fordítani a feladat megoldása érdekében.

3. szint. A gyerekek megtanulják összehasonlítani a pozitív és negatív számokat, és képesek két arányt összekapcsolni a feladat megoldásához. A mennyiségekre vonatkozó információ hiányában kettőnél több pozitív és negatív arány összekapcsolása 14 éves kor alatt nehézségbe ütközik (a 15 évesekre, vagy idősebbekre vonatkozóan nincs adatunk). A jó válaszok aránya egyes feladatok esetében nem haladja meg az 50%-ot.

4. szint. Kiváló teljesítmény az additív összefüggések alkalmazása és ezeknek a multiplikatív összefüggésektől való megkülönböztetése terén.

Az itt felvázolt egymásra épülés megfelel a gondolkodás természetes fejlődésének. Ha a tanítás minden egyes tanuló esetében arra helyezi a hangsúlyt, ami közvetlenül a már elért szintre épül, azzal optimális fejlesztő hatást lehet elérni.

Multiplikatív gondolkodás

A multiplikatív gondolkodás a kisgyerekeknél azzal kezdődik, hogy különböző feladatok megoldása érdekében képesek a mennyiségek között az egy-sok megfelelést létrehozni, beleértve olyan feladatokat is, ahol két – összehasonlítható szituációkban azonosított változó – arányos kapcsolatban van egymással. Ehhez meg kell érteniük az arányosság fogalmát olyan helyzetekben, amikor fix arány áll fenn két változó között, egymással izomorf helyzetekben, valamint meg kell érteni két mérték közötti multiplikatív viszonyt, amelynek alapján egy harmadik hozható létre.

1. szint. A tanulók meg tudnak oldani olyan egyszerű feladatokat, amelyekben két egymáshoz hozzárendelt mérték explicite úgy van leírva, hogy egymásnak megfeleltethetőek, és segédeszközök felhasználásával létre tudják hozni a megfeleltetést. Bonyolultabb esetekben azonban, amikor maguknak kell a megfeleltetésről gondolkodniuk, rájönnek, hogy kapcsolat van a két változó között, vagyis az egyik változó változása a másik változását eredményezi, de azt már nem tudják megmondani, hogyan lehet szisztematikusan megfeleltetni egymásnak a változókat.

2. szint. A tanulók ezen a szinten felismerik, hogy a két változó két értéke együtt változik azonos irányban, és hogy e mögött az együttes változás mögött konkrét szabály húzódik meg. Egyszerűbb esetekben és ismerős összefüggésben felismerik a kapcsolat mennyiségi természetét, de nem képesek a szabály általánosítására.

3. szint. Ezen a szinten a tanulók felismerik a kapcsolat lineáris jellegét és ismerős összefüggésekben képesek az arányokkal dolgozni.

4. szint. Ezen a szinten a tanulók képesek két változó lineáris összefüggését kezelni bármilyen környezetben és tartalommal. Képesek egyúttal megkülönböztetni a lineáris és nem-lineáris viszonyokat, bár új feladatok megoldásánál lépésről lépésre el kell végezniük az összehasonlításokat.

A matematikai gondolkodás fejlesztésének további területei

A korábban tárgyaltakon túl a matematikai gondolkodásnak számos további területe van, amelyek az iskola korai szakaszában fejlesztendőek. Ezek közül néhányat áttekintünk a következőkben, a fejlesztés részleteivel azonban nem foglalkozunk. Bár a matematikai gondolkodás különböző területei szorosan összefüggenek, a gondolkodás itt tárgyalandó kérdései nem kapcsolódnak közvetlenül a numerikus gondolkodáshoz, illetve túlmutatnak a mértékek és számok kérdésein. Továbbá, kontextusba ágyazott fejlesztésükre más iskolai tantárgyakban is van lehetőség. Például a szövegértéshez az alapvető nyelvi-logikai műveletek értelmezésének képessége szükséges. Bonyolultabb természettudományos definíciók megértéséhez értelmezni kell az összetett logikai műveleteket is. A természettudomány tanulása során ugyancsak szükség van azokra a gondolkodási képességekre, amelyek műveleti hátterét a matematikatanulás keretében lehet formalizálni. Ezek közé tartozik többek között a soralkotás, a különböző csoportosítások, a függvények, a kombinatív műveletek, a valószínűség és a statisztika.

Az itt felsorolt gondolkodási képességek többségét *Piaget* is vizsgálta. Elmélete szerint ezek kialakulása korán, már az iskoláskor előtt elkezdődik. Az általunk vizsgált életkori szakaszra a művelet előtti és a konkrét műveletek fejlődése esik, a formális szint csak idősebb korra érhető el. Ennek megfelelően a matematikában az első hat évfolyamon a fejlesztés nagyobbrészt a tapasztalati alapok megteremtésére és a szabályosságok felfedezésére irányulhat, ezt követően kerülhet sor a megfelelő matematikai formalizmus elsajátítására. A természettudomány kezdetben a tapasztalati alapokat gazdagíthatja, később a formalizált matematikai tudás alkalmazására kerülhet sor a természettudomány tanítása keretében.

A logikai műveletek és a halmazokkal végzett műveletek matematikai szempontból izomorf területek, és a kapcsolatuk a matematikatanításban is kihasználható. A logikai műveletek kialakulását klasszikus kísérleteiben *Piaget* részletesen vizsgálta (*Inhelder* és *Piaget*, 1958). A későbbi kutatások megmutatták, hogy a hétköznapi gondolkodásban nem csak az összetett állítások logikai szerkezete befolyásolja, hogy miként vélekedünk azok igazságtartalmáról, hanem a kontextus, a konkrét szituációra vonatkozó tudás is (lásd *Wason*, 1968, és a Wason-feladattal kapcsolatos további kutatások). A matematika tanulása során azonban a gondolkodás fejlesztésén, így a logikai szerkezetek megértésén és értelmezésén van a hangsúly, ezért *Piaget* kutatásainak eredményei a logikai műveletek egymásra épülése tekintetében a matematikatanítás nézőpontjából továbbra is iránymutatóak. A halmazokkal végzett műveletek, melyekhez a matematika tanításában gazdag eszközrendszer áll rendelkezésre, megalapozhatják a logikai műveletek fejlesztését is. A halmazokkal végzett konkrét műveletek segíthetik a műveleti sémák belsővé válását, interiorizációját, és ezáltal a nyelvi-logikai műveletek fejlődését is. A nyelvi-logikai műveletek fejlesztése olyan szélesebb körű pedagógiai feladat, amelyben az iskolai matematikatanításon túl az iskoláskor előtti nevelésnek és más iskolai tantárgyaknak is szerepet kell kapnia. Más iskolai tantárgyak tanulása során elsősorban az összetett állításokat tartalmazó kijelentések szerkezetének elemzésével, a műveletek és a jelentés közötti kapcsolatok megvilágításával lehet a fejlődést elősegíteni. A logikai műveletek fejlődésének vizsgálatára különböző tesztek is rendelkezésünkre állnak (pl. *Vidákovich*, 1998).

A relációk a matematika számos területén előfordulnak. A relációkkal kapcsolatos gondolkodás néhány aspektusát *Piaget* is vizsgálta. Ezek közé tartozik a soralkotások és az osztályba sorolás műveleteinek fejlődése (*Piaget* és *Inhelder*, 1958). A sorozatok létrehozása szerepet játszik a már korábban tárgyalt arányossági gondolkodás esetében is. A soralkotáson és osztályozáson keresztül megalapozható és fejleszthető több általános gondolkodási képesség is, például az analógiás és az induktív gondolkodás is (lásd *Csapó*, 1997, 2003).

A különböző szabályosságok felismerése egyrészt fejleszti a szabályindukció képességeit, másrészt pedig megalapozza a matematikai függvény fogalmát. A függvények a matematika későbbi tanulásában meghatározó szerepet játszanak. A felsőbb évfolyamokon alkalmazott matematikai függvényfogalom többszörös absztrakció révén alakul ki, ezért is nagy jelentősége van annak, hogy a korai, tapasztalati alapok biztosan kialakuljanak. A relációkat különböző formában lehet megjeleníteni, reprezentálni, vizualizálni. A különböző reprezentációk közötti kapcsolatok megértése, a többszörös reprezentáció képességének kialakítása ugyancsak a korai matematikatanítás feladata. A különböző reprezentációk közötti transzformációk egyben sokféle lehetőséget kínálnak az analógiás gondolkodás fejlesztésére is.

Matematikai szempontból a kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika szorosan összefüggő területek. A gyermeki gondolkodásban azonban különböző fogalmak fejlődési folyamatának eredményeként az érettebb formális fejlődés szakaszában kapcsolónak össze ezek a folyamatok. A spontán, a környezetből származó stimulusok már nem elegendőek e szint eléréséhez, ebben meghatározó szerepe van a szisztematikus matematikatanításnak.

A kombinatorikai problémák két fő csoportba sorolhatóak. Az egyik csoportot a felsorolási feladatok alkotják, amikor a feltételeknek megfelelő összes konstrukciót létre kell hozni, ezekben játszik szerepet a kombinatív gondolkodás. A másik csoportba a kiszámítási feladatok tartoznak, amelyek megoldását általában csak rendszeres matematikatanulás eredményeként lehet elsajátítani. Ezzel a kérdéssel már foglalkoztunk a multiplikatív gondolkodással kapcsolatban is, és néhány kombinatív művelet fejlődését *Piaget* is részletesen vizsgálta (*Piaget*, és *Inhelder*, 1975). Számos további kutatási program foglalkozott a kombinatív gondolkodás fejlődésével és fejlesztésével, mind a matematikában, mind más tantárgyakba beágyazott fejlesztő gyakorlatokat alkalmazva (*Kishta*, 1979; *Csapó*, 1988; *Schröder*, *Bödeker*, *Edelstein* és *Teo*, 2000; *Csapó*, 2001, 2003; *Nagy*, 2004). Egy részletesebb elemzés 37 olyan kombinatív műveletet azonosított, amely a kezelendő változók és a létrehozandó konstrukciók száma alapján még kezelhető, és amelyek alapján felsorolási feladatók készíthetők. A feladatokra alapozott empirikus vizsgálat megerősítette, hogy vannak olyan tanulók, akiknél 14 éves korra kialakul a kombinatív gondolkodás teljes rendszere, melynek révén képesek az összes alapvető művelettípus kezelésére, azonban a többség esetében csak a legegyszerűbb szerkezetek alakulnak ki (*Csapó*, 1988). A korai matematikatanítás jól strukturált feladatokkal fejlesztheti a kombinatív gondolkodást, míg a felsorolási feladatok más tantárgyakba is beágyazhatók, és fejleszthetik a kombinatív gondolkodást (*Csapó*, 1992). A formalizálás előkészítése azonban kizárólag a matematikatanítás feladata, melyre azután később ráépülhet a matematikai összefüggések megtanítása.

A valószínűség fogalmának kialakulása ugyancsak korán elkezdődik (*Piaget* és *Inhelder*, 1975), azonban rendszeres tanulás hiányában a tanulók többsége csak az alapvető felismerésekig jut el. Különösen nehéznek bizonyul a korrelációk, a véletlen összefüggések megértése (*Kuhn*, *Phelps*, és *Walters*, 1985; *Bán*, 1998; *Schröder*, *Bödeker*, *Edelstein* és *Teo*, 2000). A valószínűségi gondolkodás fejlődését a korai matematikatanítás elsősorban a szisztematikus tapasztalatok biztosításával segítheti. Ebben a fejlesztésben a véletlen jelenségek bemutatásával más tantárgyak, például a biológia is szerepet kaphatnak. A formális matematikai összefüggések felé vezető lépések megtétele, a kombinatorikával és a statisztikával való kapcsolat kialakítása azonban már a rendszeres matematikatanítás feladata. A fejlődési sajátosságok miatt a kapcsolatok kiteljesítésére csak idősebb életkorban kerülhet sor, azonban a későbbi eredményes tanulás érdekében szükség van a statisztikát előkészítő korai tapasztalatok megszerzésére is.

Egy további terület a térbeli gondolkodás, mely szintén más pszichológiai fejlődési folyamatokban gyökerezik, és csak később, a geometriatanítás keretében kapcsolódik össze a mérés fogalmával, majd a matematika más területeivel. Fejlődését *Piaget* részletesen vizsgálta, elsősorban a tér rajzokban való ábrázolásán keresztül. Eredményei szerint a korai fejlődésre a topológiai szemlélet jellemző, és később is elsősorban a vonalak találkozásaiban válnak a rajzok pontossá, míg a formák különbözőképpen torzulnak. A második stádiumban (4-7 év) folyamatosan differenciálódnak a gyermekek által lerajzolt alakzatok. A harmadik stádiumban (7-8 év) pedig a tanulók már többnyire az euklideszi geometriát követető formákat képesek rajzolni (*Piaget* és *Inhelder*, 1956). A matematikatanítás keretében különösen az iskola kezdő szakaszában van nagyobb jelentősége a térbeli gondolkodás fejlesztésének. Kezdetben nagyobb szerepet kaphat a két- és háromdimenziós alakzatok közvetlen tapasztalatszerzés révén való megismerése. Ezt követheti annak tudatosítása, hagy az alakzatoknak tulajdonságaik vannak, melyek alapján le lehet írni az alakzatok közötti hasonlóságokat és különbségeket. Később pedig sor kerülhet a tulajdonságok szabatos matematikai megnevezésére és definiálására. A térbeli gondolkodás fejlesztésére a matematikán túl a rajztanítás és a művészeti nevelés keretében van lehetőség. A térábrázolás és a térszemlélet fejlődésének felmérése sokféle mérőeszközzel lehetséges (pl. *Kárpáti* és *Gaul*, 2011; *Kárpáti* és *Pethő*, 2011).

A kognitív fejlődés felmérése a matematikában

Az eddig tárgyaltakban főként a gondolkodás fontosságát hangsúlyoztuk a számrendszer megértésében, valamint annak felismerésében, hogy a matematika hogyan használható a világ modellezésére. A másik fő gondolatsor, hogy mindazok az ismeretek, amelyeket a tanulóknak a matematikában el kell sajátítaniuk, nem alakulnak ki egy lépésben. Ezért a matematikával összefüggő kognitív fejlődés felmérését úgy kell elvégezni, hogy a relációs számításokhoz viszonyítva kisebb követelményt támasszon a számolással szemben. A számolást a saját helyén lehet és kell értékelni.

A mérések tartalma

A matematikai gondolkodás értékelésének középpontjában a későbbi matematikai teljesítményeket megalapozó gondolkodási képességeknek kell állniuk. A különböző előrejelző vizsgálatok azt mutatták, hogy a gyerekeknek a korai években nyújtott teljesítménye olyan feladatokban, amelyek felmérik a megfeleltetésről, sorba állításról, összeadásról, valamint az összeadás és kivonás közötti fordított viszonyról való tudásukat, ismereteiket előre tudja vetíteni a várható jövőbeni matematikai teljesítményeket (*Nunes* és mtsai, 2007; *van de Rijt*, *van Luit*, és *Pennings*, 1999). A későbbi matematikai teljesítményt jól jelzi a számok közötti viszonyok felismerésének képessége, amit számérzéknek hívnak (*Fuchs*, *Compton*, *Fuchs*, *Paulsen*, *Bryant*, és *Hamlet*, 2005).

A számokkal kapcsolatos korai tudás felmérhető a számok írása és olvasása, a leírt és a kimondott számok nagyságrendjének összehasonlítása, és néhány számolási művelet alapján. Tudomásunk szerint mindössze egyetlen tanulmány (*Nunes* és mtsai., 2009) van, amely összehasonlította a számokkal kapcsolatos képesség relatív jelentőségét a matematikai teljesítmény előrejelzésében. Ez az összehasonlítás kiterjedt a figyelem és a memória kognitív funkcióira és az intelligencia vizsgálatára is. A prediktorokat a tanulók 8-9 éves korában mérték fel; a későbbi matematikai teljesítmény jellemzésére független standard adatokat választottak, amelyeket az iskolában gyűjtöttek össze 11-12 és 13-14 éves korban. A matematikai gondolkodás mindkét időpontban nagyobb szerepet játszott, mint a figyelem, a memória, sőt akár a számolási készség. A matematikai gondolkodás és a számolási készség relatív jelentőségének elemzése azt mutatja, hogy ahol komoly szerepe van az időkorlátnak, ott fontosabb a matematikai gondolkodás, mint a számolási készség felmérése.

A matematikai gondolkodás felmérésének formái

A matematikai képességek értékelésének megtervezése óhatatlanul kapcsolódik a tanulók általános képességeihez az utasítások megértése és a verbális kommunikáció terén. Az olvasási képességek befolyását azonban csökkenteni lehet azzal, ha olyan értékelő feladatokat találunk ki, amelyekben rajzok segítik a gyerekeket a feladat megértésében. A rajzok abban is segítik a tanulókat, hogy a megoldás számszerű értékéhez különböző megközelítéssel jussanak el: bizonyos esetekben elemezhetik a rajzot (pl. feloszthatnak valamit két részre, hogy jobban el tudják képzelni a mennyiség felét) és még számolhatnak is, hogy megkapják a helyes választ. Amennyiben helyesen mérik fel a helyzetet, jobb esélyük van a jó mennyiségi válasz megadására, mint ha a feladatot csak írásban kapták volna meg. A Freudenthal Intézet kutatói használták először ezt a megközelítést az értékeléshez (lásd pl. *van den Heuvel-Panhuizen*, 1990), amely értékes információkat adott a tanulók relációs kalkulációs képességeiről.

Ahogy korábban is említettük, a matematikai gondolkodás fejlődéséhez időre van szükség. Ideális esetben az értékelésbe beépíthetők a gondolkodási képességekkel szembeni különböző szintű elvárások. Ezek variálhatók különböző kifejezési formák, különböző szituációk, valamint különböző értékek használatával. Az előzőekben áttekintett lehetőségek megmutatták, hogyan lehet azonos típusú fogalmak értékelésére különböző feladatváltozatokat létrehozni.

Összegzés

Ebben a fejezetben áttekinttettük a matematikai gondolkodás fejlődésének néhány alapvető területét. Azokra a pszichológiai kérdésekre fordítottunk nagyobb figyelmet, amelyek meghatározó jelentőségűek a korai értelmi fejlődés szempontjából. Olyan területeket emeltünk ki, amelyek csaknem kizárólagosan a matematikatanítás keretei között fejleszthetőek. Ezek közül is központi jelentőségű a mennyiségekkel és a számokkal kapcsolatos fogalmak kialakulása, továbbá a hozzájuk kapcsolódó gondolkodási képességek fejlődése.

Hangsúlyoztuk azokat a pszichológiai különbségeket, amelyek a gondolkodás természetes fejlődése és a matematikai ismeretek elsajátítása között van. Az iskola kezdő szakaszában kiemelt helyet kell kapnia a gondolkodás fejlesztésének; kellően fejlett matematikai gondolkodás hiányában nem lehet eredményes a matematikai ismeretek értő elsajátítása.

Négy fő területet emeltünk ki: az egész számok és a racionális számok fogalmának, továbbá az additív gondolkodás és a multiplikatív gondolkodás fejlődésének kérdéseit. Ezek azért rendkívül fontosak, mert megalapozzák a későbbi sikeres tanulmányokat. Különböző kutatások bizonyították, hogy ezeknek komoly előrejelző ereje van, az ezek terén mért korai fejlettség meghatározta a későbbi eredményeket.

Utaltunk arra, hogy ezeken kívül számos más eleme van a matematikai gondolkodásnak, amelyek fejlesztése a matematikában ugyancsak fontos. Ezek fejlesztése során az előzőekben bemutatott alapelveket lehet érvényesíteni.

Kifejtettük, hogy a matematikai gondolkodás fejlődése lassú, hosszan tartó folyamat. Ugyanakkor különböző kutatások és kísérleti fejlesztő programok bizonyítják, hogy megfelelően stimuláló gyakorlatokkal a fejlődést fel lehet gyorsítani. Ezek a gyakorlatok azonban csak akkor lehetnek eredményesek, ha pontosan illeszkednek a tanulók aktuális fejlettségéhez. Ezért a matematikai gondolkodás fejlesztése során rendkívül fontos a fejlődési fázisok egymásra épülése. Egy összetett gondolkodási folyamatot csak akkor lehet kialakítani, amikor az azt alkotó komponensek, az egyszerűbb gondolkodási műveletek már kialakultak.

A gondolkodás eredményes fejlesztéséhez különösen fontos, hogy a tanár ismerje, hol tartanak a tanulói, és ennek megfelelő gyakorlatokkal segítse továbblépésüket. Ennek megfelelően a diagnosztikus értékelésnek részletesen le kell fednie a gondolkodás fejlődési folyamatát, minden területen megjelenítve annak különböző szintjeit. Különösen nagy figyelmet kell fordítani azokra az e fejezetben részletesebben is tárgyalt területekre, amelyek a kutatások szerint jelentős mértékben meghatározzák a későbbi sikereket.

Irodalom

Bán Sándor (1998): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, 221–250. Budapest.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., és Lesh, R. (1984): Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* **15**. 5. sz. 323–341.

Boyera, T. W., Levinea, S. C. és Huttenlochera, J. (2008): Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, **44**. 5. sz. 1478–1490.

Bryant, P. (2007): Children’s understanding of addition and subtraction. Paper presented at the Conference Students’ misconceptions and errors. Greek Education Research Center of the Ministry of Education, Athens, 1-2 November.

Brown, J. S. és VanLehn, K. (1982): Towards a generative theory of 'bugs'. In: Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Romberg T. A. (szerk.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 117–135.

Brown, M. (1981): Number operations. In: Hart, K. (szerk.): *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. NFER-Nelson, Windsor, UK. 23–47.

Csapó Benő (1988): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó, B. (1992): Improving operational abilities in children. In: Demetriou, A., Shayer, M. és Efklides, A. (szerk.): *Neo-Piagetian theories of cognitive development. Implications and applications for education*. Routledge and Kegan Paul, London. 144–159.

Csapó, B. (1997): Development of inductive reasoning: Cross-sectional measurements in an educational context. *International Journal of Behavioral Development,* **20**. 4. sz. 609–626.

Csapó Benő (2001): A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*. **101**. 4. sz. 511–530.

Csapó Benő (2003): *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. és Verschaffel, L. (2002): Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics,* **50**. 311–334.

De Bock, D., Verschaffel, L. és Janssens, D. (1998): The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics,* **35**. 65–83.

Dooren, W. V., Bock, D. D., Hessels, A., Janssens, D. és Verschaffel, L. (2004): Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction,* **14.** 5. sz. 485–501.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D. és Hamlet, C. L. (2005): The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology,* **97**. 493–513.

Hart, K. (1981): Ratio and proportion. In: Hart, K. (szerk.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* John Murray, London. 88–101.

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Kuchermann, D. és Ruddock, G. (1985): *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Fractions 1*. NFER-Nelson, Windsor, UK.

Inhelder, B. és Piaget, J. (1958): *The growth of logical thinking.* Routledge and Kegan Paul. London. [Magyarul: A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.]

Jitendra, A. K., Star, J. R., Starosta, K., Leh, J. M., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C. L., és Mack, T. R. (2009): Improving seventh grade students' learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology*, **34**. 3. sz. 250–264.

Kárpáti Andrea és Gaul Emil (2011): A vizuális képességrendszer: tartalom, fejlődés, értékelés. In: Csapó Benő és Zsolnai Anikó (szerk.): *Kognitív és affektív fejlődési folyamatok diagnosztikus értékelésének lehetőségei az iskola kezdő szakaszában*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 41–82.

Kárpáti Andrea és Pethő Villő (2011): A vizuális és a zenei nevelés eredményeinek vizsgálata. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (megj. alatt).
Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson, Windsor.
Kishta, M. A. (1979): Proportional and combinatorial reasoning in two cultures. *Journal of Research in Science Teaching.* **16**. 5. sz. 439–443.
Kuhn, D., Phelps, E. és Walters, J, (1985): Correlational reasoning in an everyday context. *Journal of Applied Developmental Psychology*, **6**. 1. sz. 85–97.
Magina, S. és Hoyles, C. (1997): Children's understanding of turn and angle. In: Nunes, T. és Bryant, P. (szerk.): *Learning and teaching mathematics. An international perspective*. Psychology Press, Hove, UK. 88–114.
Misailidou, C. és Williams, J. (2003): Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior.* **22**. 335–368.
Mamede, E. P. B. d. C. (2007): *The effects of situations on children's understanding of fractions*. Unpublished PhD Thesis, Oxford Brookes University, Oxford.
Nagy József (2004): A elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, **14**. 8. sz. 3–20.
Nesher, P. (1988): Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number concepts and operations in the middle grades*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 19–40.
Nunes, T. (2008): Mathematics instruction in primary school: The first three years. In: Balayeva, J. (szerk.): *The Encyclopedia of Language and Literacy Development*. Canadian Language and Literacy Research Network, London, Ontario. http://literacyencyclopedia.ca/index.php?fa=items.show&topicId=250
Nunes, T. és Bryant, P. (1996): *Children doing mathematics.* Blackwell Publishers, Oxford.
Nunes, T. és Bryant, P. (2010): Insights form everyday knowledge for mathematics education. In: Preiss, D. D. és Sternberg, R. J. (szerk.): *Innovations in Educational Psychology*. Springer, New York. 51–78.
Nunes, T., Bryant, P., Barros, R. és Sylva, K. (2011): The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology, Article first published online: 27 APR 2011, DOI: 10.1111/j. 2044–8279.2011.02033.x*.
Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A. és Carraher, J. N. (2007): The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology,* **25**. 147–166.
Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D. és Evans, D. (2009): Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematics Thinking and Learning,* **11**. 61–78.
Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D. és Wade, J. (2007): La compréhension des fractions chez les enfants. In: Merri, M. (szerk.): *Activité humaine et conceptualization.* Presses Universitaires du Mirail, Toulouse. 255–262.
Nunes, T., Campos, T. M. M. és Bryant, P. (2011): *Introdução à Educação Matemática Os números racionais*. Cortez, São Paulo.
Nunes, T., Schliemann, A. D. és Carraher, D. W. (1993): *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press, New York.

Piaget, J. és Inhelder, B. (1974): *The child's construction of quantities*. Routledge and Kegan Paul, London.
Piaget, J. és Inhelder, B. (1975): *The origin of the idea of chance in children.* Routledge and Kegan Paul, London.
Piaget, J. és Inhelder, B. (1976): *The child's conception of space*. Routledge and Kegan Paul, London.
Resnick, L. B. (1982): Syntax and semantics in learning to subtract. In: Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Romberg, T. A. (szerk.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 136–155.
Ricco, G. (1982): Les première acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics,* **13**. 289–327.
Schröder, E., Bödeker, K., Edelstein, W. és Teo, T. (2000). *Proportional, combinatorial, and correlational reasoning. A manual including measurement procedures and descriptive analyses*. Study „Individual Development and Social Structure". Data Handbooks Part 4. Max Planck Institute for Human Development, Berlin.
Schwartz, J. (1988): Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: Hiebert, J. és Behr, M. (szerk.): *Number concepts and operations in the middle grades*. Erlbaum, Hillsdale, NJ. 41–52.
Shayer, M., és Adhami, M. (2007): Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational Studies in Mathematics,* **64**. 265–291.
Stern, E. (2005): *Transitions in mathematics: From intuitive quantification to symbol-based reasoning.* Paper presented at the International Society for the Study of Behavioral Development (ISSBD), Melbourne, Australia.
Vamvakoussi, X. és Vosniadou, S. (2004): Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction,* **14**. 453–467.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1990): Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests. In: Gravemeijer, K. Van den Heuvel, M. és Streefland, L. (szerk.): *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*. Utrecht, Netherlands: Research group for Mathematical Education and Educational Computer Centre, State University of Utrect. 53–78.
Van de Rijt, B. A. M., van Luit, J. E. H. és Pennings, A. H. (1999): The construction of the Utrecht Early Mathematical Competence Scales. *Educational and Psychological Measurement,* **59**. 289–309.
Vergnaud, G. (1979): The Acquisition of Arithmetical Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* **10**. 263–274.
Verschaffel, L. (1994): Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**. 2. sz. 141–165.
Vidákovich Tibor (1998): Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest, 191–220.
Vigotszkij, L. Sz. (1971): *A magasabb pszichikus funkciók fejlődése*. Gondolat Kiadó, Budapest.
Wason, P. C. (1968): Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology.* **20**. 271–281.

2.

A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Lieven Verschaffel
Katholieke Universiteit Leuven Institute of Education

A matematikatanulás célját leginkább az általános társadalmi elvárások, valamint az egyéb diszciplínák, különösen a többi tudományterület igényei alakítják. A matematika mint tudományág és mint iskolai tantárgy alakíthatja a diákok gondolkodását, hogy kialakuljon bennük az igény a matematikai tudás alkalmazására más iskolai tantárgyakban, vagy a mindennapi, iskolán kívüli problémák megoldásában.

Az elképzelés, hogy leírjuk az iskolában megszerzett matematikatudás különböző összefüggésekre és problématerületekre való alkalmazhatóságát, egyidős a matematikai fogalmak megjelenésével. Ezért ebben a fejezetben elsőként röviden bemutatjuk a matematikai tudás alkalmazásának általános elméleti alapjait. Az elmúlt évszázadok során az európai iskolarendszerek többségében a matematika mint iskolai tantárgy központi szerepre tett szert a tananyagban. A *Ratio Studiorum* óta, amikor *Christopher Clavius* latba vetette befolyását, hogy a matematikát a normál jezsuita alaptanterv részévé tegye (lásd *Smolarski*, 2002), egészen a mai európai alaptantervekig folyamatosan kutatják a matematikatanítás és -tanulás jobbításának útjait. A fejezet második részében a matematikai tudás alkalmazásának értékelési szempontjaira összpontosítunk.

A fejezet harmadik részében a tantermi matematika jellemzőit és szerepét elemezzük, különös tekintettel a szöveges feladatokra. A tanulók nézeteit a világ különböző problémáinak megközelítéséről leginkább a tantermi gyakorlat és az osztálytermi kultúra alakítja. Végezetül a matematikai tudás diagnosztikai értékelési szempontjait is tekintetbe véve kategorizáljuk a matematikai szöveges feladatokat.

Elméleti megfontolások

A matematika és a matematikaoktatás történetét végigkíséri a törekvés, hogy igazolják a matematika fontosságát a mindennapi élet és a többi tudományág szempontjából. Az ilyen irányú erőfeszítéseket sokszor gátolta a matematika kettős természete: kettősség figyelhető meg ugyanis abban, ahogyan a matematikai eredményeket publikálják és kommunikálják, és ahogyan a matematikai gondolkodás és felfedezések ténylegesen megvalósulnak.

A matematikai gondolkodás természete

A matematikát gyakran azonosítják a definíciók, tételek és bizonyítások egymásutánjával. A matematikai közlemények az ókor óta mindig szigorú szabályokat követtek az eredmények bemutatásában. Ezek a szabályok alapvetően a deduktív következtetések szabályai. Sok matematikai publikáció szerkezete még ma is a definíció – tétel – bizonyítás sorrendet követi. Ugyanakkor *Descartes* már a 17. században azt állította, hogy az ókori görögök a tételeikhez induktív úton jutottak el, eredményeiket azonban szigorúan deduktív szabályok szerint tették közzé. A teorémák bemutatásában és az azokhoz való eljutásban rejlő kettősség a laikust is megtévesztheti, aki a matematikust olyan embernek tartja, aki megalkotja a tételt, majd bebizonyítja azt. Mindazonáltal *Rickart* (1996) – *Poincaré* és *Hadamard* nyomán – hangsúlyozza, hogy a kreativitás alapvető szerepet játszik a matematikai felfedezésekben. A matematikában a tudatos, kemény munka és a kreatív tapasztalatok együttese hoz eredményt. Bár a matematikai gondolkodás különböző aspektusai összekapcsolódnak a matematikai tevékenységekben, a megoldandó feladattól függően egyik vagy másik jobban előtérbe kerülhet. „A szakmán belül még mi magunk is elméleti szakemberként, illetve problémamegoldóként osztályozzuk magunkat” (*Guy*, 1981, vii. o.). *Ernest* (1999) szerint az oktatás szempontjából egyensúlyt kell teremteni a verbálisan megfogalmazható, explicit és a szavakkal nem megfogalmazott, implicit matematikai tudás között.

Freudenthal munkásságában található meg a kulcs annak megértéséhez, hogy az iskolai matematika hogyan tükrözi vissza a különböző filozófiai megközelítéseket. A diákoknak az iskolában elsődlegesen a matematikai tevékenységeket, a matematika művelését kell megtanulniuk, és nem azt, hogy készen elfogadják a matematikusok tevékenységének eredményét. A matematika művelése a diákoktól elsősorban tapasztalatszerzést, hipotézisek felállítását, és mindenekelőtt a matematikai gondolkodás elsajátítását követeli meg. „A tanulónak inkább a matematikai gondolkodást és nem a matematikát; inkább az elvonatkoztatást és nem az absztrakt fogalmakat; inkább a sematizálást és nem a sémákat; inkább a megfogalmazást és nem a fogalmakat; inkább az algoritmizálást és nem az algoritmusokat; inkább a szóbeli kifejezést és nem a nyelvet … kell újra felfedeznie” (*Freudenthal*, 1991, 49. o.). A matematikaórákon a történelmileg kialakult DTP (definition – theorem – proof; definíció – tétel – bizonyítás) sorrenddel szemben egyfajta megfordított sorrendet érdemes alkalmazni: felfedezés, magyarázat, formalizálás (*Hodgson* és *Morandi*, 1996).

A matematikai modellezési perspektíva

„A 20. század elején a matematikaoktatás mint új tudományág megjelenésének nyilvánvaló politikai motivációi voltak” (*Sriraman* és *Törner*, 2008, 668. o.). A különböző mozgalmak fő támogatóit gazdasági szempontok vezérelték. A 20. században két olyan matematikai oktatási mozgalom van, amely még napjaink matematikaoktatásának elméletére és gyakorlatára is jelentős hatással van.

Az *Új matematika* (*New Math*) mozgalom célja, hogy absztrakt fogalmakon keresztül hangsúlyozza a matematikai struktúrákat. A *Bourbaki-csoport* munkája nyomán az Új matematika mozgalom erősen formalizált tankönyveket jelentetett meg, kezdeményezte az iskolai tanterv és a tanárképzés reformját. Az Új Matematika a *miérteket* és a matematika mélyebb struktúráját hangsúlyozta a hagyományos matematikatanítás értelem nélküli merevségével szemben (*Sriraman* és *Törner*, 2008). Ezért érdemes a mozgalmat pozitívabban értékelni, és nem csupán a posztmodern matematikaoktatás szemszögéből kritizálni. Ez a mozgalom kezdeményezte a matematikai és a pszichológiai (a *piaget*-i értelemben vett hipotetikus-deduktív) struktúrák közötti hasonlóságok tanulmányozását is.

A realisztikus matematikaoktatás (*Realistic Mathematics Education* – RME) „egyaránt választ jelentett az amerikai Új matematika mozgalomra … és az akkor uralkodó holland … mechanisztikus matematikaoktatásra is." (*van den Heuvel-Panhuizen,* 2001, 1. o.). Az RME *Hans Freudenthal* kezdeményezéseiből nőtt ki: a *Wiskobas* projekttel (hollandul: „matematika az általános iskolában"), majd később a Freudenthal Intézet megalapításával, valamint a matematika oktatás olyan gondolatokkal való megtermékenyítésével, mint pl. hogy a diákok maguk fejlesszék a számukra jelentéssel bíró fogalmakat és eszközöket, amelyeket a hétköznapi problémák kezelésére alkalmaznak (*van den Heuvel-Panhuzien*, 2003). Ahogy *Freudenthal* fenti idézete már rámutatott: a realisztikus matematikaoktatás célja, hogy a gyerekek saját maguk építsék fel matematikai tudásukat. Az RME hangsúlyozza egyrészt a matematikai struktúrán belüli matematikai tevékenységek, másrészt pedig a megszerzett tudás és különböző kontextusok közötti matematikai kapcsolatok megteremtését (lásd *Treffers*, 1993; *Wubbels*, *Korthagen* és *Broekman*, 1997). Mivel a 'realisztikus' jelző fordítása más nyelvekhez hasonlóan az angol nyelvben is a 'realitáshoz' (valósághoz) kapcsolódik, történtek kísérletek annak tisztázására, hogy a matematikaoktatásban hogyan definiálható a realitás és a realisztikus (*Greer*, 1997; *Säljö*, 1991a, 1991b). *Van den Heuvel-Panhuizen* (2001a) rámutat arra, hogy az eredeti holland fogalom, a 'zich realizeren' jelentése 'elképzelni', ezért a realisztikus matematikában a feladatok kontextusa nem minden esetben a realitás, a való világ; a fantáziavilág tárgyai (amelyek elképzelhetők, megjeleníthetők, ezért modellezhetők) ugyanolyan jó kontextust teremtenek a matematika műveléséhez. A 'realisztikus' fogalmának aktuális értelmezése arra utal, ami a tapasztalat számára *tapasztalatilag (experientially)* valós (*Gravemeijer és Terwel*, 2000; *Linchevski* és *Williams*, 1999), aláhúzva, hogy nem az összes hétköznapi probléma lesz szükségképpen tapasztalatilag valós az összes tanuló számára.

Bizonyos jelek arra mutatnak, hogy tizenöt évvel ezelőtt az RME kutatási és fejlesztési munkában (lásd *van den Heuvel-Panhuizen,* 2000) nagyobb hangsúlyt helyeztek a valósághoz való viszonyra, a valós élet és a diákok matematika tanulása közötti erős és releváns kapcsolat még mindig az egyik fő jellemzője az RME-nek. *Treffers* (1993) dolgozta ki a horizontális és vertikális matematizálás (matematikai nyelve való lefordítás) koncepcióját. A matematizálás fogalmát *Freudenthal* alkotta meg (lásd *van den Heuvel-Panhuizen,* 1996, 2000, 2001a, 2001b, 2003). A matematizálás a matematikai tevékenység folyamataira utal; az iskolában nem a matematikát mint zárt rendszert kell tanítani, hanem a valóságból származó dolgok matematikai értelemben vett szervezésének folyamatát. *Treffers* horizontális matematizálási koncepciója arra a folyamatra utal, amelynek során a matematikai eszközöket felhasználjuk a napi problémák szervezésében és megoldásában. A vertikális matematizálás a matematikai rendszer fogalmainak és műveleteinek belső mentális átszervezését jelenti. A diákok matematikai tevékenységében a horizontális és vertikális matematizálási folyamatok összefonódnak, és a matematizálás „lényegében az RME oktatáselméletének valamennyi lényeges aspektusát tartalmazza" (*van den Heuvel-Panhuizen,* 1996, 11. o.).

Az RME egyik döntő kérdése a matematikai modellek (a szó legszélesebb értelmében) bevezetése. A modellek problémaszituációkra való megalkotása és kidolgozása egészen mást jelent, mint a problémás szituációk modelljeinek keresése (lásd. *van den Heuvel-Panhuizen,* 2001a). A különféle modellek alkalmazásának a hatékonysága már bizonyítást nyert a különböző korcsoportokban és különböző területeken. *Gravemeijer* (1994) a számegyenest vizsgálta mint több szempontból is nagyon hatékony matematikai modellt. Ez ugyanis vizualizálás útján lehetővé teszi különféle stratégiák alkalmazását és magyarázatát. Például a 49 kivonása helyettesíthető azzal, ha kivonunk 50-t és hozzáadunk egyet, vagy viszonylag nagy kivonandó esetén (pl. 51 – 49) esetleg könnyebb lehet a kisebb mennyiség felől a nagyobb mennyiség felé továbbszámlálással haladni.

Klein, Beishuizen és *Treffers* (1998) ehhez hozzátették, hogy nem csupán az üres számegyenes az, ami hozzájárul fejlesztési programjuk sikeréhez, hanem annak használati módja is, például a különböző megoldási módok pozitív osztálytermi környezetben való ösztönzése és megvitatása. *Keijzer* és *Terwel* (2003) a törtek megértését vizsgálták, és a megértetéshez szintén sikeresen használták a számegyenes modellt (számítógépes játékok segítségével). *Doorman* és *Gravemeijer* (2009) 10. osztályos tanulókkal végeztek kísérletet út-idő-sebesség problémákon, ahol adott időpillanatokat bemutató ábrák sorozatát használták az időbeni elmozdulás és a teljes megtett távolság közötti kapcsolat modellezésére. Az RME elvek magasabb osztályba járó tanulókra való kiterjesztését *Gravemeijer* és *Doorman* (1999) már korábban bemutatták a matematikai analízis *(calculus)* területén. Ebben az esetben a sebességnek az idő/intervallum grafikonokból való meghatározása modellül szolgált tetszőleges függvények integrálásával és differenciálásával kapcsolatban. *Van Garderen* (2007) szerint a tanulási nehézségekkel küzdő gyermekek számára a diagramok mint matematikai modellek biztosítják a szükséges rugalmasságot, hogy egy másik szituációban alkalmazzák azt, amit egy adott szituációban már megtanultak.

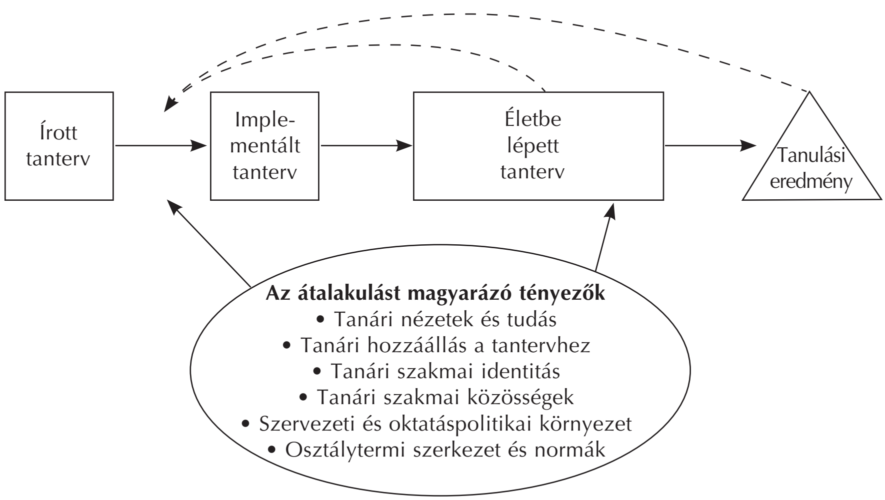
A realisztikus matematikai megközelítés hasznosnak bizonyult a gyengén teljesítő tanulók esetében is. A gyengén teljesítőkre vonatkozó RME elveket és ajánlásokat *Barnes* (2005) tekintette át. A gyengén teljesítő és a sajátos nevelési igényű tanulók profitáltak a leginkább az ún. irányított oktatásból (ami sokkal nagyobb teret biztosít az egyéni részvételnek), mint az ún. strukturált vagy direkt oktatási módszerből (*Kroesbergen* és *van Luit*, 2002). Általánosságban azonban nem sikerült egyértelműen bizonyítani a matematikai oktatási megközelítésmódok (nevezetesen a hagyományos és realisztikus megközelítésmód), valamint a tanulók matematikai eredménye közötti kapcsolatot. Általában nagyobb különbség van a tanulói teljesítményekben egy adott matematikai oktatási megközelítésmód esetén, mint két különböző megközelítésmód között (*Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,* 2009).

A matematikai műveltség a tantervekben

A tananyag céljainak és célkitűzéseinek szerepéről és fontosságáról folytatott tudományos párbeszédet az utóbbi időben áthatják a tanítási-tanulási folyamat különböző szintjei, illetve fázisai által definiált különféle tantervek. A kutatás alapú tantervkészítés elemzésekor *Clements* (2008) leszűkíti a fogalmat a rendelkezésre álló tantervre *(available curriculum),* vagyis arra a tantervre, amelyhez létezik oktatási anyag. A (matematika) oktatás szakirodalmában a tanterv fogalmára általánosan elterjedt egy hármas fogalomrendszer: deklarált, implementált és megvalósult tanterv.

A deklarált tanterv az oktatási rendszer különböző szintjein kiadott oktatási dokumentumokra vonatkozik: nemzeti alaptanterv, helyi tantervek stb. Az implementált tanterv az iskolában aktuálisan megvalósuló folyamatokra, míg a megvalósult tanterv a tanterv céljainak elérését mérő teszteken a tanulók által nyújtott teljesítményre vonatkozik.

Stein, *Remillard* és *Smith* (2007) ábrája a tananyaggal kapcsolatos változók, köztük a tanulók tanulási folyamatának kapcsolatát mutatja. Bár a fent említett három tantervi fogalom között egyértelmű sorrendiség van, a fogalmak egymásba átalakulásának módja számos tényezővel magyarázható. A *2.1. ábra* is a tantervi fogalmak egymás közötti átmenetét magyarázó tényezők komplexitását mutatja, felsorolva az olyan kölcsönösen és szükségképpen összefonódó jelenségeket, mint a tanárok meggyőződései, a tanárok szakmai identitása és az olyan magasabb szintű változók, mint a szervezeti és politikai szempontok.



2.1. ábra. Kapcsolat a deklarált, implementált és az életbe lépett (enacted) tantervek és a diákok tanulása között (Stein, Remillard és *Stein, 2007, 322. o.)*

Henningsen és *Stein* (1997) tanulmánya néhány matematikai feladattal összefüggő tényező szerepét vizsgálja a tudás tananyag általi alakításában. Legalább két lépcső van a kiadott tananyag alapján meghatározott feladatok és a tanulók tanulási eredményei (vagyis a megvalósult tanterv) között. A matematikai feladatokat a tanárok határozzák meg az általuk implementált tanterv alapján, a következő lépcsőben pedig a tanulók az osztályteremben végzik el a matematikai feladatokat. Ahogy már említettük: a tanár és a tanuló általi implementációk közötti átmenetet számos tényező befolyásolja, beleértve az általános osztálytermi normákat és a tartalomspecifikus szocio-matematikai normákat (*Yackel* és *Cobb*, 1996), valamint a tanár oktatási elképzeléseit. A tanári nézeteknek és oktatási elképzeléseknek a fontosságát a „feladatok a matematikai műveltség mérésére az osztályteremben" c. részben tárgyaljuk.

A fejezet következő részében a nemzeti (deklarált) tantervekből vett példákra koncentrálunk, mivel számos közvetlen és közvetett tényezőn keresztül a nemzeti tantervek valamilyen módon hatást gyakorolnak mind az implementált, mind a megvalósult tantervekre. Az alábbi példák rámutatnak arra, hogy az elmúlt évtizedekben tanterveink hogyan fogalmazták meg és hangsúlyozták az osztálytermi matematikai tudás és az olyan matematikai tudás egymáshoz közelítésének fontosságát, amely tudás átvihető a különböző típusú problémákra és más iskolai tantárgyakra.

Az alaptantervek jellemzői a matematika területén

A jelenlegi Nemzeti alaptanterv bevezetése előtt az ún. „78-as tanterv" komoly hatást gyakorolt a magyar iskolarendszerre nem csupán előíró jellege miatt (ez a tanterv minden iskolára kötelező érvényű volt és nem voltak helyi tantervek), hanem az általa – többek között a matematika területén is – bevezetett előremutató változások miatt. A nemzeti tanterv matematika része a tanterv többi részének struktúráját követte, azaz célokat és tartalmi követelményeket fogalmazott meg az 1–4. és az 5–8. osztályosok számára. *C. Neményi*, *Radnainé* és *Varga* (1981) azonban a matematika tantervi céljait a fenti intervallumokat átívelően határozták meg: az 1–3. és 4–5. osztályos felosztás azt a meggyőződésüket juttatta kifejezésre, hogy a tanulók matematikai gondolkodásában a szükségképpen folyamatos fejlődési folyamatokat a negyedik osztály végén (mely évfolyam a hivatalos választóvonal a magyar oktatási rendszerben az általános iskola alsó és felső tagozata között) nem érdemes formálisan különváló szakaszokra bontani.

A 78-as tanterv általános céljai között a motiváció olyan értelemben szerepelt, amely a tanulóktól elvárja, hogy legyenek érdeklődők és szeressék a matematikát, egyrészt olyan külső tényezők miatt, mint annak hasznossága és alkalmazhatósága, másrészt olyan belső okokból, mint a matematikában rejlő harmónia, igazság és szépség (262. o.). *Aiken* (1970) szerint a matematikához fűződő felnőttkori viszonyt a gyerekkori tapasztalatok határozzák meg, és a 4–6. osztályban szerzett tapasztalatok ebből a szempontból döntő fontosságúak. A reformok nyomán Magyarországon sokat javult a matematika elfogadottsága; egy tantárgyiattitűd-vizsgálat feltárta, hogy a tanulók a matematikát más tantárgyakhoz képest közepes mértékben kedvelik (*Csapó*, 2000).

A 78-as tantervben megjelent egyéb tantervi célok különös figyelmet szenteltek a kognitív természetű tanulói jellemzőknek. A matematikai tudás különböző összefüggésekben való alkalmazásával kapcsolatban az alábbi célokat találjuk.

A 4. és 5. osztály követelményei között szerepel „annak megítélése (megvédése vagy vitatása), hogy egyértelmű-e egy feladat, nem tartalmaz-e felesleges adatokat, ellentmondó feltételeket, célszerű-e egy megoldási menet” (262. o.). Egy adott évfolyamra, az 5. osztályosokra vonatkozó konkrétabb célok között megtalálható: „legyenek képesek megállapítani, hogy egy feladatban mely adatok feleslegesek, vagy milyenekre volna még szükség” (601. o.), amely cél általában (jóllehet implicite) horizontális matematizálási folyamatokat feltételez. A 3. osztály végére a tanuló „legyen jártas szöveges feladatok adatainak önálló feljegyzésében, rendezésében. Tudjon megfelelő matematikai modellt találni (rajz, kirakás, műveletek, nyitott mondat); szöveges feladatot megoldani a talált modellel vagy anélkül, próbálgatással” (283. o.). Ez utóbbi módszer nyíltabban utal a szöveges feladatok megoldásában a horizontális matematizálás szükségességére.

A Nemzeti alaptanterv (NAT, első változat: 1995, legújabb változat: 2007) több teret biztosít az iskolai autonómiának, és lazábban, általánosabban fogalmazza meg az országos tantervi célokat. A helyi tantervben kell kidolgozni az országos tantervi célokat a konkrét iskolai környezetben. A nemzetközi rendszerszintű felmérések aktuális tendenciáinak megfelelően a matematikakompetencia fogalma tartalmazza azt a fontos elemet, mely szerint „az egyén rendelkezik azzal a képességgel, hogy alkalmazni tudja az alapvető matematikai elveket és folyamatokat az ismeretszerzésben és a problémák megoldásában, a mindennapokban, otthon és a munkahelyen” (9. o.). A Nemzeti alaptanterv életkorhoz kapcsolódó céljainak többsége egynél több – egyenként két év hosszúságú – életkori intervallumhoz kapcsolódik.

A NAT-célok struktúrája a kétéves intervallumok rendszerét követi, azaz a célok első mérföldköve a második év végén, a második mérföldkő a negyedik év végén van, stb. A NAT tantervi céljainak második szempontját a matematikai műveltség alterületei jelentik. Az egyik részterület neve „Ismeretek alkalmazása”. Ez a terület olyan tantervi célokat tartalmaz, amelyek egyértelműen a mindennapi életből vett szituációkra és más iskolai tantárgyakra utalnak. A matematikai ismereteknek a mindennapi életben való alkalmazása mint cél már a harmadik életkori csoporttól (azaz az 5. osztálytól) egészen a 12. osztályig minden korosztály számára követelmény. Hiányossága a tantervnek, hogy az első évfolyamokra nem fogalmaz meg egyértelműen ilyen célokat. Az osztályteremben megszerzett tudás valós élethelyzetekben való alkalmazását mind oktatási, mind értékelési módszerekkel érdemes erősíteni, különösen az iskola kezdő szakaszában.

Hiebert és mtsai (1996, 14. o.) arra figyelmeztetnek, hogy „az ismeretek megszerzése és azok alkalmazása közötti feszültség nem csupán a matematikára jellemző”. „Az iskolai tanulás ‘mindennapi élettől’ való elválasztásának problémája felkeltette a megismerés társadalmi-kulturális természetével foglalkozó kutatók figyelmét” (*Säljö*, 1991a, 183. o.). *Hiebert* és mtsai szerint azonban a tudás alkalmazási dimenziójának előtérbe helyezése kevésbé körvonalazható tanterveket eredményezhet, és a tanárok aggódhatnak a fontos információk elvesztése, azaz a tananyag bizonyos részeinek kiesése miatt, ha az időt időigényes alkalmazási megoldásokra kell fordítani. Itt most nem tudunk részletesen foglalkozni a matematikatanár-képzés jellemzőivel és problémáival, jóllehet *Szendrei* (2007) ezek közül néhányra rámutatott, amikor a 70-es évektől áttekintette a magyar matematikaoktatás és matematikatanár-képzés tendenciáit és erőfeszítéseit. Egyik legfontosabb javaslata, hogy a matematikatanárok képzésében több időt kell fordítani a matematika oktatástanára (didaktikájára) – jelenleg sokkal nagyobb hangsúlyt kap magának a matematikának az oktatása.

A matematikai ismeretek alkalmazása és a többi iskolai tantárgy matematikával szembeni elvárásai

Történelmileg a matematika vezető szerepet játszott a tudományok fejlődésében. *Maddy* (2008) szerint a 17. századig a nagy gondolkodók nem tudták elválasztani egymástól a matematikát és a természettudományokat. A 19. században kezdtek a matematikusok először olyan fogalmakat kidolgozni, amelyeknek nem volt közvetlen fizikai jelentése. A matematika és a természettudományok történeti fejlődése azonban még mindig hatással van az iskolai tananyagra és a tantermi gyakorlatra. Érdekes, hogy a Nemzeti alaptanterv az „Ember a természetben” műveltségi terület tanulási céljainak részletes felsorolása során nem említi explicite a „matematika” vagy a „matematikai” fogalmakat. Ugyanakkor a „Földünk-környezetünk” műveltségi területen belül számos olyan pont van, amely hangsúlyozza a matematikai képességek (kompetenciák) szerepét a földrajzi ismeretek megszerzésében. Három fő csoport van, ahol a matematika fontossága és szerepe megérthető: (1) számok használatának képessége méréseknél és adatkezelésnél, (2) térbeli intelligencia a térben való tájékozódáshoz, és (3) logikus érvelési képesség különösen a komplex térbeli és környezeti rendszerek megértésében.

Összességében elmondható, hogy a magyar NAT-ban meglepően kevés konkrét kapcsolat van a matematikai és a természettudományos követelmények között. Természetesen a tanárok összekapcsolják a természettudományos témákat a nélkülözhetetlen matematikai ismeretekkel, de az aktuális iskolai gyakorlatra még ma is érvényes *Pollaknak* (1969, 401.o.) az a régi kritikai megjegyzése, hogy „a tanulók számára nem adott a lehetőség, hogy részt vegyenek egy olyan absztrakcióban, amely során a fizikai valóságból eljutnak a matematikai modellig”. A közeljövőben változásokra számítunk, köszönhetően részben a kutatás alapú tanulásról készített Rocard-jelentésnek (*High Level Group on Science Education*, 2007) és a nemrégiben elindult olyan projekteknek, mint például a PRIMAS *(Promoting Inquiry in Mathematics in Science Education across Europe).*

A matematikai műveltség definíciója a PISA felmérésekben

A PISA (*Programme for International Student Assessment*, az OECD nemzetközi tanulói teljesítménymérés programja) felmérések célja a tanulók tudásának és képességeinek meghatározása és mérése olyan fontos területeken, mint a matematika, az olvasás és a természettudományos műveltség. A matematikai műveltség állt a 2003-as PISA felmérés középpontjában (OECD, 2004). Ez a dokumentum hangsúlyozza, hogy a „műveltségi megközelítés" kifejezi azt a szándékot, hogy a matematikai ismereteket és képességeket ne az iskolai tananyag beható ismerete alapján határozzuk meg és értékeljük, hanem a társadalomban való teljes körű részvételre való készség alapján.

Az „emberi tőke" általánosabb gazdasági definícióját alapul véve, a PISA tanulmányok a következőképpen fogalmazzák meg a matematikai műveltséget: „A matematikai műveltség az egyén azon képessége, amellyel azonosítja és megérti a matematika szerepét a világban, jól megalapozott döntéseket hoz, és az egyén életszükségleteinek megfelelően alkalmazza a matematikát konstruktív, érdekelt és megfontolt állampolgárként." (OECD, 2003, 24. o.)

Ennek a definíciónak egyes elemei további kifejtésre kerülnek a fent említett dokumentumban, pl. a „világ" fogalma jelenti a természeti, társadalmi és kulturális objektumokat, és a fogalom még további tisztázására kerül sor *Freudenthal* munkásságára hivatkozva. A PISA matematikai feladatainak rendszere a matematikai műveltség fenti definícióján alapul. A tanulóknak különböző tartalmi, tudásszint- és kontextusdimenziókhoz tartozó feladatokat kell megoldaniuk. Következésképpen, a „matematika alkalmazása és a vele való foglalkozás" kritérium hangsúlyozza a különböző tartalmi területeken, különböző kompetenciaszinteken és különböző összefüggésben alkalmazható matematikai tudás elsajátításának fontosságát. A „reflektivitás" az egyes területek közötti tudástranszfert elősegítő tudatos és meta-reprezentációra épülő folyamatokra utal (*Adey* és mtsai, 2007).

A PISA felmérések jelentőségét és annak lehetőségét, hogy az eredmények felhasználásra kerüljenek a bizonyítékokra alapozott *(evidence-based*) oktatáspolitikai döntésekben, meggyőzően mutatja számos másodelemzés (lásd pl. *Baumert* és mtsai, 2009).

Feladatok a matematikai műveltség mérésére

Ebben a részben a matematikai műveltség osztálytermi feladatainak alkalmazását és jellemzőit vizsgáljuk. Oktatási szempontból azokat a formatív értékelést megvalósító feladatokat tárgyaljuk, amelyeknek az a szerepe a tanítási-tanulási folyamatban, hogy fejlesszék a tanulók matematikai megértését. A matematikai műveltség feladataira összpontosítunk, abban az értelemben, ahogyan a matematikai műveltség meghatározása a PISA felmérésekben adott. A matematikai ismeretek alkalmazással összefüggő céljait illetően a PISA felmérésekben szereplő kontextus dimenzió értelmezhető úgy, mint a matematikai tudás különböző szituációkban való alkalmazása (lásd OECD, 2006).

A PISA műveltségi megközelítése (OECD, 1999) elvárja a tanulóktól, hogy „a matematikai modellezés teljes ciklusában részt vegyenek" (*Palm*, 2009, 3. o.) olyan feladatok megoldásával, amelyek iskolán kívüli problémahelyzetekkel is foglalkoznak. Bár a PISA matematikai műveletség koncepcióját a 15 éves tanulók eredményeinek mérésére fejlesztették ki, szeretnénk hangsúlyozni, hogy a fiatal gyerekek matematikai műveltsége is fejleszthető és mérhető különböző kontextusokban, különböző alkalmazási területeken.

A tantermi szöveges matematikai feladatok jellemzői

Ebben a részben elemzésünket a matematikai tudás alkalmazása szempontjából releváns matematikai feladatokra korlátozzuk. Mivel a matematikai tudás alkalmazása általában szöveges kidolgozást igényel (legalábbis a probléma felvetésének szakaszában), elemzésünk középpontjában a szöveges feladatok állnak. „A szöveges feladatok olyan problémahelyzetek szöveges megfogalmazását jelentik, amelyekben egy vagy több kérdés vetődik fel, és amelyekre a választ a matematikai műveleteknek a problémafelvetésben szereplő számszerű adatokra való alkalmazásával lehet megadni." (*Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000, ix. o.)

Az elmúlt néhány évszázadban a szöveges problémák két, egymással kölcsönhatásban lévő szerepet töltöttek be. A matematikai szöveges feladatok már az ősi folyamvölgyi kultúrák megjelenésétől kezdve lehetőséget adtak a számolási készségek gyakorlására, egyidejűleg azonban eszközt biztosítottak a mindennapi élet bizonyos, az adott történelmi helyzetben döntő fontosságú problémáinak megoldására. Az ősi egyiptomi munkások munkájához vagy a sikeres velencei kereskedővé váláshoz szükséges számtani ismeretek egyaránt magas szintű számolási készségeket, valamint a mindennapi életben felmerülő problémák és a matematikai prototípus példák közötti szoros összefüggés megteremtésének képességét kívánták meg (lásd *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000). A szöveges feladatok e kettős funkciója máig él, és a köztük lévő ütközés, valamint szoros összekapcsolódás kérdéseket vet fel a szöveges feladatok hatékony alkalmazásáról tantermi környezetben.

Pollak (1969, 393. o.) az alábbiak szerint indokolta a szöveges feladatok fontosságát a matematika alkalmazásának fejlesztésében: „Hogyan lehet a diákot bevonni a matematika alkalmazásába? Leginkább azzal, hogy az oktatásban szöveges feladatokat használunk".

A tantermi matematikai szöveges feladatok szöveges, szemantikai és matematikai jellemzőik alapján csoportosíthatók és elemezhetők. A tanult ember könnyen különbséget tud tenni a különféle szöveges feladatok között. Ahogy *Säljö* (1991b) rámutatott, még a huszadik századi olvasó is könnyen felismeri a szöveges feladat matematikai műfaját, és képes lehet az alábbi, 1478-ból származó szöveghez hasonlók értelmezésére: „Ha 17 ember 9 nap alatt 4 házat épít fel, akkor 20 ember hány nap alatt épít fel 5 házat?"

Amennyiben a feladatmegoldó tudja, hogy egyenes arányosság áll fenn a dolgozó emberek száma és a felépített házak száma között, „ezen ismeret birtokában rájöhet arra, hogy az a tevékenység, melyre a szöveg utal – házak építése – esetleges, legalábbis nem központi kérdése az elemi számtani feladatnak" (*Säljö*, 1991b, 262. o.). E feladat tartalma korlátozás nélkül variálható, és a megoldáshoz nem szükséges semmilyen házépítési technológia vagy csapatmunka-módszer ismerete. Sőt, kifejezetten hátrányos lenne elkezdeni a feladatban szereplő változók realitásának mélyreható szemantikai elemzését. „A látszólag valós (pszeudoreális) szövegkörnyezetek … arra ösztönzik a tanulókat, hogy az iskolai matematikát különös és misztikus nyelvezetnek tekintsék" (*Boaler*, 1994, 554. o.). A szöveges feladatok mikrovilága (a fogalmat *Lave*-től [1992] kölcsönöztük) ugyanahhoz a szöveges műfajhoz tartozik, mint amit *Flaubert* két évszázaddal ezelőtt kifigurázott, amikor megírta hírhedt levelét a „Hány éves a kapitány?" típusú problémákról.

Boaler (1994) feminista szemszögből bírálta az ún. pszeudo-realisztikus matematikai szöveges feladatokat. Bár sok feladat egyformán furcsa a fiúk és lányok számára, *Boaler* kutatásában a hagyományos tanulási környezetben a lányok jobban szenvedtek a látszólag valóságos feladatoktól, mint a fiúk. Tanulmányaiban komolyan kifogásolja és leleplezi ezt a hagyományos megközelítést, amely figyelmen kívül hagyja a tartalom szerepét. Az iskolai matematikai szöveges feladatok fő problémája, hogy felfüggesztik a valóságot, és figyelmen kívül hagyják a józan észt, amikor átlépnek a szöveges feladatok műfajába. *Boaler* (1994) szerint ez a nehézség leküzdhető akkor, ha az oktatási módszerekben áttérünk a folyamat alapú tanulási környezetre. A folyamat alapú tanulási környezet, ahol minden diák nyitott problémák megoldásán dolgozik, és bátorítást kap a matematika tanulmányozására és felfedezésére, csökkenti a nemek közötti különbségeket a matematikai teljesítményekben. (lásd még *Boaler*, 2009).

Az osztálytermi szöveges matematikai feladatoknak lehet egy másik olyan oldala, amely akadályozza a tanulók fejlődését. A törtek tanulása során *Mack* (1990) azt tapasztalta, hogy a feladatok sorrendje nem felel meg annak, ahogyan a diákok előtanulmányai segítenék a törtek megértését. Konkrétan, a 6. osztályos tanulónak bőséges előzetes tapasztalata van a törtekkel kapcsolatban, és gyakran használja a részekre osztást (vagyis mennyiségek részekre való felosztását), ezért viszonylag könynyen megérti az olyan törteket, amikor a számláló nagyobb, mint a nevező. Az ilyen törteket tartalmazó feladatok azonban a tankönyvek törtekkel foglalkozó fejezeteinek a legvégén szerepelnek.

Hasonló problémát fedezett fel *Lampert* (1986) a szorzással kapcsolatban. Rámutatott, hogy a diákok gondolkodásában a szorzás bonyolultabb, mint az ismételt összeadás. Ha az oktatás során az egyén szorzásra vonatkozó mentális modelljét összeadási műveletekre korlátozzuk, a tanuló később nem lesz képes megérteni a folyamatos mennyiségekkel végzett szorzást. *Lampert* és *Mack* kutatási eredményei szépen alátámasztják a matematikaoktatás legújabb, általánosabb elveit, mint pl. az RME matematizálási koncepcióját. Ugyanezt támasztja alá *Schoenfeld* (1988) eretnek nézete a jól megtanított leckék veszélyéről: a matematika felépítésében a gondosan végrehajtott lépések sorrendje azt az üzenetet közvetíti a tanulóknak, hogy a (matematikai) pontosság az, ami számít, és nem magának a matematikának a gyakorlása. Az utcai gyermekárusok körében végzett kutatás dokumentálta, hogy a diákok tapasztalatai milyen váratlan eredményeket produkálhatnak a szöveges matematikai feladatok megoldásában (*Carraher*, *Carraher* és *Schliemann*, 1985; *Saxe*, 1988). Bár matematikai szempontból a nagyobb természetes számokat nehezebb összeadni és kivonni, az inflálódó brazil valutával tapasztalatot szerzett gyerekek jobbak voltak a valódi árakkal összemérhető árak összeadásában, annak ellenére, hogy ezek a számok viszonylag nagyobbak voltak.

Az osztálytermi szöveges feladatokat számos vizsgálatban olyan jellemzők alapján kategorizálták, amelyek egyszerre matematikai és kognitív természetűek. Ami az additív struktúrákat illeti, az alábbi egyszerű szöveges feladatokat azonosították: feladatok összekapcsolása, összehasonlítása, változtatása és kiegyenlítése (lásd *Radatz*, 1983; *Riley* és *Greeno*, 1998; *Jitendra*, *Griffin*, *Deatline-Buchman* és *Sczesniak*, 2007; *Morales*, *Shute* és *Pellegrino*, 1985).

A feladat tartalmától függetlenül a tanulók törekszenek a szöveges feladatok kategorizálására és a szöveges feladatok megoldhatóságába vetett meggyőződésük által vezérelve különböző stratégiákat dolgoznak ki a különböző feladatok megoldására. A feladatok kategorizálására irányuló tendencia önmagában nem jelent problémát, mivel a felszínesen eltérőnek látszó feladatok közös struktúrájának felismerése fontos jellemzője az adott területen fennálló valódi szakértelemnek (lásd pl. *Sternberg* és *Frensch*, 1992). És bár egy feladat megoldásához általában elegendő a számolási művelet és az ahhoz a művelethez illesztendő adatok megtalálása, ez zsákutcába viheti a tanulók matematikai fejlődését. *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) elemzi a szöveges feladatmegoldásnak ezt az úgynevezett felületes sémáját, és összehasonlítja a valódi matematikai modellezési sémával. A döntő kérdés az, hogy a tanuló a feladat mélyreható megértése alapján létrehoz-e egy megfelelő modellt a szituációról, vagy kihagyja a szituációs modell létrehozásának lépcsőjét, és közvetlenül a megfelelőnek ítélt matematikai modellre ugrik – a feladat felületes jellemzői alapján. A szöveges feladatmegoldásokban rejlő zsákutcákat *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) munkája dokumentálja. Egy magyarországi kutatás további bizonyítékokkal szolgál a felületes szövegesfeladat-megoldási stratégiákról és azok erősségéről (*Csíkos*, 2003).

A szöveges feladatok osztálytermi alkalmazásának egy fontos aspektusa a tanárok meggyőződése és magatartása a realisztikus szöveges feladatokkal kapcsolatban. „Úgy tűnik, hogy a tanárok meggyőződése szerint a realisztikus összefüggésen alapuló megfontolásokat *nem* kellene ösztönözni, sőt inkább vissza kellene szorítani az általános iskolai matematikában" (*Gravemeijer*, 1997, 391. o. – dőlt betű az eredeti szövegben). *Verschaffel*, *De Corte* és *Borghart* (1997) empirikusan igazolták a tanárjelöltek azon beállítódását, hogy nem realisztikus válaszokat adnak egyszerű aritmetikai szöveges feladatokra, valamint hogy hajlamosak jobb osztályzatot adni a tanulóknak a szöveges feladatok nem realisztikus interpretálásáért és megoldásáért.

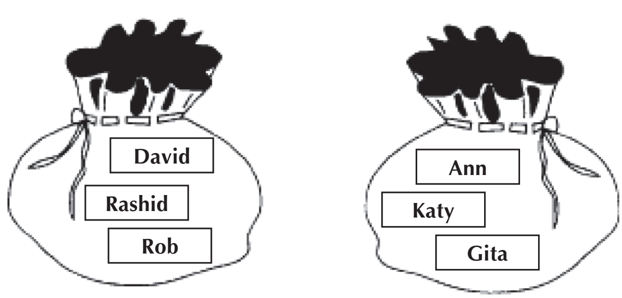
Szocio-matematikai normák, kontextuális és tartalmi hatások

A „szocio-matematikai normák" fogalmát *Yackel* és *Cobb* (1996) vezették be. Ezek a normák, amelyek (a tágabb értelemben vett szociális normákkal ellentétben) a matematika tantervi területeire korlátozódnak, az egyéni és csoportos matematikai tevékenységekből (osztálytermi gyakorlatok) erednek. A matematikai közösséget képviselő tanítóknak (*Yackel* és *Cobb* második osztályosok körében végezték kísérleteiket) döntő szerepük van a matematikai normák kialakításában, azok megtanításában és megtanulásában: milyen egy megfelelő matematikai feladat, mi a matematikai feladatra adandó helyes válasz, és hogy melyek a magyarázat és érvelés elfogadható formái, stb. Ezek a normák osztályonként változhatnak, de „szocio-matematikai normák az oktatási hagyományoktól függetlenül minden osztályban kialakulnak" (462. o.).

A szocio-matematikai normák egyik fontos aspektusa, hogy az adott osztályban kialakult normák szerint az elfogadható matematikai magyarázatok matematikai vagy státus alapúak. Sok gyerek hajlamos azt feltételezni, hogy a válasza helytelen, ha a tanár megkérdőjelezi azt. Ez a norma könnyen merev és hamis meggyőződésekhez vezethet a matematikai feladatmegoldás és érvelés természetével kapcsolatban. Bár a gyerekek matematikai meggyőződéseinek elemzése kívül esik e fejezet témakörén, jórészt ezek a matematikai meggyőződések magyarázzák a matematikai tudásuk különböző kontextusokban való alkalmazásának nehézségeit (pl. az utcai, ill. az iskolai matematikában, lásd *Carraher* és mtsai, 1985). Számos tanulmányban megjelenik az a szilárd meggyőződés, hogy egy matematikafeladatnak mindig (csak) egy helyes megoldása van, és (csak) egy helyes út vezet el a megoldáshoz (lásd pl. *Reusser* és *Stebler*, 1997; *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000; *Wyndhamn* és *Säljö*, 1997).

A szocio-matematikai normák kialakulása és speciálisan a valóságnak a szöveges feladatmegoldásban játszott szerepe jobban megérthető a szociológia és a nyelvészet tárgykörébe tartozó néhány elmélet fényében. *Cooper* (1994) sikeresen használta fel *Bernstein* iskolai tudáskódjait ahhoz, hogy megkülönböztesse a józan észen alapuló tudást az iskolai tudástól (más néven a mindennapi tudást az ezoterikus tudástól). *Bernstein* érvelése szerint a gyerekeket már iskolai pályafutásuk nagyon korai szakaszában elbátortalanítják attól, hogy a józan ész adta tudásukat összekapcsolják az iskolai tudással. Még ma is találkozhatunk azzal, hogy az iskolai siker bizonyos mértékig attól függ, hogy a tanuló mennyire hajlandó kizárni a józan észen alapuló tudását mint információforrást a matematikai feladat megoldásakor. *Cooper* és *Dunne* (1998) felhasználták *Bernstein* és *Bourdieu* meglátásait is az iskolai (és matematikai) teljesítményben lehetséges társadalmi osztálykülönbségekről. Ezek a különbségek az iskolai szituációkban megkövetelt kulturális erőforrásokhoz való hozzáférés viszonylagos hiányának tulajdoníthatók. A *Bourdieu* által bevezetett hatékony fogalom, a „gyakorlati érzék” *(feel for the game)* felhasználható társadalmi osztálykülönbségek magyarázatára néhány standardizált matematikai tételnél. Az egyik meglepő példa az ún. „tenisz”-feladat *(2.2. ábra)*.

David és Gita csoportja vegyespáros teniszversenyt rendez. Egy fiút egy lánnyal kell párosítani. Az egyik táskába beteszik a három fiúnevet, a másikba a három lánynevet.



Add meg a fiúk és lányok párosításának összes lehetséges változatát!
***Írd le a párok neveit**. Egy párt előre megadunk.*
Rob és Katy

2.2. ábra. A „tenisz”-feladat (Cooper és *Dunne, 1998, 132. o.)*

A tanulók teljesítményének részletes elemzése és az interjúátiratok megmutatják, hogy a „gyakorlati érzék" jelenség hogyan magyarázza a társadalmi osztálykülönbségeket. Az ezoterikus matematikai érvelésnél világos, hogy a gyerekek neve és nemzetisége nem releváns adat a feladat szempontjából. Ezek a gyerekek azonban három „realisztikus" párt alkottak abban az értelemben, hogy a három pár különböző volt; mindegyik nevet csak egyszer használták. *Cooper* és *Dunne* szerint az ilyen típusú feladat felveti az egyenlőség problémáját, vagyis az oktatásban az egyenlő lehetőségek kérdését. Szintén *Boaler* (2009) elemezte és kritizálta azt, hogy a matematikai szöveges feladatok általánosságban hogyan okoznak egyenlőtlenségeket (nem, társadalmi osztály stb. szempontjából).

Más empirikus eredmények rámutatnak, hogy 3. osztályban a történetet elbeszélő szöveges feladatok (vagyis ahol a számok és viszonyaik egy elbeszélő történetbe vannak beágyazva) kihívást jelentenek a tanulók számára (*Jitendra*, *Griffin*, *Deatline-Buchman* és *Sczesniak*, 2007). Mindazonáltal 3. osztályban a szövegesfeladat-megoldás jól jellemzi az általános matematikai jártasságot (*Jitendra*, *Sczesniak* és *Deatline-Buchman*, 2005).

A kultúrának a matematikai teljesítményben játszott szerepe a nyelvi kompetenciát is magába foglalja. A szöveges matematikai feladatok megértéséhez az egyénnek képesnek kell lennie szemantikailag elemezni a feladat nyelvi elemeit, valamint megnevezni a fontos és felesleges részeket. *Elbers* és *de Haan* (2005) multikulturális osztályokat tanulmányozott, hiszen ezekben különösen fontosak a szöveges matematikafeladatok nyelvi elemei. Azt találták, hogy a szövegértés nyelvi problémáinak megoldásához nem elegendő a szó köznapi jelentésére való utalás, a beszélgetések (és a tanulók segítségkérő magatartása) inkább a fogalmak speciális, matematikai kontextusú jelentésére irányultak. A szöveges feladatok műfajának és kontextusának megértése elsőbbséget élvez a szövegek tisztán szemantikai megértésével szemben, ezt *Morales*, *Shute* és *Pellegrino* (1985) is alátámasztották, akiknek vizsgálata szerint nem bizonyítható a nyelvi hatás sem a megoldás pontosságára, sem a szöveges matematikafeladatok kategorizálására – kutatásukban mexikói-amerikaiak szerepeltek. Mindazonáltal jól dokumentált adatok bizonyítják, hogy a szöveges feladat nyelvi jellemzői bizonyos mértékig befolyásolják a megoldási folyamatot (pl. az 'ezekből' fogalom befolyásolhatja a megfelelő mentális reprezentáció kialakulását, lásd *Kintsch,* 1985).

Két hatékony stratégia létezik a tanulók mentális reprezentációja és az elérendő tanulási célok összekapcsolásának elősegítésére: a szöveges feladat átfogalmazása, ill. személyre szabása. *Davis-Dorsey*, *Ross* és *Morrison* (1991) vizsgálata feltárta, hogy az 5. osztályos tanulók többet profitáltak a feladat személyre szabásából (vagyis a tanulóra vonatkozó személyes információk beépítéséből), míg a második osztályosok számára hasznos volt mind a személyre szabás, mind a tartalom átfogalmazása (vagyis a szöveg explicitebbé tétele, ami segítette a tartalom matematikai fogalmakra való lefordítását). Ebben a kísérletben a matematikailag azonosnak tekinthető szöveges feladatok szöveges és tartalmi jellemzőik tekintetében voltak eltérőek.

A tantermi környezet javításának egy másik – még radikálisabb – módja a reciprok tanítási technika alkalmazása a matematikában. *Magdalene Lampert* (1990) az olvasástanításból vette át a reciprok tanításnak nevezett módszert (lásd még van *Garderen*, 2004). E módszer lényege, hogy az osztályteremben szándékosan felcserélik a tanári és tanulói szerepeket és feladatokat. Megjegyzi, hogy ez a változtatás egyúttal megkívánja a matematikaórákat meghatározó feladatok megváltoztatását is. A matematikai tudás alkalmazása különféle kontextusainak meghatározásában *Light* és *Butterworth* (1992) munkáit követjük, akik viszonylag tág megfogalmazással éltek; egy feladat kontextusa a feladathoz kapcsolódó információ különböző rétegeiből tevődik össze: fizikai, szociális és kulturális jellemzőkből. Az azonos matematikai struktúrával és azonos tartalommal bíró matematikai feladatok a kontextus változásától függően különböző módon oldhatók meg. Ahogy azonban *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) rávilágít, a kontextus megváltoztatása a szöveges feladatok egy speciális osztálya esetében csupán kismértékű változást eredményezhet a tanulók teljesítményében. Ezek a kontextus-változások figyelmeztető üzenetekben jelentek meg a papír-ceruza teszteknél, vagy a feladatokat rejtvény jellegű feladatokat tartalmazó tesztekbe építették be. Ezek az apró változtatások azt sugallják, hogy a papír-ceruzás módszernél maradáshoz képest radikálisabb változtatásoknak nagyobb hatása lehet a tanulók megoldási mintáira.

A feladat tartalma meghatározható úgy, hogy a kontextus definícióját vesszük kiindulópontnak. Továbbá felhasználható *Kintsch* és *Greeno* (1985) alapján a ‘főnévi fogalom’ (noun term) kifejezés is. A matematikai oktatási közösségben van egy széles körben elfogadott (vagy legalábbis használt) feltevés: a szöveges feladatoknak be kell tölteniük azt a szerepet, hogy a számtani készségek gyakorlásának terepévé váljanak. E hagyománynak megfelelően a feladat tartalmának módosítása nem feltétlenül befolyásolja a tanuló teljesítményét; sőt a tanulóktól elvárt, hogy transzfer képességekre tegyenek szert, amelyekkel egyformán jól meg tudják oldani a matematika feladatokat, függetlenül a feladat aktuális tartalmi elemeitől. Nem számíthat az, hogy egy feladat főnévi fogalma a futball, vagy a divat mikrovilágából származik, vagy hogy néhány felületes változtatást hajtunk végre a megadott feltételek és/vagy a kérdés megfogalmazásában, illetve felvetésében.

A matematikai műveltséget mérő feladatok egy lehetséges nevezéktana

Ebben a részben javaslatot teszünk a matematikai feladatok kategorizálására. Számos aspektus van, amely kiindulópontja lehet a különböző kategorizálásoknak. A nemzetközi rendszerszintű felmérésekben (lásd pl. OECD, 1999) általában van egy többdimenziós modell, amelyben a feladatokat matematikai tartalmuk, az elvárt gondolkodási folyamat és a feladat formátuma alapján osztályozzák. A PISA vizsgálatokban (lásd OECD, 2003) a feladatok kontextusa új dimenzióként jelent meg. A kontextusdimenzió és e skálának a négy értéke az oktatáspolitika azon szándékának kifejezéseként értendő, amely nagy figyelmet akar szentelni a matematika alkalmazási oldalának, és a matematikai műveltség értékelésében tartalmi területek széles körét akarja lefedni.

Ha két vagy három dimenziót (pl. matematikai tartalom, kontextus és kompetencia klaszter a 2003-as PISA felmérésben) és ezeknek a konkrét értékeit akarjuk felhasználni, modellként egy téglalapot vagy téglatestet használhatunk, amelyekben cellák reprezentálják a különböző feladattípusokat. A következőkben bemutatjuk a matematikai tudás ‘alkalmazási’ dimenziójának általunk javasolt kategóriarendszerét. Ennek a kategorizálásnak az előzményei részben a PISA tanulmány kontextuális dimenziójában találhatók, de főként az RME mozgalom horizontális matematizálási elgondolásaira épül.

Kihívások és nehézségek az alkalmazási feladatok kategóriarendszerének kialakításában

E kategorizálás logikája és alapja összhangban van Eriksonnak (2008) az aritmetikai gondolkodás fejlődési szakaszairól vallott elképzelésével. A különböző fejlődési szakaszokhoz megfelelő viselkedési minták és mentális struktúrák társíthatók. A mentális struktúrák lehetséges hierarchiájából kiindulva ezek párosíthatók a megfelelő értékelési kontextusokban megfigyelhető viselkedési mintákkal. Ebben az értelemben a különböző viselkedési mintát igénylő, egyértelműen a különböző feladatkategóriákhoz tartozó feladatok lehetővé teszik a tesztmegoldók megfelelő mentális struktúrájának a feltárását. A matematikatudás alkalmazási dimenziójával kapcsolatban azonban problémák merülnek fel a mentális folyamatok és a megfigyelhető viselkedés összeillesztésekor. Az egyik ékes példát *Cooper* (1994) szolgáltatta. Az ún. *„lift"-feladat (2.3. ábra)* gyakran idézett példa annak illusztrálására, hogy egy nyitott kérdés különböző lehetséges megoldásai hogyan elemezhetők attól függően, hogy a feladatot realisztikus vagy rutin feladatként értelmezzük.

Egy irodaépület liftjében ez a felirat olvasható:

Ez a lift max. **14 embert szállíthat**

A reggeli csúcsforgalomban 269 ember akar felmenni a lifttel.
Hányszor kell a liftnek felmennie?

2.3. ábra. A „lift"-feladat

Cooper (1994) elemzése világosan mutatja, hogy az elvárt helyes válasz (azaz 269:14, fölfelé kerekítve a legközelebbi egész számhoz) nagyon eltérő értelmezési és megoldási stratégiák eredményeként jöhet létre. Az egyik lehetséges értelmezés, hogy a feladat egy valós problémát jelent, amit meg kell oldani, de figyelembe véve a feladatmegoldási körülményeket a tanulók nem hozhatnak létre új változókat és nem kérdőjelezhetik meg a feladatban implicite benne foglalt alapelveket. A másik lehetséges értelmezés, hogy a feladat egy rutin iskolai matematikaproblémát fogalmaz meg, de van benne egy csapda. Ebben az esetben a tanuló nem oszthatja el a 269-t 14-gyel, mert csapdába esik. Azonban, ahogy *Cooper* is sugallja, az első fajta megoldás több olyan feltételezést kíván, ami szinte soha nem igaz, például, hogy a lift mindig teljesen tele van, kivéve az utolsó alkalmat. Aki azonban feltételezi, hogy a 14 személy szállítására alkalmas lift átlagosan 10 embert szállít, rossz választ fog adni, hacsak rá nem jön arra, hogy a feladatban nem lehet új változókat létrehozni, hanem fel kell ismerni a szándékot, és azokat a szabályokat alkalmazni, amelyeket az ilyen feladatok megkívánnak.

A szakirodalom tartalmaz néhány ajánlást a realisztikus (és nem realisztikus) szöveges matematikafeladatok osztályozására. Az egyik releváns szempont, hogy a feladat osztályozásának van-e mentális reprezentációs és oktatási fókusza, ill. hogy van-e rendszerszintű értékelési célja. Az első szempont a *Galbraith-* és *Stillman-* (2001) féle taxonómia jellemzője. *Verschaffel* (2006) szerint ez az osztályozás a tanuló gondolkodási folyamatára összpontosít, amelynek fel kell tárnia a szöveges feladat és a valós világ közötti kapcsolatot. Ebben a rendszertanban négyféle szövegesfeladat-kategória létezik:

(1) értelmetlen feladatok, amelyekben súlyosan megsértik a reális korlátokat;
(2) kontextusból kiemelt feladatok, ahol a kontextus nem játszik valódi szerepet a megoldásban, és amelyek lecsupaszíthatók a tisztán matematika kérdésfeltevésére;
(3) standard alkalmazási feladatok, ahol a szükséges matematika kontextusba van ágyazva, és a szituáció valóságos, de ahol az eljárás is (még) meglehetősen standard;
(4) valódi modellezési feladatok, ahol a probléma megfogalmazásában a matematika mint olyan nem jelenik meg, és ahol a probléma matematikai fogalmakkal való lehatárolását és megfogalmazását (legalább részben) a modellezőnek kell elvégeznie.

Ez a taxonómia a tanulók gondolkodási (és modellezési) folyamataira összpontosít, vagyis arra, hogyan teremtenek kapcsolatot mentális reprezentációjuk és a valódi világ tárgyai között.

Egy másik kategorizálás, amely ugyancsak a fejezet további részében ismertetett kategóriák fontos előfutárának tekinthető, *Palm* (2008, 2009) nevéhez fűződik. *Palm* a szöveges feladatoknak azokra a jellemzőire összpontosít, amelyek az iskolán kívüli szituációkat fejezik ki. Megkísérli leírni, hogy milyen jellemzőkkel kell rendelkeznie az ún. autentikus feladatnak. A fő gondolat a ‘szimulációs’ elemekre való hivatkozás, vagyis a szöveges feladatok és az iskolán kívüli, valóságos helyzetek közötti párhuzam minősége: átfogó jelleg, hűség és reprezentativitás. Ezek a fogalmak *Fitzpatrick* és *Morrison* (1971) írásából származnak, akiknek munkája rendszerszintű értékelési célból készült.

Palmnak az autentikus feladatok kategorizálására vonatkozó megközelítését a finn és svéd nemzeti értékelési feladatok elemzése is alátámasztotta. Bár ezek a feladatok felső középiskolás diákok számára készültek, bizonyos tanulságok levonhatók az alsóbb osztályok számára is. Kimutatták, hogy a nemzeti értékelésben szereplő szöveges feladatok 50%-ában olyan esemény szerepelt, amely előfordulhat iskolán kívüli összefüggésben, és olyan kérdést tartalmazott, amely az adott esetben ‘reálisan’ feltehető. Ez a két külső feladatjellemző határozottan arra utal, hogy a szöveges feladat autentikus megalkotására tett kísérletünk és az autentikusság – ahogy más taxonómiák is megfogalmazzák – a diákok valós matematikai modellezési folyamataihoz kapcsolódik.

A szöveges feladatok taxonómiájának felállítására tett kísérletünk az alkalmazott matematikai ismeretek szempontjából szükségképpen figyelembe veszi egyrészt a szöveges feladatok jellemzőit, másrészt a mentális folyamatok jellemzőit, amelyek a szövegesfeladat-megoldási folyamatokban felszínre kerülnek. Négy feladatkategóriára teszünk javaslatot oly módon, hogy együtt egy 2+2-es rendszert formálnak. Két olyan szövegesfeladat-kategória van, amelyeknél nincs szükség a feladatszituációk valódi matematikai modellezésére, és van két kategória (realisztikus és autentikus), amelyek a valódi matematikai modellezésre utalnak. *Galbraith* és *Stillman* (2001) megállapításaival összhangban a valódi modellezési feladatok olyan problémák, amelyekben legalább egy komplex modellezési lépés található, ezért a feladatmegoldó nem tudja közvetlenül megfogalmazni, megérteni, matematikailag reprezentálni, megoldani, interpretálni és megválaszolni a problémát ugyanolyan módon, ahogy azt egy prototípus vagy pszeudo-realisztikus feladat esetén tenné.

Tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó, „szöveg nélküli feladatok"

Berends és *van Lieshout* (2009) szöveges feladatokkal kapcsolatos taxonómiájában, amely nevezéktanban döntő szempont, hogy a feladatok esszenciális, ill. irreveláns részként tartalmaznak-e rajzokat, szerepel a „csupasz feladat" (bare task) kifejezés. Abban a nevezéktanban ez a rajzok szerepeltetésének hiányát jelentette. Jelen esetben „szöveg nélküli feladatnak" nevezzük a tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó feladatokat, amelyekben legföljebb egy formális utasítás szerepel arra vonatkozóan, hogy mit kell csinálni, vagy hogyan kell a feladatot megoldani (pl., „10 + 26 = ?"). Ez a kategória elegendő és szükséges kiindulópont annak meghatározásához, hogy mely feladatok azok, amelyeknek kevés közük van a matematika alkalmazásához. A tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó feladatok – vagy az „oldd meg az egyenletet" típusú utasítások – általában nem kapcsolódnak a tanulók alkalmazott problémamegoldásához, illetve a matematikai modellezéshez. Vegyük azonban figyelembe, hogy még a szöveg nélküli feladatok is megfelelő eszközök a matematikai modellezés fejlesztésére, amikor a feladatmegoldás fordított módját alkalmazzuk, vagyis amikor a tanulónak megtanítják, hogyan fogalmazza meg a szöveges feladatot a tisztán szimbólumokkal megadott matematikai struktúrából.

Az ilyen típusú feladatok általában részei a mindennapi osztálytermi gyakorlatnak, és a feladatok megoldásának képessége is részét képezi a tantervi céloknak. E szöveg nélküli feladatok és a másik három kategória feladatai közötti lehetséges éles disztinkció felfedezhető a törtek megértésében és megtanulásában (*Mack*, 1990).

Nem akarjuk azt a benyomást kelteni, hogy a szöveg nélküli feladatok önmagukban könnyebbek, mint a kontextusba ágyazott feladatok. Éppen ellenkezőleg, bizonyos esetekben a gyerekek jobban teljesítenek a szöveges feladatok, mint a matematikailag izomorf, csupasz feladatok esetében. Ezt több szerző is hangsúlyozta és dokumentálta (*Carpenter*, *Moser*, és *Bebout*, 1988; *De Corte* és *Verschaffel*, 1981).

Prototípus és pszeudo-realisztikus szöveges feladatok

Ahogy a korábbi részben már tárgyaltuk, az osztálytermi oktatás gyakran használja, ill. támaszkodik az ún. prototípus példákra. Ezek a feladatok csontvázra húzott szöveges feladatok, amelyek egy matematikai művelet, vagy más matematizálási folyamat reprezentánsainak tekinthetők. A prototípus példákat Magyarországon sokszor nevezik „zöld kályha” feladatoknak vagy tanpéldáknak, ahonnan kiindulva analógiák hozhatók létre és fedezhetők fel. A prototípus példákat matematikai szöveges feladatként határozzuk meg, amelyek feladata egy adott matematikai művelet (például szorzás), illetve egy matematikai képlet vagy megoldási séma (pl. a „hármas szabály”) felismerésének és használatának megtanítása. Ezeknél a feladatoknál nagyon gondosan választják meg és állítják össze a tartalmat annak ismerős és prototípusos jellege miatt, de ennek a tartalomnak a realisztikusság szempontból nincs különleges jelentősége vagy szerepe.

Természetesen a prototípus példákból való tanulás hatékony eszköz lehet a tanulók matematikai képességeinek fejlesztésében, de fennáll a potenciális veszélye az ún. racionális hibák elkövetésének (*Ben-Zeev*, 1995) akkor, ha a tanulók a prototípusnak megfelelő mély struktúrák és megoldási folyamatok átvitele helyett a felületes hasonlóságokra támaszkodnak. (Például a gyenge tanulók a szöveges feladatokat inkább tartalmuk és kontextusbeli jellemzőik alapján kategorizálják, pl. ‘életkori különbség feladatok’, ‘zászlószínezési feladatok’ stb., annak ellenére, hogy matematikai szempontból nincs közös jellemzőjük.)

Sok szöveges feladat megértése és megoldása függ a „prototípusosság hallgatólagosan elfogadott értelmezési szabályaitól és a sokféle hipotézistől” (*Greer*, 1997, 297. o.) *Hong* (1995) szerint a jó feladatmegoldó képességű 6. osztályos tanulók már a feladatmegoldás korai szakaszában, vagyis már a feladat első olvasásakor képesek kategorizálni a szöveges feladatokat. *Jonassen* (2003) széles körű áttekintést nyújtott a szöveges feladatok tanulók általi kategorizálásának, (félre)kategorizálásának szakirodalmáról. Ezen tanulmányok lényege, ahogyan az feltételezhető volt, hogy a sikeres feladatmegoldók a szöveges feladatokat (matematikai) strukturális jellemzőik alapján, míg a gyengén teljesítők inkább a felszínes (ill. szituációs) jellemzők alapján kategorizálják (lásd *Jonassen*, 2003; *Verschaffel*, *De Corte* és *Lasure*, 1994). Nem elsősorban a feladat tartalma az, ami az ilyen felületes stratégiákat kiváltja, hanem inkább a tanártól (és az iskolarendszer egyéb szereplőitől) kapott visszajelzések a stratégiák alkalmazásának kielégítő voltáról. Sok tanár négy, illetve öt lépésből álló feladatmegoldó stratégiát tanít, amelyekkel sikeresen megoldhatók a szöveges feladatok (pl. a megfelelő adatok összegyűjtése, a szükséges műveletek megnevezése, a művelet végrehajtása, a megoldás hangsúlyozása). Az ilyen stratégiák tanítása csak akkor üdvözlendő, ha e stratégiák értelmessége, valamint rugalmassága (illetve adaptivitása) fenntartható.

Realisztikus szöveges feladatok

A tanulók realisztikus szövegesfeladat-megoldását a korábbi hagyományos módokhoz képest rugalmasabban és dinamikusabban kell értékelni (*Streefland* és *van den Heuvel-Panhuizen,* 1999).

A „realisztikus” fogalmat a holland RME definíciója szerint használjuk. Egy realisztikus feladat esetében a tanulóktól elvárják (és sok esetben megkövetelik), hogy mentális reprezentációikat és modelljeiket a feladat megértésére és megoldására használják. Felhívjuk a figyelmet, hogy a realisztikus fogalom a mentális képekre vonatkozik, amelyek a feladat megfelelő reprezentációjának eszközei. A mentális képek aktiválása és használata azonban nem szükségképpen jelenti azt, hogy a feladat realisztikus. *Cobb* (1995) értelmezése szerint két kétszámjegyű szám összeadásához a tanulónak nem kell szituációs képeket mozgósítania, noha bizonyára használ képeket az összeadási folyamatban. A realisztikus és pszeudo-realisztikus szöveges feladatok megkülönböztetésében a szituációspecifikus képek fogalma lehet a segítségünkre.

Hogyan különböztessük meg a realisztikus szöveges feladatokat a prototípusos, illetve a pszeudo-realisztikus feladatoktól? Egyetértünk *Hiebert* és mtsai (1996) megállapításával, hogy önmagában egyetlen feladat sem lehet rutin jellegű vagy problematikus. Egy feladat annyira válik problematikussá, amilyen mértékben és eszközökkel problematikusként kezeljük. Ugyanígy, egy szöveges feladat annyiban válik realisztikussá, amennyiben képessé teszi a tanulókat a valódi világban szerzett tapasztalataikon alapuló mentális képeiknek az alkalmazására. *Inoue* (2008) azt ajánlja, hogy segítsük a tanulókat, hogy problémamegoldásban képesek legyenek helyesen felhasználni mindennapi tapasztalataikat. Ez megtehető úgy, hogy kevesebb szöveges korlátot építünk be, hogy a tanulónak gazdagabb lehetőséget biztosítsunk a feladat képzeletbeli felépítésére. Ez összhangban van *Reusser* (1988) megfigyelésével, aki a különböző szöveges és kontextuális megfogalmazásokat túlságosan segítőnek találta a problémamegoldási folyamatra való felkészülésben. Például, a tanulók túl sokszor hiszik azt, hogy a helyes úton járnak, ha a megoldási folyamat simán megtörténik (pl. az osztás maradék nélkül elvégezhető).

A realisztikus szöveges feladatok általában relatíve hosszabb szövegűek, mint a prototípus vagy pszeudo-realisztikus feladatok. Ezt *Larsen* és *Zandieh* (2008) is igazolta algebrai feladatok esetében, ahol szükségesnek találták a szituáció szöveges magyarázatát – amikor a tétel egy realisztikus kontextusba van helyezve. Azonban a feladat szövegének hossza önmagában nem kritérium.

Egy szöveges feladat realisztikusságának általános kritériuma az alábbi kritériumokat tartalmazza: a feladat egy adott korcsoportban, a tanulók többségénél a megoldás horizontális matematizálási és valós modellezési elemeket tartalmazó mentális folyamatokat igényel, amelyek túllépnek a korábban megtanított és jól elsajátított műveletek, megoldási sémák és módszerek puszta alkalmazásán. A realisztikus szöveges feladatok lehetővé teszik, hogy a feladatszituációra különböző mentális modelleket építsenek fel. Ezek a modellek a mentális számsoroktól a négyzet vázlatos felrajzolásáig terjedhetnek.

Illusztráljuk ennek a kritériumnak a működését egy *Gravemeijer* (1997) által összeállított feladattal:

Marco megkéri édesanyját, hogy barátja, Pim maradhasson vacsorára. A mama beleegyezik, de ez azt jelenti, hogy egy sajtburgerrel kevesebb van. Öt sajtburger van, de Pimmel együtt most már hatan vannak. Hogyan osztanál el öt sajtburgert hat ember között?

Gravemeijer megjegyzi, hogy a hétköznapi életben ennek a helyzetnek több praktikus megoldása lehet: például Marco megosztja sajtburgerét a barátjával, a papa és a mama osztozik egy sajtburgeren, vagy valaki elmegy venni még egy sajtburgert. Természetesen a matematikaórán, ahol az elmúlt évtizedekben született valamennyi elmélet alkalmazási terepre talál (a bourdieu-i „gyakorlati érzék”, szocio-matematikai normák, matematikai meggyőződések, a bernsteini oktatási kódok), aligha javasolná bárki a fenti három, renegát megoldást, kivéve azokat, akik nem érzik magukat eléggé kompetensnek az osztás jellegű feladatokban. Feltételezhetjük, hogy több első és második osztályos gyerek fog renegát, kontextuális választ adni, mint az idősebbek. Felsőbb szinten remélhetőleg a 7. és 8. osztályos tanulók többsége képes elosztani az 5-öt 6-tal a fenti feladatban, anélkül, hogy szituációtól függő képzeteket kellene mozgósítaniuk. Ezért ez a „sajtburger-feladat” realisztikus feladat lehet a 3-6. osztályosok számára, elvárva tőlük, hogy aktivizálják a helyzettel kapcsolatos képzeletüket, és megtalálják a megoldás megfelelő matematikai modelljét. Az idősebb gyerekeknél a feladat prototípusos szöveges feladatnak tűnhet, mivel ők képesek az 5-öt elosztani 6-tal, függetlenül attól, hogy a problémafelvetésben milyen konkrét tárgyak szerepelnek.

Az irodalomban hasznos gondolatokat találunk arra vonatkozólag, hogy egy szöveges feladat hogyan válhat realisztikussá. *Boaler* (1994) szerint a tanulók sokszor nem látják az összefüggést a különböző kontextusokban bemutatott matematikai szituációk között, és ennek az oka a matematikaórán használt (pszeudo-realisztikus) kontextus. Javasolja a szöveges feladatok gondos megválasztását és megfogalmazását, hogy a tantermi tudás transzferálható legyen a mindennapi életre. A valós életből vett helyzeteknek a szöveges problémákba való puszta átmásolása nem elfogadható. Az alábbi példa segítséget nyújthat annak tisztázására, hogy milyen lehet az a szöveges feladat, amely megkönnyíti a tanulók számára a mindennapi életben szerzett tapasztalataikból nyert ismeretek átvitelét.

De Lange (1993, 151. o.) egy Illinois állambeli tesztből idézett egy példát:

Kathy 40 c[1]*-ért vásárolt gesztenyét. June 8 uncia*[2] *gesztenyét vett. Melyik lány vett több gesztenyét?*

a) June

b) Mindketten egyforma mennyiséget vettek

c) Kathy kétszer annyit vett

d) Kathy egy unciával többet vett

e) Nem lehet megmondani

De Lange szerint ez egy csodálatra méltó kezdeményezés, mivel a probléma megoldásához a tanulónak egy megfelelő mentális szituációs modellt kell készítenie, míg az olyan általános stratégiák alkalmazására irányuló minden kísérlet, mint az „adatkeresés, a megfelelő művelet ki-

1 c = cent, azaz 40 cent = 0.4 USD.

2 8 uncia az fél font, vagyis kb. 22,7 dkg

választása, számítás elvégzése" kudarcra van ítélve. Ebben az esetben az elvárt helyes válasz az, hogy „nem lehet megmondani", hiszen a számszerű adatokból nem következik közvetlen számszerű válasz. *De Lange* azonban a feladat továbbfejlesztését ajánlja oly módon, hogy akár minden opció igaz lehessen, és a tanulónak kelljen meghatároznia a feladat azon feltételeit, amelyek esetén az opciók valóban igazak. Mindezekből az is következik, hogy a feladat formátumának megváltoztatása is realisztikussá tudja tenni a feladatkitűzést: sokszor a feladat nyitottsága tesz egy szöveges feladatot realisztikussá.

Treffers (1993) példaként újságból vett szemelvényeken mutatta be, hogy a gyerekek hogyan próbálják elfogulatlanul megoldani a szöveges matematikafeladatokat. Negyedik osztályos gyerekek kapták meg azt a szöveget, hogy „átlagosan heti 220 órát dolgozom", a kérdés az volt, hogy lehetséges-e heti 220 órát dolgozni. A gyerekek nem matematizálták rögtön a problémát, és különböző típusú válaszokat adtak. A realisztikus matematikafeladatok egyik fontos jellemzője, hogy nyitott kérdésfeltevéssel ösztönzi a sokféleséget.

A korábbi előfeltevésekkel ellentétben, *Inoue* (2008) arra figyelmeztet, hogy az ismerős, barátságos problémahelyzetek alkalmazásából csak korlátozottan származnak előnyök. Továbbá a feladatkontextus ismerős volta összefüggésben van a matematikai tartalommal és a gondolkodási folyamat elvárt szintjével (*Sáenz*, 2009). Nyílt végű kérdések például gyakrabban kapcsolódnak a magasabb szintű gondolkodási képességekhez. Így a matematikai értékelési keretek három dimenziója (diszciplináris tartalom, alkalmazott matematikatudás, matematikai gondolkodási képességek) szorosan összekapcsolódnak, lehetővé téve, hogy az alkalmazási dimenziót relatíve különálló, de más értékelési dimenziók kategóriáiba beágyazott értékelési dimenzióként kezeljük.

Autentikus szöveges feladatok

A szöveges feladatok negyedik típusát autentikus feladatoknak nevezzük. Bár világosan kell látnunk, hogy a realisztikus és autentikus fogalmak nagyon közel állnak egymáshoz, a realisztikus szöveges feladatok egy adott részhalmazának jellemzésére indokoltnak tűnik az „autentikus" jelző használata. A szöveges matematikai feladatokkal foglalkozó szakirodalom különböző összefüggésekben használja az ‘autentikus’ kifejezést. *Palm* definícióját elfogadva, az autentikusságnak több fokozata van, és kifejezi az iskolai feladatok és a mindennapi életből vett helyzetek közötti kapcsolatot. Ha „egy iskolai feladat … jól mintázza a valós életet” (*Palm*, 2008, 40. o.), azt a feladatot autentikusnak nevezhetjük. *Kramarski*, *Mevarech* és *Arami* (2002) ugyanakkor a feladatmegoldás szemszögéből közelítették az autentikusság problémáját. Ők azt a matematikafeladatot nevezik autentikusnak, amelynek a megoldási módja előre nem ismert, vagy nincsenek kész algoritmusok. A fogalom harmadik definícióját *Garcia*, *Sanchez* és *Escudero* (2007) adják, akik autentikus tevékenységről beszélnek, azaz a feladatnak a valóságos szituációhoz való viszonyításáról.

Önmagában egyetlen feladat sem tekinthető sem autentikusnak, sem nem-autentikusnak (hasonlóan a realisztikus, ill. nem-realisztikus ellentétpárnál is hiányzó distinkcióhoz), ezért ha az a célunk, hogy egy értékeléshez hasznos kategóriákat adjunk, a fent említett három definíció nem egyformán használható. Ami az első definíciót illeti, a mindennapi életből vett helyzet követése az autentikusság szempontjából két dologra utalhat. Először is, a követés mértéke függhet a szöveges kidolgozástól, ill. a feladat megfelelő kontextusának megteremtésétől (pl. a szituáció eljátszása). Másodszor, a tanulók között jelentős különbségek lehetnek a tekintetben, hogy az adott szituáció mennyire ismerős (tehát valós életből vett) a számukra. A második definíció még nyilvánvalóbbá teszi az egyéni különbségeket (Kinek számára nem ismert a megoldás módszere?). A harmadik megközelítés közelebb áll a horizontális matematizálás fogalmához, amelyet a holland realisztikus mozgalom kapcsán tárgyaltunk. Összességében, pedagógiai értékelési szempontból *Palm* definíciójának alkalmazását javasoljuk, hangsúlyozva az átfogó szöveges megfogalmazás szükségességét a mindennapi életből vett szituációk „emulálása” (utánzása) érdekében.

Pedagógiai értékelési szempontból az autentikus feladatok jellemzői és követelményei két szempont mentén foglalhatók össze. Először is az autentikusságnak általában meg kell követelnie az eltávolodást a hagyományos, egyéni papír-ceruzás módszertől az autentikusabb beállítódás felé, ami jelentheti például a különböző információforrásokra épülő feladatok csoportmunkában történő megoldását. Másodszor, a hagyományos papír-ceruza formátumú autentikus feladatok hosszabb szövegűek, mivel az átláthatatlan problématerületek leírása hosszabb mondatokat eredményez. Ezek a hosszabb mondatok segítenek a hiányzó információ megszerzésében, de felesleges részleteket is tartalmaznak, ezáltal is utánozva a valós életet. Emellett sok autentikus feladat tartalmaz fotókat, táblázatokat, grafikonokat, rajzokat stb. Sőt, az autenticitás egyfajta feladatmegoldó magatartásra és tanulói tevékenységre utal.

Érdemes szem előtt tartani, hogy az autentikusság mint a valós élet eseményeit és helyzeteit tükröző, ill. leképező eszköz aligha elérhető (sőt, inkább utópiának tartjuk), mivel az iskolai kontextus és a mindennapi élet kontextusa alapvetően különbözik egymástól (*Depaepe*, *De Corte* és *Verschaffel*, 2009). Az ún. realisztikus és autentikus feladatok nem mindig a matematikatudást és annak a valós élethelyzetekhez való viszonyát mérik, hanem inkább a 'gyakorlati érzék' (feel for the game) hozzáállást, ahogy azt a „Szocio-matematikai normák …" c. részben elemeztük. Bár a 'gyakorlati érzék' hozzáállás értékes kifejezője lehet az egyéni teljesítménynek, de mivel teljesen eltérő mentális reprezentációk esetén is megszülethet ugyanaz a (helyes) válasz egy olyan feladatra, amely a matematikatudás mindennapi kontextusban való alkalmazásának mérésére készült, *Cooper* (1994) arra figyelmezteti a politikusokat és a kutatókat, hogy

> *„[a matematikai ismeretek mindennapi kontextusban való értékeléséről szerzett] eddigi angol tapasztalatok azt sugallják, hogy jóval hosszabb időre van szükség ahhoz, hogy a kutatási eredmények és tapasztalatok nagyobb szerepet játsszanak, a tesztek kidolgozásába pedig a politika ne avatkozzon be."* (*Cooper,* 1994. 163. o.)

Hiebert és mtsai (1996, 10. o.) szerint „az, hogy milyen mértékben tekinthető egy feladat problémának, sokkal inkább függ a tanulóktól és az osztálytermi kultúrától, mint magától a feladattól". Egy olyan feladat, amely az egyik osztályban rutin feladatnak számít, problematikus lehet a másikban, és „reflektív vizsgálódást" igényelhet, míg „egy más kulturális közegben még a nagyszabású, mindennapi életből leírt szituációk is megfoszthatók problematikus jellegüktől. *A feladatok önmagukban sem nem problematikusak, sem nem rutin jellegűek"* (10. o. – kiemelés tőlünk).

Összefoglalóan, az alábbi jellemzők általában autentikus feladatokra vonatkoznak:

(1) A mindennapi élet eseményeit leképező részletes (sokszor hosszadalmas) leírások.

(2) A megoldás a szituáció valódi matematikai modellezését igényli.
(3) A megoldási folyamathoz sokszor ún. 'autentikus tevékenységre' van szükség, pl. különböző módszerekkel végzett további adatgyűjtésre (mérés, becslés, a témával kapcsolatos előzetes ismeretek megvitatása).
(4) A diákokat sok esetben biztatják a problémafelvetésre és a kérdezésre mind az adott szöveges feladattal, mind pedig saját mindennapi életből vett tapasztalataikkal kapcsolatban.

Összegzés

Bár a tisztán aritmetikai feladatoknak és a prototipikus szöveges feladatoknak még mindig fontos helyük van az általános iskolai matematikaoktatásban és értékelésben, ezeket az eddigieknél jobban ki kell egészíteni realisztikusabb és autentikusabb típusú feladatokkal. Ez utóbbiak ígéretes eszköznek bizonyultak a szöveges feladatok „alkalmazási funkciójának" megvalósításában, mivel olyan lehetőséget nyújtanak a mindennapi élet mennyiségi szituációihoz, amelyben a matematikát tanulóknak szükségük van arra, amit a matematikaórán tanultak.

Természetüknél fogva a realisztikus és autentikus feladatok nagyobb mértékben nyújtanak olyan tanulási tapasztalatot, amely arra ösztönzi a tanulókat, hogy matematikai ismereteiket más tantárgyi területeken, például a (társadalom)tudományok terén és a mindennapi életben szerzett ismereteikkel együtt használják fel értelmes szituációs és matematikai modellek felépítésére és ésszerű, logikus megoldások elérésére. Ugyanakkor az autentikus és realisztikus feladatok – alapvetően nem rutinjellegű, kihívást jelentő és nyitott, a (heurisztikus) feladatmegoldó stratégiák kidolgozására és a metakognitív készségek fejlesztésére rengeteg lehetőséget kínáló természetüknél fogva – tudástranszfert biztosítanak más tantárgyi és iskolán kívüli területekre, amennyiben megfelelő oktatási módszerekkel használjuk fel őket, értve ezalatt a kontextusfüggetlenséget és az általánosításra törekvést. Ezen túlmenően számos lehetőség rejlik bennük a matematikáról és annak a való világhoz való viszonyáról alkotott helytelen nézet és káros attitűd leépítésére.

Az értékeléssel kapcsolatos egyik fontos, de nehéz kérdés, hogyan tegyük világossá a tanulók számára, hogy mit várunk el tőlük – a realisztikusság és a precizitás tekintetében – egy konkrét értékelési helyzetben. Elvileg a matematikai modell absztrakciós fokának és pontosságának a kérdése azon múlik, hogy szándékaink szerint a tanuló megtanuljon jó döntéseket hozni, és megfelelő hozzáállás alakuljon ki benne a realisztikus matematikai modellezés és az alkalmazott problémamegoldás felé. Egy szokásos matematikaóra keretében, ahol a vita és az együttműködés megengedett, sőt támogatott, a precizitás, a feltevések ésszerűsége mind megbeszélhető (*Verschaffel,* 2002). A realisztikusság és a pontosság tekintetében fennálló bizonytalanságok és nehézségek azonban, véleményünk szerint sokkal komolyabbak, ha a problémák vitát kizáró környezetben kerülnek felvetésre, különösen írásbeli tesztek esetén, ahogy azt a fentiekben, *Cooper* (1994; *Cooper* és *Dunne*, 1998) munkáinak tárgyalásánál láthattuk. Ezért ha a pedagógiai értékelésbe több realisztikus és autentikus problémát szeretnénk bevonni, ahogyan ezt a fentiekben javasoltuk, arra is oda kell figyelnünk, hogyan tegyük – explicite vagy implicite – világossá a tanuló számára az adott értékelési helyzet „játékszabályait”.

Irodalom

Adey, P., Csapó, B., Demetriou, A., Hautamäki, J. és Shayer, M. (2007): Can we intelligent about intelligence? Why education needs the concept of plastic general ability. *Educational Research Review*, **2**. 2. sz. 75–97.

Aiken, L. R. (1970): Attitudes towards mathematics. *Review of Educational Research*, **40**. 4. sz. 551–596.

Barnes, H. (2005): The theory of Realistic Mathematics Education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras*, **61**. 42–57.

Baumert, J., Lüdtke, O., Trautwein, U. és Brunner, M. (2009): Large-scale student assessment studies measure the results of processes of knowledge acquisition: Evidence in support of the distinction between intelligence and student achievement. *Educational Research Review*, **4**. 165–176.

Ben-Zeev, T. (1995): The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: Induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science*, **19**. 341–376.

Berends, I. E. és van Lieshout, E. C. D. M. (2009): The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, **19**. 4. sz. 345–353.

Boaler, J. (1994): When do girls prefer football to fashion? A analysis of female underachievement in relation to ‘realistic’ mathematics context. *British Educational Research Journal*, **20**. 5. sz. 551–564.

Boaler, J. (2009): Can mathematics problems help with the inequities of the world? In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and* *worlds: Modelling verbal descriptions of situations.* Sense Publications, Rotterdam. 131–139.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Julianna és Varga Tamás (1981): Matematika 5–8. In: Szebenyi Péter (szerk.): *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* 2. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Bebout, H. C. (1988): Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**. 4. sz. 345–357.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. és Schliemann, A. D. (1985): Mathematics in streets and schools. *British Journal of Developmental Psychology*, **3**. 21–29.

Clements, D. H. (2008): Linking research and curriculum development. In: English, L. D. (szerk.): *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2nd edition. Routledge, New York. 589–625.

Cobb, J. (1995): Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Learning*, **26**. 4. sz. 362–385.

Cooper, B. (1994): Authentic testing in mathematics? The boundary between everyday and mathematical knowledge in National Curriculum testing in English Schools. *Assessment in Education: Principles, Policy és Practice*, **1**. 2. sz. 143–166.

Cooper, B. és Dunne, M. (1998): *Sociological Review*, **46**. 1. sz. 115–148.

Csapó Benő (2000): A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *Magyar Pedagógia*, **100**. 3. sz. 343–366.

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megoldásának problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 1. sz. 35–55.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. és Morrison, G. R. (1991): The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problem solving. *Journal of Educational Psychology*, **83**. 1. sz. 61–68.

De Corte, E. és Verschaffel, L. (1981): Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, **58**. 6. sz. 765–779.

De Lange, J. (1993): Between end and beginning: Mathematics education for 12–16 year olds: 1987–2002. *Educational Studies in Mathematics*, **25**. 1–2. sz. 137–160.

Depaepe, F., De Corte, E. és Verschaffel, L. (2009): Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education. In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations.* Sense Publications, Rotterdam. 245–264.

Doorman, L. M. és Gravemeijer, K. P. E. (2009): Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, **41**. 1–2. sz. 199–211.

Elbers, E. és de Haan, M. (2005): The construction of word meaning in a multicultural classroom. Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. *European Journal of Psychology of Education*, **20**. 1. sz. 45–59.

Eriksson, G. (2008): Arithmetical thinking in children attending special schools for the intellectually disabled. *Journal of Mathematical Behavior*, **27**. 1. sz. 1–10.

Ernest, P. (1999): Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, **38**.1–3. sz. 67–83.

Fitzpatrick, R. és Morrison, E. J. (1971): Performance and product evaluation. In: Thorndike, R. L. (szerk.): *Educational measurement*, American Council on Education, Washington, DC. (2. kiadás) 237–270.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Galbraith, P. és Stillman, G. (2001): Assumptions and context. Pursuing their role in modelling activity. In: Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K. és Carreira, S. P. (szerk.): *Modelling and mathematics education. ICTMA 9: Applications in science and technology.* Horwood, Chichester, U. K. 300–310.

Garcia, M., Sanchez, V. és Escudero, I. (2007): Learning through reflection in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, **64**. 1. sz. 1–17.

Gravemeijer, K. (1994): Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**. 5. sz. 443–471.

Gravemeijer, K. (1997): Solving word problems: a case of modelling? *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 389–397.

Gravemeijer, K. és Doorman, M. (1999): Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, **39**. 1. sz. 111–129.

Gravemeijer, K. és Terwel, J. (2000): Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, **32**. 6. sz. 777–796.

Greer, B. (1997): Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 293–307.

Guy, R. K. (1981): *Unsolved problems in number theory*. Springer–Verlag: New York – Heidelberg – Berlin.

Henningsen, M. és Stein, M. K. (1997): Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* **28**. 5. sz. 524–549.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. és Wearne, D. (1996): Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, **25**. 4. sz. 12–21.

High Level Group on Science Education (2007): *Science ducation now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. European Commission: Brussels.

Hodgson, T. és Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three-step approach to proof. *Primus*, **6**. 1. sz. 49–57.

Hong, E. (1995): Mental models in word problem-solving: A comparison between American and Korean sixth-grade students. *Applied Cognitive Psychology*, **9**. 123–142.

Inoue, N. (2008): Minimalism as a guiding principle: Linking mathematical learning to everyday knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, **10**. 1. sz. 36–67.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Deatline-Buchman, A. és Sczesniak, E. (2007): Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research*, **100**. 5. sz. 283–302.

Jitendra, A. K., Sczesniak, E. és Deatline-Buchman, A. (2005): An exploratory validation of curriculum-based mathematical word problem-solving tasks as indicators of mathematical proficiency for third graders. *School Psychology Review*, **34**. 3. sz. 358–371.

Jonassen, D. H. (2003): Designing research-based instruction for story problems. *Educational Psychology Review*, **15**. 3. sz. 267–296.

Keijzer, R. és Terwel, J. (2003): Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study of modelling. *Learning and Instruction*, **13**. 3. sz. 285–304.

Kintsch, W. (1985): Learning from text. *Cognition and Instruction*, **3**. 87–108.

Kintsch, W. és Greeno, J. G. (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, **92**. 109–129.

Klein, A. S., Beishuizen, M. és Treffers, A. (1998): The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**. 4. sz. 443–464.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappe (2009): *Rekenonderwijs op de Basisschool. Analyse en Sleutels tot Verbetering*. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R. és Arami, M. (2002): The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, **49**. 225–250.

Kroesbergen, E. H. és van Luit, J. E. H. (2002): Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science*, **30**. 5. sz. 361–378.

Lampert, M. (1986): Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, **3**. 4. sz. 305–342.

Lampert, M. (1990): When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, **27**. 1. sz. 29–63.

Larsen, S. és Zandieh, M. (2008): Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **67**. 3. sz. 205–216.

Lave, J. (1992): Word problems: a microcosm of theories of learning. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition. Ways of learning and knowing* Lawrence Erlbaum Associates, London. 74–92.

Light, P. és Butterworth, G. (1992, szerk.): *Context and cognition. Ways of learning and knowing*. Lawrence Erlbaum Associates, London.

Linchevski, L. és Williams, J. (1999): Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, **39**. 1. sz. 131–147.

Mack, N. K. (1990): Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**. 1. sz. 16–32.

Maddy, P. (2008): How applied mathematics became pure. *The Review of Symbolic Logic*, **1**. 16–41.

Morales, R. V., Shute, V. J. és Pellegrino, J. W. (1985): Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, **2**. 1. sz. 41–57.

Oktatási Minisztérium (2007): *Nemzeti alaptanterv*. Oktatási Minisztérium, Budapest.

OECD (1999): *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD, Paris.

OECD (2003): *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science, and problem solving knowledge and skills.* OECD, Paris.

OECD (2004): *First results from PISA 2003.*. OECD, Paris.

OECD (2006) A*ssessing scientific, reading and mathematics literacy. A framework for PISA 2006*. OECD, Paris.

Palm, T. (2008): Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **67**. 1 sz. 37–58.

Palm, T. (2009): Theory of authentic task situations. In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations.* SensePublishers, Rotterdam. 3–19.

Pollak, H. O. (1969): How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, **2**. 393–404.

Radatz, H. (1983): Untersuchungen zum Lösen einglekeideter Aufgaben. *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik*, **4**. 3. sz. 205–217.

Reusser, K. (1988): Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, **17**. 309–338.

Reusser, K. és Stebler, R. (1997): Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 309–327.

Rickart, C. (1996): Structuralism and mathematical thinking. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): The nature of mathematical thinking: Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ. 285–300.

Riley, M. S. és Greeno, J. G. (1998): Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, **5**. 1. sz. 49–101.

Sáenz, C. (2009): The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA): *Educational Studies in Mathematics*, **71**. 2. sz. 123–143.

Saxe, G. B. (1988): The mathematics of child street vendors. *Child Development*, **59**. 5. sz. 1415–1425.

Säljö, R. (1991a): Culture and learning. *Learning and Instruction*, **1**. 3. sz. 179–185.

Säljö, R. (1991b): Learning and mediation: Fitting reality into a table. *Learning and Instruction*, **1**. 3. sz. 261–272.

Schoenfeld, A. H. (1988): When good teaching leads to bad results: The disasters of “well taught” mathematics courses. *Educational Psychologist*, **23**. 2. sz. 145–166.

Smolarski, D. C. (2002): Teaching mathematics in the seventeenth and twenty-first centuries. *Mathematics Magazine*, **75**. 4. sz. 256–262.

Sriraman, B. és Törner, G. (2008): Political union / mathematics education disunion. Building bridges in European didactic traditions. In: English, L. D. (szerk.): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2. kiadás). Routledge, New York. 656–690.

Stein, M. K., Remillard, J. és Smith, M. S. (2007): How curriculum influences student learning. In: Lester, F. K. (szerk.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Information Age, Charlotte, NC. 319–369.

Sternberg, R. J. és Frensch, P. A. (1992): On being an expert: A cost-benefit analysis. In: Hoffman, R. R. (szerk.): *The psychology of expertise: Cognitive research and Empirical AI*. Springer Verlag, New York. 191–204.

Streefland, L. és van den Heuvel-Panhuizen, M. (1999): Uncertainty, a metaphor for mathematics education? *Journal of Mathematical Behavior*, **17**. 4. sz. 393–397.

Szendrei, J. (2007): When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: research and theory, practice and politics. *ZDM*, **39**. 5. sz. 443–458.

Treffers, A. (1993): Wiscobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **25**. 1–2. sz. 89–108.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996): *Assessment and realistic mathematics education*. CD-β Press, Utrecht.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000): *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht University, Utrecht.

van den Huivel-Panhuizen, M. (2001a): Realistic Mathematics Education as work in progress. In: Lin, F. L. (szerk.): *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan. 1–43.

van den Huivel-Panhuizen, M. (2001b): The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **25**. 2–9.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003): The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, **54**. 1. sz. 9–35.

van Garderen, D. (2004): Reciprocal teaching as a comprehension strategy for understanding mathematical word problems. *Reading és Writing Quarterly*, **20**. 2. sz. 225–229.

van Garderen, D. (2007): Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, **40**. 6. sz. 540–553.

Verschaffel, L. (2002): Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls (Plenary lecture): In: Cockburn, A. és Nardi, E. (szerk.): *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* School of Education and Professional Development, University of East Anglia, UK. Vol. 1. 64–82.

Verschaffel, L., De Corte, E. és Borghart, I. (1997): Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 339–360.

Verschaffel, L., De Corte, E. és Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems*. Swets és Zeitlinger, Lisse.

Wubbels, T., Korthagen, F. és Broekman, H. (1997): Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **32**. 1. sz. 1–28.

Wyndhamn, J. és Säljö, R. (1997): Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 361–382.

Yackel, E. és Cobb, P. (1996): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**. 4. sz. 458–477.

3.

A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai

Szendrei Julianna
Eötvös Loránd Tudományegyetem, TÓK Matematika Tanszék

Szendrei Mária
Szegedi Tudományegyetem, Algebra és Számelmélet Tanszék

A matematikatudomány és a matematikaoktatás történeti jellemzői és kapcsolatai

Ebben a fejezetben a matematikatudomány szemszögéből értelmezzük az iskola kezdő szakaszában tanítható matematika tartalmát és a matematikatudás mérésének kérdéseit. Azt a kérdést, hogy mi a matematika, nagyon nehéz megválaszolni. A matematika sajátos helyzetet foglal el a tudományok és az iskolai tantárgyak családjában is. A kérdés összetettségét mutatja, hogy ez egy ma is kutatott tudományos probléma, amely a filozófia egyik területének, a matematikafilozófiának a tárgya (lásd *Ruzsa* és *Urbán*, 1966, *Rényi*, 1973, *Hersh*, 1997, *Gardner*, 1998). Mielőtt megkíséreljük a kérdés közérthető megválaszolását, kizárunk néhány „tévhitet", illetve széles körben képviselt, mégis félrevezető álláspontot. Először is a matematika nem „számtan", sőt, nem is a „mennyiségek és a tér tudománya", ahogyan azt régen tartották. A matematika tárgya több évszázada ennél sokkal szélesebb.

Tudományterületként gyakran a természettudományok közé sorolják, aminek számos indoka lehet, azonban fejlődését, kutatási módszereit és belső felépítését tekintve is jelentősen különbözik például a biológiától, a fizikától és a kémiától is (*Bagni*, 2010). A matematika nem természettudomány, mert nem a természetben előforduló anyagokat, jelenségeket stb. vizsgálja, továbbá módszereiben is jelentősen különbözik a fizikától, kémiától és biológiától, hiszen az utóbbiakban az ismeretszerzésnek és az ismeretek ellenőrzésének alapvető módszere a megfigyelés és a kísérlet. A matematika a tárgyát és módszereit tekintve is merőben eltér minden más tudománytól. A matematika a többi tudomány által vizsgált, valamint a saját belső fejlődése során adódó struktúrák absztrakt tulajdonságait és összefüggéseit feltáró tudomány, amely az új ismereteket axiomatikus-deduktív szemlélettel, azaz a formális (matematikai) logika szigorú szabályait alkalmazva nyeri. Meg kell jegyezni, hogy egyesek ezt a meghatározást is vitatják. Sőt, vannak, akik kétségbe vonják a matematikai objektumok és tételek emberi agyon kívüli realitását.

Kétségtelen, hogy a matematika az emberi kultúra része. Eredményeit a történelem során minden korban alkalmazták, másrészt számos fontos matematikai elmélet létrejöttét más tudományágakban felmerülő problémák motiválták. Korábban elsősorban a fizika volt nagy hatással a matematika fejlődésére. Manapság az informatika szédületes fejlődése ad lendületet a matematikai kutatásoknak. Tanúi lehetünk annak is, hogy a társadalomtudományokban (közgazdaságtan, szociológia, pszichológia, neveléstudomány) és a biológiában is egyre inkább jelentkezik az igény a komoly elméleti matematikai megalapozásra. A matematika és a többi tudomány közti kapcsolatrendszer azonban sokkal gazdagabb, mint az az eddigiekből esetleg látszik. Számos példa van arra is, hogy a matematika önfejlődése során kialakult elméletek, eredmények hosszú ideig – esetleg évszázadokig – teljesen „haszontalannak" látszottak a matematikán kívül, majd kiderült, hogy a fizikában vagy az informatikában éppen erre volt szükség. Sokan, köztük matematikusok is, rokonságot látnak a matematika és a művészetek között. A matematikusok túlnyomó többsége számára az egyes bizonyításoknak, eredményeknek, elméleteknek esztétikai értéke is van, ami annál magasabb, minél ötletesebb, újszerűbb egy bizonyítás, eredmény vagy elmélet, minél mélyebb gondolatmeneteket tartalmaz. A matematika fejlődése szempontjából ez az esztétikai érték legalább olyan fontos, mint a (pillanatnyi vagy vélt) „hasznosság". Az UNESCO állásfoglalása szerint a matematika – az anyanyelvi műveltség mellett másik tényezőként – minden műveltség alapja.

A matematika iskolai tantárgyként is egyedülálló helyzetben van, és ezt a helyzetet a szépirodalomtól kezdve a mai empirikus pedagógiai vizsgálatokig többen igyekeztek feltárni (*Mérő*, 1992). Történeti aspektusból nézve a társadalmakban (folyami kultúrák) hallatlan gyakorlati jelentősége volt a matematikai számításoknak és a matematikára épülő csillagászati megfigyeléseknek (*van der Waerden*, 1977). Ez a kor volt a matematikatudomány – és más tudományok – kialakulásának kezdete, amikor még (minden más, azóta differenciálódott tudományterülettel együtt) szorosan kötődött a filozófiához.

A matematika oktatása kezdetben egybefonódott a matematika tudományának művelésével. Az írásos emlékek között az egyiptomi Rhind-papirusz azonban kétséget kizáróan már az írnoki társadalmi réteg számára készült, az Anastasi I papirusz szövege pedig a számolásban való jártasság fontosságát emeli ki. Az ókori matematikaoktatás az akkor elérhető legmagasabb szintű tudományos ismereteket nyújtotta – azon kevesek számára, akik egyáltalán hozzájutottak.

Az európai kultúrában a matematika ókori görög felvirágzását követően az arab matematikusok eredményei, majd a kolostorok tudós szerzetesei, később a reneszánsz időszakban a tudományok újjászületését is elhozó matematikusok fémjelezték a matematikatudomány fejlődését (*Sain*, 1986). A kolostori iskolákban az aritmetika és a geometria mint a hét szabad művészet két ága (amelyek nem a „triviális” részhez, hanem a *quadrivium*hoz tartoztak) köré épült a matematika oktatása. Mindkét terület szükségességét gyakorlati igények indokolták, mint például a munka hatékonysága vagy a csillagászati kérdések. A reneszánsz időktől kezdve a megerősödő polgárság gyakorlati igényeit kielégítő könyvek készültek, amelyek a matematikai eredmények alkalmazását kereskedelmi és más, gyakorlatias példákon mutatták be, ilyen volt például a trevisói aritmetika (*Verschaffel*, *Greer* és *de Corte*, 2000).

A 16. századtól az oktatás több területén elinduló egységesítő folyamatok jegyében megszülető tantervekben a matematika a kezdetektől fontos szerephez jut (*Szebenyi*, 1997). *Smolarski* (2002) szerint az 1599-ben megszületett jezsuita világtanterv, a *Ratio Studiorum* nemcsak hogy jelentős szerepet szánt a matematikai nevelésnek, hanem a tanároknak szóló útmutatók olyan javaslatokat fogalmaztak meg a tanítási módszerekre, amelyek ma is használatosak.

A 16–17. századtól figyelhető meg, hogy a korszak jelentős matematikusai egymással rendszeres, személyes találkozáson és levelezésen alapuló párbeszédet folytattak, és olyan rohamosan nő a matematikai ismeretek mennyisége és mélysége, hogy elválik egymástól a tudomány élvonalát jelentő kutatás és az iskolai tananyag. Az iskolai tananyag meghatározásában ugyanakkor egészen a mai napig alapvető szempont maradt, hogy tudományosan helytálló, a későbbi (esetleges) magasabb matematikai tanulmányokat előkészítő legyen. A matematikatudomány és a matematika tantárgy viszonyában különösen érvényesek a mai napig *Dewey* (1933) gondolatai, amelyekben a tudományterületek megtöbbszöröződését és az egyes tudományterületeken belül megnövekedett ismeretanyagot állítja szembe a gyerekek – ehhez képest kevéssé változó – tanulási képességével.

A matematikaoktatás számára tehát alapvető kérdéssé vált a modern közoktatás tantárgyi keretei között az, hogy a matematikatudomány szempontjából helytálló, koherens, de ugyanakkor az életkori sajátosságokat tükröző ismeretanyagot jelöljön ki. Nehezíti ezt a törekvést, hogy a matematika tudományában ma alapvetőnek számító fogalmak, mint például a természetes szám, a függvény vagy a halmaz a tudomány fejlődésének érettebb, önreflektív szakaszában, a *metamatematika* megjelenésével párhuzamosan fejlődtek ki. Ezek az alapfogalmak, amelyek logikai szempontból ma az iskolai tanulásban is alapvetőnek számítanak, szükségszerűen a matematikatanulás kezdeti szakaszában kerülnek elő, amikor a bontakozó gyermeki elme számára a tapasztalatokhoz kötöttség sajátosságai kizárják az alapfogalmak felőli, a matematika tudománya szerinti építkezést. A matematikaoktatás mesteri bravúrja az, hogy a gyermeki gondolkodás épülésének menetét figyelembe véve tudja biztosítani a matematikai gondolkodás fejlesztésének, a fogalmak épülésének folyamatát.

A matematikatudomány és jelenlegi tagozódása

A matematikát számos tudományági nyilvántartási rendszer és oktatáspolitikai besorolás a természettudományokhoz sorolja (NKR, NEFMI 2010), pedig a matematika szinte minden tekintetben – fejlődés, módszertan, belső törvényszerűségek – nagyon eltér a fizikától, kémiától, biológiától és földrajztól. Eleink ezt jobban számon tartották: például amikor a kolozsvári egyetem Kolozsvárról Szegedre költözött, a mai Természettudományi és Informatikai Kar elődjének elnevezése Matematikai és Természettudományi Kar volt. Más országokban megmaradt a megkülönböztetés: például a Bécsi Tudományegyetem (Universität Wien) egyik karának neve néhány évvel ezelőtt még ugyancsak Matematikai és Természettudományi Kar volt. (Ma önálló Matematikai Kar, Fizikai Kar stb. működik.) A matematikai fogalmak, elméletek azonban a valóságból származnak, ezért lehet a matematikát számos területen – sokszor ugyanazt a matematikai eredményt nagyon különböző területeken – sikerrel alkalmazni.

A természettudományok esetében a fejlődés velejárója, hogy a túlhaladott, megdöntött nézeteket és ezzel együtt az erre alapozott összes addigi „tudományos eredményt" kitörlik, tudománytalannak minősítik, stb. – gondoljunk csak arra, ahogyan a geocentrikus világképet felváltotta a heliocentrikus. Az elméletek ugyanis a megismételhető kísérletek, megfigyelhető jelenségek magyarázatára szolgálnak, és mindig az aktuálisan „legjobban magyarázó" elméletet (elméleteket) tartjuk érvényesnek.

Ezzel szemben a matematika sajátos témájából és módszereiből az következik, hogy a matematikai ismeretek ember által alkotott „ideák", amelyek az évszázadok folyamán nem veszítik el érvényességüket, és ezért nem kell, sőt nem is szabad „kidobni" őket. Az persze igaz, hogy a matematika fejlődése során egyes korábbi fogalmak, elméletek pontosításra szorulnak (lásd pl. a természetes és a valós számok, illetve az euklideszi geometria és a halmazelmélet), valamint bizonyos témák egyes korokban divatosabbak, mint mások. Azonban minden kor a megelőző korok matematikai ismereteire épít, azt fejleszti tovább. Ez magyarázza azt, hogy az általános és középiskolában – legalábbis a törzsanyagban – túlnyomó többségben olyan matematikai ismereteket tanítanak szerte a világon, ami már az ókorban ismert volt. Ami igen fontos, hiszen ezek adják ma is a matematikai tudomány alapjait. A matematikatanítás egyik nagy kihívása, hogy már kis kortól kezdve újabb témakörök is előkerüljenek, valamint ezeket a legalapvetőbb matematikai ismereteket olyan módszerekkel tanítsák a közoktatásban, amely lehetőséget teremt arra, hogy a komolyabb matematikai ismereteket igénylő, illetve nyújtó felsőoktatási szakokon át lehessen hidalni – legalább néhány fontos területen – az ókori szintű és a mai matematikai ismeretek közötti óriási szakadékot.

A matematika tudománya számára nagyon fontos, hogy ez a gondolati, nézetbeli emelkedés töretlen, és minél magasabb ívű lehessen, hiszen a munkavállalók egyre nagyobb része már tudatosan is kell hogy alkalmazza a legmodernebb matematikai eredményeket. A PISA felmérésekben szereplő feladatkategória, az oktatási és munkahelyi kontextus ezeket az igényeket jeleníti meg (*OECD,* 2009).

Szeretnénk kiemelni, hogy a matematika tanításán belül egyszerre történik az absztrakt gondolkodás fejlesztése és az absztrakt gondolkodás használata. Ez a látszólagos ellentmondás jellemzi a matematikatanárok mindennapjait, ebben a gúzsban táncolva kell hiteles, de megérthető új ismeretekhez juttatni az iskolásokat.

A természettudományokhoz hasonlóan az ókortól napjainkig a matematikai tudományban is erőteljes specializáció ment végbe: új területek születtek, részben a matematika belső fejlődése következtében, részben pedig „külső” hatásra, azaz az alkalmazók igénye alapján. A legnagyobb matematikai referáló folyóirat, a *Mathematical Reviews* évente több mint 75 ezer matematikai tudományos cikket ismertet témájuk szerint csoportosítva. A matematikai témakörök legújabb osztályozása 47 oldalas, ahol a főbb területek száma több mint 60, és ezek két lépcsőben további témákra oszlanak (*MSC,* 2010).

A *3.1. táblázat*ból láthatjuk, hogy a matematikai értékelési keretekben megjelölt tartalmi területek természetes módon illeszkednek a matematikatudomány fő területeihez.

3.1. táblázat. A matematika fő területei

Elsődleges tartalmi területek	*A Mathematics Subject Classification szerinti fő területek*
Számok, műveletek, algebra	11: Számelmélet *(Number theory)* 12: Testelmélet és polinomok *(Field theory and polynomials)* [az absztrakt algebra további területei (further topics of abstract algebra): 06, 08, 13-22]
Relációk, függvények	26: Valós függvények *(Real functions)* [az analízis és differenciálegyenletek további területei (further topics of analysis and differential equations): 28-49]
Geometria	51: Geometria *(Geometry)* [a geometria és topológia további területei (further topics of geometry and topology): 52-58]
Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika	05: Kombinatorika *(Combinatorics)* 60: Valószínűségelmélet és sztochasztikus folyamatok *(Probability theory and stochastic processes)* 62: Statisztika *(Statistics)*
A matematikai gondolkodás módszerei	03: Matematikai logika és a matematika alapjai *(Mathematical logic and foundations)*

A táblázat jobb oldalán nem említett, magasabb sorszámú fő területek pedig – pl. 65: Numerikus analízis (*Numerical analysis*), 68: Számítástudomány (*Computer science*) – sok esetben az itt említett területeken keresztül épülnek a bal oldalon szereplő témákra. Hasonlóan jól illeszkednek az elsődleges tartalmi területek témái ahhoz, ahogyan a *Mathematical Reviews* a matematikatanítás fő diszciplináris területeit felsorolja. Ezek a következők: 97 Matematikatanítás (*Mathematics education*); 97E A matematika alapjai (*Foundations of mathematics*); 97F Aritmetika, számelmélet (*Arithmetic, number theory*); 97G Geometria (*Geometry*); 97H Algebra (*Algebra*); 97I Analízis (*Analysis*); 97K Kombinatorika, gráfelmélet, valószínűségelmélet, statisztika (*Combinatorics, graph theory, probability theory, statistics*).

Elmondhatjuk tehát, hogy a matematikai értékelési keretek tartalmi területei összességükben megfelelnek a matematikatudomány jelenlegi kutatási ágainak. Kiválasztásuknak ez az (egyik) indoka. A másik indok az, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztése ezeken a témákon mint alapanyagon keresztül valósulhat meg a korszerű tanítási módszerek segítségével. A későbbiekben látjuk majd, hogy ezen elsődleges tartalmi területek megfelelői jelennek meg a *Nemzeti alaptanterv*ben, valamint a matematika 1–6. osztályos tanterveiben. Az itt vázolt rendszer összhangban van a történelmi-kulturális hagyományokkal, valamint a PISA[1] vizsgálatok szerint hasonló helyzetű Németországban a felmérések kedvezőtlen eredményei által kiváltott oktatási reformok során elkészült matematika értékelési keretekkel is. A német tartományi kultuszminiszterek konferenciája által elfogadott *Bildungstandard* (2005) a következő tartalmi területeket jelöli meg a negyedik osztály végére előírt követelmények rendszerezésében: számok és műveletek; tér és forma; mintázat és struktúra, mennyiségek és mértékek; adatok, gyakoriság és valószínűség. A klasszikus geometria és a mérések külön területként kezelése elterjedt jelenség a világ oktatási rendszereiben, és az IEA[2] szervezet méréseiben is kezdetektől él a megkülönböztetés.

1 PISA: *Programme for International Student Assessment*, az OECD által irányított nemzetközi program a tanulók szövegértés, matematika és természettudomány tudásának felmérésére.

2 IEA: *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, a tanulók nemzetközi felmérést az 1960-as évek óta irányító szervezett. A TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Studies*) felmérések 1995 óta négyévenkénti rendszerességgel felmérik a tanulók matematika tudását is.

A matematikatudomány fejlődésének tükröződése a magyar közoktatásban

A kezdetek

A magyar közoktatás és így az elemi szintű matematikaoktatás története is a 18. századra nyúlik vissza. A népiskolai matematikatanítás – akárcsak más országokban – sokáig a korábban említett, már az ókorban is ismert elemi számtani és geometriai ismeretekre szorítkozott.

A magyarországi matematikatanítás sajátságaként meg kell említenünk, hogy a matematikai kutatás, a tartalmi fejlesztés és a didaktikai kérdések felvetése mindig párhuzamban haladt. A 18–19. század fordulóján *Bolyai Farkas* már olyan elveket hirdetett a matematika tanításáról, amelyeket ma is magunkénak vallhatunk (*Dávid*, 1979).

A továbbiakban áttekintjük a magyar matematikaoktatás huszadik századi történetének legfontosabb állomásait és szellemi irányzatait.

Nemzetközi mozgalom az iskolai matematika megújítására a 19. század végén

A 19. század végén matematika nevű iskolai tantárgy nem szerepelt, a megfelelő tantárgyat mennyiségtannak és geometriának nevezték. Ebben az időben nemzetközi diskurzus kezdődött a matematikatanítás megújítására, sőt *Felix Klein* német matematikus vezetésével nemzetközi reformbizottság is szerveződött (ICMI, 1908).

Magyarországon 1891-ben alakult meg a Bolyai János Matematikai Társulat elődje, a Mathematikai és Fizikai Társulat. A reform vezetője *Beke Manó* professzor lett (1862–1946; matematikus, akadémikus), aki maga is személyes barátságban volt Felix Kleinnel. Munkájában kiváló társak segítették: többek között *Rados Gusztáv*, a Műegyetem professzora (1862–1942, matematikus, akadémikus), *Mikola Sándor* (1871–1945, tanár, fizikus), *Rátz László* (1863–1930, matematikatanár) (*Beke* és *Mikola*, 1909).

Beke Manó számos könyvet írt a népiskolai matematikatanítás számára: tankönyveket, illetve a tanítóknak úgynevezett „vezérkönyveket” (*Beke*, 1900, 1911). Ezekben a könyvekben a gondolkodtató, gyakorlati életből vett feladatok is nagy szerepet kaptak. *Arany Dániel* pedig egy középiskolásoknak szóló matematikai újságot alapított. Célját így fogalmazta meg: „Tartalomban gazdag példatárat adni tanárok és tanulók kezébe." A lap első példánya 1894. január 1-jén jelent meg. Ez a lap volt a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) elődje. Mi indította el ezt a reformot, és mit sikerült elérnie? Elsősorban a tananyag korszerűsítése mozgatta a matematikusokat. Fájlalták, hogy az utóbbi évszázadok matematikájának eredményeit egyáltalán nem említik az iskolában. Ugyanakkor a tanítási módszereken is változtatni szerettek volna. *Rátz László* és *Mikola Sándor* már korábban kidolgozták az ún. „munkáltató matematikatanítás" módszereit és tananyagát (*Rátz*, 1905). Arra törekedtek, hogy a tanulók sok mérést végezzenek, és például ezáltal a matematika tanulását átszőjék a közvetlen tapasztalatok. Hangsúlyozták a fejszámolás fontosságát, a becslések gyakoroltatását.

A témák közül ők is elsősorban a függvények tanítását tartották időszerűnek, ami már *Felix Klein* reformtörekvéseinek magyar vetületének tekinthető. Talán ennek is köszönhető, hogy az iskolának annyi kiemelkedő diákja volt. Például *Neumann János* matematikus, a „számítógép atyja", és a fizikai Nobel-díjas *Wigner Jenő*. A módszernek és a kiváló tanároknak is köszönhető a matematika tanításában és a kutató matematikusok felnevelésében elért eredmény (*Rapolyi*, 2005).

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok útján fejleszteni próbálták más iskolák diákjait is. Kiadványokat, könyveket jelentettek meg. *Rátz László* kétkötetes *Matematikai gyakorlókönyv* c. munkája máig is a matematikai témaköröket feladatokon át tanító kiváló szakkönyvnek számít. Mindez jól illeszkedett a magyar szellemi fejlődés kiegyezés után kezdődő gazdagodásához.

Matematikatanítás a 20. század ötvenes éveitől kezdődően

A kiváló tanárok tanítványai sok mindent megtanultak és ők maguk is továbbadtak tanítványaiknak, a pedagógiai megújulás üteme azonban elég lassú volt. Nem történhet meg a pedagógiai szemléletmód átalakítása parancsszóra – ez itt most nem irodalmi fordulat, hanem arra a „kötelezővé tevés"-re utalunk, ami a magyar matematikatanítás történetében kétszer is megtörtént, ám mind a kétszer igen kis hatásfokkal ért el eredményt.

A második világháború utáni években *Szent-Györgyi Albert* felkérte *Péter Rózsát* új középiskolai matematika-tankönyv írására. Ez a sorozat a híres *Péter–Gallai*-tankönyv (*Péter* és *Gallai*, 1949). Újszerű, a gyakorlati alkalmazásra építő, szemléletesen magyarázó, ugyanakkor matematikailag korrekt első osztályos tankönyvet készítettek. A harmadik és negyedik osztályos köteteknek már szerzőtársai voltak *Hódi Endre* és *Tolnai Jenő* főiskolai tanárok is.

A könyvsorozat felépítésében és módszerében a heurisztikus gondolkodásra nevelés, a problémákon keresztül való matematikatanulás terén úttörő jelentőségű. A *Péter–Gallai*-tankönyvsorozatot, felkészítő tanfolyamok tartása után, a kor oktatáspolitikájának megfelelően minden gimnáziumban kötelezővé tették. Az új „bevezetése" viszont nem jelenti azt, hogy mindenki képes is azonnal új elvek szerint tanítani. A felkészítő tanfolyamok minden jó szándéka ellenére a tartalmi változás nem mindenütt járt együtt a javasolt módszerek alkalmazásával.

Mégis, azt lehet mondani, hogy néhány évtized alatt hatása lassan megújította a középiskolai matematikatanítás sok területét, és főleg módszereivel igen nagy hatással volt a későbbi általános iskolai tantervi és módszertani megújulásra is (*Szendrei*, 2005).

Lassanként változtak a tanítási módszerek is. A matematikai gondolkodásban kulcsfontosságúnak tekinthető megértés igénye már fontossá vált.

Nemzetközi tendenciák

Az első szovjet szputnyik fellövését követően az USA többek között az oktatási rendszer javításától, mindenekelőtt a matematika és a természettudomány tanításának eredményesebbé tételétől várta, hogy javítsa pozícióját a műszaki-technológiai versengésben. Ennek megfelelően jelentős anyagi ráfordításokkal fejlesztette e területek tanítását. Abban az időszakban, a matematikai és természettudományos oktatás stratégiai jelentőségének felismerése nyomán az iskolarendszer megújítása más országokban is fontos kérdéssé vált. Az UNESCO elkötelezett terjesztője volt az új gondolatoknak. Az 1962-ben Magyarországon tartott UNESCO-szimpóziumon a világ kitűnő matematika-didaktikusai cseréltek véleményt és alakítottak ki életre szóló munkakapcsolatokat. Közöttük volt *Dienes Zoltán* (1916–, matematikus, kutató) és *Varga Tamás* (1919–1987, matematikus, kutató) is. *Dienes Zoltán* gyújtó hangú előadása sokakat ösztönzött arra, hogy elképzeléseiket a gyakorlat terén is megvalósítsák.

A *Nicolas Bourbaki* álnevet felvevő, az 1930-as évek végétől e néven publikáló, többnyire francia matematikusokból álló csoport a matematikai kutatásokat kívánta egységesíteni az egyes területek között analógiák, párhuzamok és egyéb kapcsolatok feltárása révén (*Borel*, 1998). Nagy jelentősége volt e munkának abban, hogy a különböző területeken dolgozó matematikusok közös nyelvet találjanak, és a matematika egész rendszere jobban áttekinthető legyen. Ugyanilyen fontos az iskola szempontjából, hogy a matematika tananyaga ne különálló részdiszciplínák (számtan, algebra, geometria, trigonometria, analízis) laza egybefűzése legyen, hanem egységes szempontok szerint épüljön fel (*Varga*, 1972, 1988). A világtendencia által inspirálva különböző, a számtan és mértan tanítását korszerűsítő kísérlet indult Magyarországon is.

A világ számos országában tartja még magát az a gyakorlat, hogy a matematika egyes témakörei külön tantárgyakat alkotnak az iskolában. Ennek az okát elsősorban abban látjuk, hogy a tanárképzésben a szaktárgyi, szakmódszertani képzésre a magyarországihoz képest kevés idő jut. Még azokban az országokban sem mindig kerül arra sor, hogy ezek a témakörök egymáshoz szervesen kapcsolódjanak, fogalmaik egymáshoz kapcsolódva erősödjenek, ahol valamennyi matematikai témakört egy tantárgy keretében tanítják.

Varga Tamás volt az egyetlen olyan kutató, aki a teljes általános iskolai tantervet és a módszereket egységes egészként akarta megújítani. Kísérletét az integrált matematikatanításra törekvés határozta meg, amely a magyar egyetemi képzés, a színvonalas pedagógusképzés mellett lehetséges volt, hiszen a pedagógusképzés során a tanító- és tanárjelöltek valamennyi matematikai területen igen széleskörű és alapos képzést kapnak. A témaköröknek ezt az összeszövését kísérelte meg a *Varga Tamás* vezette kísérlet, amelyet a nemzetközi szakirodalomban az „OPI project” néven ismernek[3] (*Klein*, 1987).

3 Az OPI, az Országos Pedagógiai Intézet volt a kísérlet intézményi irányítója.

A megújításnak az is célja volt, hogy a matematika kevéssé kedvelt tantárgyból kedves tantárggyá váljék.[4] Az OPI projektje le kívánta dönteni a tanuló matematikai fejlődése elé állított mesterséges akadályokat. Fontossá vált az addigi tanítás során ki nem mondott, de valójában felhasznált matematikai fogalmak (például halmaz) kiépítése és az, hogy a matematikatanulás kultúrája minden tanuló számára elérhető legyen. A projekt célja volt azt elérni, hogy a középiskolai matematikatanulás az általános iskolában már jól megalapozott fogalmakra, eljárásokra támaszkodhasson.

Az integrált matematikatanítási kísérlet

A 20. század egyik jelentős magyar matematikaoktatási mozgalma volt az integrált (eredeti szóhasználattal komplex) matematikatanítási kísérlet. Az „integráltság” itt többféle értelemben is jellemző. Jelenti a matematika mint egységes egész szerepeltetését, vagyis azt, hogy nem különálló számtan, mértan stb. tanításáról gondolkodtak a kísérlet tervezői és megvalósítói. A kísérlet elnevezésében az integráltság arra is utal, hogy a kialakult elképzelést a matematikadidaktika, pszichológia, pedagógia, neurológia kutatási eredményeinek alkalmazása jellemezte. Végül abban is integráltság jellemezte ezt a kísérletet, hogy nem pusztán módszertani megújításról vagy külön tantervi anyagváltozásról gondolkodott, hanem e kettőt egységként, együtt próbálta szakmailag jobbá és egyben a tanuló életkori sajátosságainak megfelelőbbé tenni.

Az új elképzelések iskolai megvalósítása az 1960-as, ’70-es években – más területeken, más tantárgyakban is – engedélyhez kötött folyamat volt, hiszen ekkoriban egyetlen tanterv, egyetlen tankönyvsorozat volt érvényben. Kísérleteket szigorú feltételek mellett engedélyeztek, amelyek sikerét bizonyítani is kellett. A fejlesztőknek minden esetben azt kellett garantálniuk, hogy a kísérletben részt vevő tanulók tudni fogják azt is, amit a hagyományos oktatásban tanuló társaik tudnak. Ez a matematika esetében nem volt nagyon nehéz, mert az általános iskolai tananyag igen szűk volt; különösen igaz ez a számtanra és a mértanra. Al-

4 Ezen a téren valószínűleg jelentős eredményeket sikerül elérni. Az utóbbi időben a matematika Magyarországon a közepesen kedvelt tárgyak közé tartozik, messze megelőzve a fizikát és a kémiát (lásd *Csapó*, 2000).

gebrából az elsőfokú, egyismeretlenes egyenlet megoldása volt tananyag. A negatív számokra is csak a nyolcadik osztályban került sor.

Varga Tamás, a kísérlet tervezője tankönyvek, matematikát népszerűsítő könyvek írójaként az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tanított matematika-módszertant. A kísérlet idején azonban már az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Tanszékén dolgozott. Ott *Cser Andor*, majd *Hódi Endre* tanszékén egy klasszikus értelemben vett „matematikatanítási iskolát" alkotott. Köré tömörültek azok az emberek, akik jelentős erőfeszítéseket tettek a matematikatanítás jobbításáért. Szemináriumokat, óralátogatásokat szervezett az egyetemistáknak. Szakirodalmat fordított. Minden fórumon terjesztette a széles nyelvtudása révén is megszerzett matematika-módszertani tudását. Állandó kapcsolatot tartott a világ számos kutatójával, folyamatosan bővítette, kontrollálta, formálta matematikatanításról kialakult koncepcióját: a jó elgondolásokat átvette és a magyarországi lehetőségekre adaptálta, elvetette a formalizmusba hajló tévutakat. A tanítók, tanárok alkotótársak lettek. Az ígéretes vagy a kevésbé jónak tűnő elgondolásokat megvitatták, majd elfogadták vagy elvetették. A komplex matematikatanítási kísérlet 1963-ban kezdődött, és folyamatosan tartott még az új tanterv bevezetése után is.

Az 1978-as matematika tanterv és előzményei

A Művelődésügyi Minisztérium létrehozta az ún. Korszerűsítési Bizottságot *Szendrei Jánosnak* (1925–2011), a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola főiskolai tanárának vezetésével. A kísérleti helyek látogatása, az írásos anyagok tanulmányozása után a Bizottság azt a javaslatot fogalmazta meg, hogy a komplex matematikatanítási kísérlet legyen az új tanterv alapja. A matematikusok rendkívül sok segítséget adtak. Igen sokan, közöttük *Rényi Alfréd* (1921–1970), *Kalmár László* (1905–1976) és *Péter Rózsa* akadémikusok, *Surányi János* (1918–2008), valamint a Magyar Tudományos Akadémia szakmai bizottsága megadták a szükséges szakmai támogatást.

Az iskolai tantárgy neve már az első osztálytól kezdve matematika lett. Az 1972-től fokozatosan bevezetésre került a tantervbe számos, addig nem tanított témakör: halmazok, logika, függvények, sorozatok, az algebra, kombinatorika, valószínűség és statisztika elemei. Ezek nagy részét a tanítók, tanárok nem tanulták a képzésük során.

Más témakörök (például a negatív szám) pedig már sokkal korábban kerültek tárgyalásra, mint azelőtt szokásos volt. Ezért csak olyan tanítónak engedélyezték az új tanterv tanítását, aki felkészítő tanfolyamon vett részt. Ezeket a tanfolyamokat főként a megyei pedagógiai intézetek szervezték.

A tanterv széles körű elterjedését azonban az összes tantárgyra kiterjedő tantervi munkálatok elkezdődése megakadályozta. 1978-tól a közoktatás valamennyi területén új tanterveket vezettek be felmenő rendszerben. A matematika esetében sem engedélyezték azt, hogy csak az a tanító vezesse be, amelyik szeretné, és már hosszú felkészítő folyamat áll mögötte. Ötödik osztálytól kezdve az ún. „ideiglenes tanterv" szerint tanítottak, hogy az új témakörök tanítására a felső tagozatos tanárok is felkészüljenek. Ez a hagyományos alsó tagozatra építve hozott új tananyagokat, új módszereket a tanításba. Ehhez is tartottak központi és megyei felkészítő tanfolyamokat. Az új tanterv 1978-as *kötelező* bevezetése azonban már a maga idejében jól láthatóan elhamarkodott oktatáspolitikai döntés volt.

Varga Tamás és munkatársai igyekeztek már a tervezés időszakában elejét venni a szélsőségeknek. A rövid tanfolyamokon nem sikerült mindenkinek megérteni az egyes új témakörök bevezetésének célját. Például azt, hogy a más számrendszerekről való tudás, az azokban végzett manipulatív munka célja a tízes számrendszer mély megértését készíti csupán elő. A jelölések és elnevezések korai használata annyira csábító volt, hogy néhányan „lelkesen" számoltatták más számrendszerekben a diákokat. A fogalmak megfelelő szintű alapozása nélkül megtaníttatták a „halmaz", „relációs jel" stb. szakszavakat.

Sokan lerövidítették a számfogalom fejlesztésének eredetileg javasolt hosszú útját, például azt, hogy sokféle egységgel dolgozva adjunk modellt az egységgel való mérésnek; a számnak a mérőszám tartalma is kerüljön első osztálytól kimunkálásra. Néhány javasolt munkaeszközt igen formálisan használtak, stb.

Az új tanterv tanítására való áttérés során ugyanis nemcsak az új témakörök jelentettek újat, hanem a matematika tanításának addig csak a tanítók kisebb része által gyakorolt, javasolt módszerek is. Felkészült, magát állandóan továbbképző, önálló döntésekre képes, alkotó tanítóra volt szükség. Olyanra, aki jártas a különféle matematikai témakörökben, aki az óráira megtervezi, megszervezi a tanulók tevékenységeit, biztosítja a többféle érzékeléssel való tapasztalást, kidolgozza az absztrakció további lépéseit, kitalálja és biztosítja az eszközök sokoldalú használatát, igazodik a gyerekek megnyilvánulásaihoz, beszédértéséhez, messzemenően figyelembe veszi a tanulók életkori sajátosságait, engedi a vitát, örömteli és demokratikus tanulási légkört teremt.

Újból érdemes hangsúlyozni, hogy ez volt az első olyan tanterv Magyarországon, amelyik nemcsak a tananyagra és a szakdidaktikai módszerekre, hanem a diákok és tanárok együttes munkájának megvalósítási módjaira, az osztálytermi munkalégkör kialakítására is javaslatokat kívánt adni. Mai szóhasználattal erre nem is tanterv, hanem talán az oktatási program elnevezés illik.

Varga Tamás nagyon fontosnak tartotta a matematika alkalmazhatóságának iskolai megmutatását, amikor a tanulók matematikatudása a valóság problémáinak megoldásához jelent hatékony segítséget. A matematika eredményes alkalmazásához többek között elengedhetetlen eszköznek vélte a kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika megismertetését, valamint az ezekhez szükséges megfelelő szemlélet kialakítását. Ez utóbbi területeken a 78-as tanterv és a korrekciós tanterv időszaka nem hozta meg a kívánt eredményt. A matematika iskolai oktatásában a matematika alkalmazásainak szerepeltetése csak kismértékben kapott teret. A témakörök közül a kombinatorika, a valószínűség témakör és a statisztika tanítása is a perifériára szorult: a tanárok többsége igyekezett elkerülni vagy minimálisra szorítani ezeket a részeket a tanításban. *Varga Tamás* munkássága nagy hatást gyakorolt a holland matematikatanítási törekvésekre, elsősorban *Hans Freudenthal*lal fenntartott munkakapcsolatán keresztül (*Freudenthal*, 1980a, 1980b).

Az IEA Második Nemzetközi Matematikai Vizsgálat (*Second International Mathematics and Science Study* – SIMS) idején lehetőség nyílt az ideiglenes és a régi tanterv szerint tanuló nyolcadik osztályosok eredményének összehasonlítására. A reprezentatív minta tanulóinak 46, illetve 44%-a ugyanis az ideiglenes, illetve a régi tanterv szerint tanult. Minden tanuló két matematikai feladatsorozatot oldott meg: egy 40 feladatból álló füzetet (8. füzet), valamint négy, egyenként 34-34 feladatot tartalmazó füzet egyikét (7/A, 7/B, 7/C, 7/D füzet). Az ideiglenes tanterv szerint tanulók nemcsak az összpontszám alapján, hanem a feladatoknak matematikai ismeret, megértés, alkalmazás szerint csoportosított kategóriáiban is jobb eredményt értek el, mint a régi tanterv szerint tanulók, valamint kevesebb feladatot hagytak ki (*Radnainé*, 1983).

Tantervek 1986 után

A tapasztalatok feldolgozása után az 1986-os korrekció ezeket az alapokat nem változtatta meg, csak korszerűsítette, s még gyermekközelibbé tette. Szűkítette a számkört negyedik osztályban, még inkább hangsúlyozta a szemléletformálást és tapasztalatszerzést a halmazok, logika, geometria, kombinatorika, valószínűség, statisztika témákban, csökkentve a követelményeket. A matematikai gondolkodás területeinek fejlesztésével megkísérelte emelni a gondolkodás általános kultúráját.

Az 1990-es években az iskolák *ex-lex* módon kezelték az 1986-os korrigált tantervet. A demokratikus könyvkiadás és a tanári szabadság szlogenek lehetőséget adtak a tanítási módszerek változatosságának megnyirbálására. Érdekes módon, az 1978-ban annyira furcsának tartott munkalapok, feladatlapok alkalmazása azonban általánossá vált. A tanár előkészítő, katalizáló, összegző munkája a tanítás során sok helyen elmaradt.

Ezt a helyzetet mintegy súlyosabbá tette a szakfelügyelet rendszerének átalakítása, majd annak fokozatos megszüntetése/elsorvadása. A tanárok eleinte örültek az ellenőrző testület eltűnésének, de a gyakorlati munkában segítő, hírvivő, új ötleteket adó külső „munkatárs” hiánya lassanként elbizonytalanító hatást eredményezett. Nemcsak az ellenőrző szakfelügyelő tűnt el a pedagógiai rendszerből, hanem a segítő, jó tanárt védő külső szakértő is.

Számos központi kezdeményezés indult a széttartani látszó tantervi keretek összehangolására. Szerencsés módon a matematika tantárgy esetében a Bolyai János Matematikai Társulat szakmai szerepe erősödött. Egyre népszerűbbé vált a matematika problémaközpontú tanítása (*Burkhardt*, 1984; *Szendrei*, 2007; *Kosztolányi*, 2006). Összességében elmondható, hogy az 1986-os korrigált tanterv az, amelyikre az iskolák ma is építik helyi tanterveiket.

A Nemzeti alaptanterv, a NAT

Az 1995-ben bevezetésre kerülő Nemzeti alaptanterv kiemelte a témakörök közül a gondolkodási módszerek alapozását, és valamennyi témakört átható fejlesztési szemponttá tette. Központi feladattá emelte a gyerekek eltérő absztrakciós képességéhez való igazodást, a differenciált fejlesztést. Hangsúlyozta a valóság és a matematika kapcsolatának felfedeztetését a mindennapi életben. Felismerte, hogy a matematikai szövegértő képesség fejlesztésre szorul. Továbbra is megtartotta a halmazszemléletet. Csökkentette a követelményeket, de továbbra is szorgalmazta a tevékenységre épülő feldolgozásmódot.

A témaköröket és követelményeket csak 16 éves korig fogalmazta meg. A Bolyai János Matematikai Társulat azonban tantervi ajánlást fogalmazott meg a következő két évfolyam számára is. A matematika alsó és felső tagozatos tananyagában, felépülésében, a követelmények egymásra épülésében és módszertani ajánlásaiban a NAT egyenes folytatása a korrigált tantervnek. Az alsós szakaszon belül a tanévekre bontásban is jó alapokat találhatnak a helyi tantervek kidolgozói az „előd" tantervben.

A NAT 1995 Matematika követelményrendszerében a korábbi évekhez képest lényegesen nagyobb hangsúllyal szerepeltek a matematika alkalmazásai, valamint a valószínűségszámítás és a statisztika. *Varga Tamás* már a nyolcvanas évek elején fontosnak tartotta a számológépeknek és a rohamos fejlődést mutató számítógépeknek az oktatásban történő felhasználását, maga is kereste ennek megfelelő módjait, és nem értett egyet azokkal a szélsőséges nézetekkel, melyek szerint meg kell tiltani a számológépek, személyi számítógépek iskolai használatát. A NAT-ban több helyen is találunk konkrét utalásokat a zsebszámológépek megfelelő használatára.

A NAT, mint minden korábbi tanterv, sok vitát váltott ki. A bírálatok és ellenvetések hatására 1999-ben megindult az ún. kerettantervek kidolgozása. Ezek jelentették a közbülső lépést, a közvetítő eszközt a NAT és a helyi tantervek között, tehát segítséget, eligazítást nyújtottak a tanárok számára.

Az 1–6. osztály matematika anyagában ez sem hozott lényeges változást; a megfogalmazás módosulásával csupán apróbb hangsúlyeltolódások történtek. A leglényegesebb változás az óraszámok jelentős csökkenése volt, ami megkérdőjelezhette a felső tagozatban már feltételezett, sőt elvárt képességek és készségek kialakulását.

Megállapíthatjuk azonban azt, hogy a mai napig ezek a követelmények élnek akkor, amikor egységes mércével kívánják értékelni a különböző tantervi területeken elért eredményeket. Ugyancsak ezek adnak támpontot a későbbi NAT-változatok értelmezéséhez is, amelyek a fejlesztési feladatok oldaláról kívánják szabályozni a matematika oktatását.

NAT 2003 – NAT 2007

A NAT 2003 matematika fejezetének előzményét az Eötvös József Szabadelvű Pedagógiai Társaság NAT 2002 (*Szendrei*, 2002) tervezete jelentette. Ez igen eltért felfogásában az addigi tantervektől, mert nem a tananyagot írta elő elsődlegesen, hanem azoknak a képességeknek a körét is, amelyek kialakítását a tananyagok által a matematika célul tűzi ki. Számos olyan képesség fejlesztésének feladata is megfogalmazódott itt, amelyet addig a matematikatanítás felhasznált ugyan, de a fejlesztéséről kevésbé gondoskodott. A tananyag itt szervesen épül be a matematikai képességek fejlődő rendszerébe. Mivel az *Új Pedagógiai Szemle* mellékleteként jelent meg, a szakma széles rétegei reflektáltak rá. Sokan üdvözölték örömmel azt, hogy a hangsúly olyan erősen a fejlesztés feladataira helyezte a hangsúlyt, szemben a korábbi NAT előírt tananyag–követelmény kettősével szemben. Természetesen sokan fogalmazták meg aggályaikat olyan értelemben, hogy a tantervírók, tananyagkészítők élni fognak-e azokkal a lehetőségekkel, amelyre a NAT felhatalmazza őket. Gondolhatunk itt a tananyag szerkezetének átalakítására, vagy például a fogalomrendszer-építés hagyományos megoldásainak megváltoztatására.

Ezekben a dokumentumokban a komplex matematikatanítási kísérlet egyik fontos tanuláselméleti vívmánya él tovább, nevezetesen az, hogy a kutatások eredményeinek megfelelően biztosítani kívánja a személyes tapasztalatszerzésből induló ismeretszerzést. Minden tanuló számára biztosítani kell az elegendően széles körű személyes tapasztalás lehetőségét – megfelelő tárgyi, manuális és gondolati tevékenységeket szervezve számukra –, hogy tanítói/tanári irányítással, segítséggel a saját tapasztalatok általánosításából és absztrahálásából jussanak el az ismeretekig (tényismeret, képzet, fogalmak, összefüggések ismerete, fogalmi rendszerek).

Részben a meggyőződés hiányával, részben időhiányra való hivatkozással, esetenként a felkészültség hiányához járuló kényelemszeretettel is magyarázható, hogy ma még mindig sok helyen a tábla-kréta, füzet-ceruza és a tanári közlés (magyarázat) a tanítás-tanulás fő eszköze. Történik ez annak ellenére, hogy a pedagógusképzés igen nagy erőfeszítést tesz a korszerű matematikatanítási módszerek átadására.

Igen nagy jelentősége lenne annak, hogy nagyobb számban folyjanak a gyakorló pedagógusok által megismert matematika tantárgy-pedagógiai kutatások annak még hatékonyabb alátámasztására, hogy a 6–12 éves tanulók egyes matematikai témakörökkel kapcsolatos ismeret-elsajátítási folyamatát és kognitív képességeik fejlődését milyen módon lehet a pedagógusi munkában szolgálni. Ne lehessen – tudatlanságból vagy egyéb okokból – olyan módszereket kínálni és alkalmazni, amelyek hátráltatják a gyerekek fejlődését, akadályozzák vagy akár lehetetlenné is teszik fogalmi rendszerük épülését. A *Szendrei Julianna* által vezetett matematikai bizottság a szakma széles rétegeinek bevonásával alakította ki a NAT 2003 és NAT 2007 1–6. osztályos anyagát.

Tantervi matematikai témakörök épülése az 1–6. osztályban – a matematikai gondolkodás különböző formái

Az 1978-as tanterv előtt a matematikai témakörök a számtan és a mértan (aritmetika, geometria) elemi fogalmaira és főként a négy alapműveletre terjedtek ki. A tanítási módszerek közül nagymértékben a bemutatás, bevésés, számonkérés hármasa terjedt el széleskörűen. Igen nagy volt a tanárok között az eltérés a megértés fontosságának, a gyakoroltatás érdekessé tételének, a számonkérés egységességének kérdésében.

A tantervbe kerülő új témakörök a matematika korszerű felépítését tartották szem előtt. Jogosságának, fontosságának megítélése ugyancsak megosztotta a szakmát. Az elmúlt harminc év azonban nemzetközi fórumokon is kikristályosította azokat a témaköröket, amelyek a kisiskolások matematikaoktatását jellemzik. Ez pedig pontosan megegyezik a 78-as tanterv témaköreivel (*Dossey* és mtsai, 2000).

Magyarország közoktatására jellemző, hogy abban a nemzetközi átlagnál nagyobb szerepet kap a matematika, és a tantervek elkészítése során mélyebben merítünk a matematika tudománya által kínált tartalmakból. A TIMSS mérések háttéranyagai szerint (pl. *Mullis* és mtsai, 2008) a matematika óraszámaiban és a hangsúlyosnak ítélt tantervi követelmények lefedésében felismerhető a hazai közoktatás matematikatanítás iránti elkötelezettsége. Erre a matematika szaktudományi képzést is alapozó tanítóképzésünk ad lehetőséget, amely matematika óraszámában, gyakorlati képzésében kiemelkedik más országokhoz képest.

A következőkben kicsit részletesebben bemutatjuk, hogy egy-egy témakör az iskolai anyagba kerülésekor milyen problémát jelentett a tanítóknak, tanároknak, mert ez egyúttal az eredményes tanítás hatásának elemzésekor is magyarázó tényező lehet.

Számok, műveletek, algebra

A matematika tudománya szempontjából a számok, a műveletek és az algebra témaköröknek a korai iskolai tanítása alapvető. Ezeknek a matematikai témaköröknek az esetében nemcsak a tartalom változását javasolta már az 1978-as tanterv is, hanem a tanítási módszerekét, ami egyúttal az eredményes elsajátításnak is alapköve.

Az egyik oktatás-módszertani jellegzetesség az volt, hogy már az első osztálytól kezdve módszeresen ismerkedtek a tanulók a szám különféle jelentéseivel (pl. darabszám, mérőszám, értékmérő, jel). Máig tartó ellenérzés fogadta azokat a törekvéseket, amelyek nyomán a mérőszám tartalom már a számfogalom kialakításának kezdetén megjelent a darabszám fogalom egyenrangú társaként. Ennek a felépítésmódnak az erénye az, hogy ezáltal a törtszám fogalom szerves folytatása a kezdeti számfogalomnak, nem pedig erőltetett kiegészítő fogalmi tartalomként jelenik meg.

Jelentős tartalmi változást jelentett az, hogy a negatív szám fogalma és az algebra a nyolcadik osztálynál hamarabb jelent meg. A szám jelentésének és jelölésének különválasztására nagy erőfeszítések történtek. (Az, hogy 2 + 3 nem művelet, hanem egy természetes számnak az összeadás műveletével megadott jelölése, nehezen hódít tért. Pedig a korán természetessé váló sokféle jelölés előfeltétele annak, hogy a három alkotórészből álló törtszám is egyetlen számként, egyetlen objektumként jelenjen meg a tanuló gondolatában. Vagy például a százalék alak sem új fogalom, hanem csupán a szám egy másik jelölése lehessen. Ez a szisztematikus, és mind a jelentést, mind a jelölést tudatosító tanítási mód ma már elméleti alapját is megkapta *Dehaene* (2002) hármaskódelméletében.

Hasonló nehézségeket jelent az egyenlőségjel és az egyenlőségfogalom kapcsolatának megértése. *Ginsburg* (1998) esettanulmányából is világos, hogy az egyenlőségjel sokkal inkább egy procedúra, egy cselekvéssor adott pontjának jelzését szolgálja a gyermek fejében („egyenlőségjel után a megoldás jön”), semmint az ekvivalenciareláció egy esetének megértését.

Mindegyik új törekvés óriási vitát, ellenkezést váltott ki a tanárokban, hiszen a „mindig így tanítottuk, mégis megtanulták” érv állt szemben az új javaslatokkal. A pedagógusok nagy hangsúlyt kezdtek fektetni arra, hogy a tanulók jól értsék az egyes műveletek jelentését az összeadó-, szorzótáblák automatikus megtanulása előtt. Általában elfogadták és tanították a tanárok az egyes szorzótáblák közötti kapcsolatot, bár sokszor csak nagyon formálisan.

Megfigyelhető a törekvés a matematikai műveletek egységes jelölésére, nevezetesen az, hogy mind a négy alapművelet úgy kerüljön bevezetésre, hogy az operanduszt kövesse az operátor (amivel a műveletet végezzük). A szorzás művelete esetében nagy ellenállást váltott ki ez a törekvés. Hiszen mind a köznyelvi szóhasználat, mind a későbbi algebrában használt jelölés az első tényezőt említi szorzónak. Ma még nem kellően elterjedt a matematikaoktatásban, hogy a műveletek 6-7 éves gyerek számára történő bevezetéskor törekedni kell az egységes, érthető, egyértelmű értelmezésre. A megértett művelet esetében már élhetünk további módosításokkal. A fogalomalkotás pszichológiai sajátosságainak megértése a mai napig sem vált a tanárjelöltek, a tanárok kedvelt és értett területévé.

Az „osztás esete" más miatt osztja meg a tanárokat. Nehezen fogadják azt a törekvést, hogy a fogalom tanulásának szakaszában az egyenlő részekre való osztást *(partition)* következetesen különböztessék meg a bennfoglaló osztástól *(division)*. Sőt, a műveleti jelekre is egymástól különböző jelölést javasolt az 1978-as tanterv: „/" (ferde törtvonal) lett az egyenlő részekre való osztás jele, illetve „:" a bennfoglaló osztásé. A kétféle osztás megkülönböztetése már egy évszázada is gyakorlata volt a középfokú tanítóképzés matematikaoktatásának (*Pethes*, 1901, 224. o.). A valódi tartalomnak a műveletre történő lefordításakor nélkülözhetetlen a pontos értés. Itt a műveleti jel különbözőségével kívánták segíteni a fogalmi különbözőség rögzítését. Sajnos, a magyar nyelv sajátossága csupán, hogy nincs e két különböző műveletre rövid szó.

Ezzel a fogalmi alapozással a kisgyerek alakuló fogalmaiban a törtfogalom megalapozását szolgáló, az osztási algoritmus megértését elősegítő egyenlő részekre való osztást a bennfoglaló osztástól már a kezdő időszakban el kívánják különíteni. A természetes számok bennfoglaló osztásának eredménye nem lehet törtszám. A bennfoglaló osztás a számelméletben, az „oszthatóság" relációban kap szerepet. (Például: 7 léggömb nem osztható el 4 egyenlő részre, 7 vekni kenyér viszont egyenlően elosztható 4 család között: mindegyik kap 1 teljes vekni és még három darab negyed vekni kenyeret.) A kétféle osztás összemosása mind a törtfogalom alakulását, mind a számelmélet egyik alaprelációjának megértését akadályozza. (Lásd még erről a realisztikus matematikai modellezéssel kapcsolatos megfontolásokat: *Verschaffel* és *Csíkos*, e kötet második fejezetében.)

Míg külföldön irigyelték a magyarokat a kétféle osztás külön műveleti jelének tankönyvben való megjelenéséért, itthon kevésbé volt lelkes a fogadtatás. Két szakma ütközőpontjává vált a kérdés. A tanítóknak a kora gyermekkori fogalomalkotás sajátosságairól való tudása nem nyert elismerést az „egyetlen osztás művelet van a matematikában" gondolattal érvelő matematikatanárok között. Ők voltak azok, akik sokszor bizonytalanították el a tanítókat a magasabb matematikai tudásukra való hivatkozással. Itt azonban még csak nem is matematikadidaktikai, hanem ismeretelméleti és pszichológiai kérdésről van szó.

Ugyancsak kevéssé aratott sikert a műveletek tanulásának nem sablonos, hanem az egyéni számolási eljárásokat is támogató tanítása. Jó harminc évvel később a metakogníció (lásd *Csíkos*, 2007) gondolatkörének megjelenése szerencsére azonos irányba mutat azzal a tanítási móddal, amely a tanuló saját számolási módját kívánja elsősorban benne tudatosítani, szorgalmazza a társaktól, a tanártól való számolási minták tanulását, majd a tanulónak legnagyobb biztonságot adó eljárási mód automatizálását készíti elő. A tanártól természetesen ez a módszer többféle algoritmus „jóságának" elfogadását és követni tudását várja el. Megjelent a becslés fontosságának kiemelése is. Ez nem a fejszámolás gyengítését, hanem éppen annak erősítését kívánta szolgálni.

Ugyancsak az 1978-as tantervtől kezdve jelenik meg az a gondolat, hogy a számkör bővítése, a törtszámok, negatív számok bevezetése már alsó tagozatban kezdődjék. Bár az ötlet eleinte igen furcsának tűnt (addig a negatív szám 8. osztályban jelent csak meg), végül befogadásra került a széles tanítói és szakmai körök által. A részletek kidolgozása során azonban kevés tankönyv mutat irányt arra, hogy a „tört mint szám" jelentés megfelelő alapozást nyerjen. A fogalom alakulása inkább megreked a tört mint reláció jelentésnél. Ez magyarázza azt, hogy a törtfogalommal a tanulók nehezen birkóznak meg. Igen hirtelen az ugrás a „harmada", „negyede" reláció szerepeltetése és a törtnek a számegyenesen való jelölése között.

A számolási eljárások, a számolási algoritmusok tanításában még a zsebszámológépek olcsósága, a könyvelési munkák kötelező gépi ellenőrzésének szabálya sem döntötte meg az írásbeli algoritmus fontosságának hegemóniáját. Nagy szakmai viták eredményeként került előtérbe az algoritmus megértésének fontossága a pusztán magolásos tanulás rovására. Még mindig sokan vallják azonban azt, hogy „nem baj, hogy nem érti, csak csinálja". Az osztási algoritmus nehézsége éppen abban rejlik, hogy a többjegyű szám egyjegyű számmal való szorzatának előrebecslése nem kap elég hangsúlyt a tanítás során, ez nem jut el készségszintre. Holott ez az osztási algoritmus pillére. Feltehető, hogy a mainál későbbi életkorra kellene kerülnie az algoritmusnak, amikor a kétféle osztás egyenértékűsége valóban kialakul a gyerekekben, és az algoritmust mint emberi alkotást is értékelni tudnák. Ennek az algoritmusnak később a középiskolai elemi algebrában van nagy szerepe.

Általános dilemmája a közoktatásnak az, hogy kisiskolás kortól kezdve meg kell találni az egyensúlyt a praktikus ismeretek (képletek, „receptek") elsajátítása és az értő, problémamegoldó, összefüggés-orientált gondolkodásfejlesztés között.

A számelmélet elemeinek tanítása jóval több célt kívánt megoldani annál, hogy a természetes számokat a „páros-páratlan" csoportokba beossza. A számtulajdonságokra való figyelés lehetőséget ad arra is, hogy a számokat mint egyedeket vizsgáljuk meg, ezáltal az egyes számok „személyes ismerősökké" váljanak. A számrendszerbeli felírástól függő tulajdonságokra való figyelés alkalmas a tízes számrendszer fogalmának erősítésére. A témakör alkalmas az elemi logikai ismeretek gyakorlására, továbbfejlesztésére. Ebben a folyamatban fordulópontot jelent annak megtapasztalása, hogy tagadással is lehet számtulajdonságot megfogalmazni (pl. a 7 egyaránt rendelkezik a „páratlan" és a „nem páros" tulajdonságokkal). Az elrejtett elemek, számok barkochba módszerrel való megtalálása során erősödik a logikai „és" tartalma. A sejtés és a bizonyítás egymástól való eltérése is megjelenik ebben a módszerben: mint a találomra való rákérdezésnek és az elemek céltudatos kizárásnak egymástól való eltérése.

Alkalmas terepet kapunk a számtulajdonságokkal kapcsolatban az egyszerű következtetések elsajátítására is. Ezáltal a számtan témakör igen alkalmassá válik a tanulók gondolkodási módszereinek fejlesztésére.

Az algebra elemei is az 1978-as tantervtől kezdve jelentek meg az alsó tagozatos anyagban tananyagként. Az idő próbáját kiállták. Mit is jelent ez a kezdeti algebra? Ez eleinte egy-egy „gondoltam egy számra, amelyik eggyel kisebb, mint 9" típusú szöveges feladatokhoz kapcsolódó lejegyzési trükként kerül bevezetésre ($g = 9 - 1$). A szabályjátékokhoz kapcsolódva jelennek meg a „keretek", amelyek eleinte könnyebben közvetítik a betűknél azt a tartalmat, hogy sokféle szám helyettesíthető a keretekbe. (Pl.: Keresd meg azokat a keretbe írható 1 és 20 közötti számokat, amelyikre igaz az, hogy a keretbe írt szám + 1 > 13. Vagy akár ez a felírás is természetes kell hogy legyen: 13 < keretbe írt szám + 1. Ez az egyenlőtlenség két objektum összehasonlítását jeleníti meg. Vagyis a művelet és a szám fogalmának kapcsolata nem ér ott véget, hogy „számítsuk ki balról jobbra, és akkor kapunk végeredményül egy újabb számot". A műveleti jel szerepeltetése nemcsak folyamatra, elvégzendő műveletre utalhat, hanem objektumot is megjelenít.)

Ez a lépés azért olyan fontos, mert a számfogalomnak, a műveletfogalom alakulásának időszakában nemcsak a „szám mint egy folyamat eredménye", hanem a „szám mint objektum" tulajdonsága is alakul. Amely kettősség együtt kezelésének képessége a matematika értése szempontjából alapvető fontosságú. Ennek a kettősségnek a didaktikai kiemelésére használatos a *process* és a *concept* szavakból alkotott *procept* fogalom (*Gray* és *Tall*, 1994). Tehát a szám *procept*, amely a fogalomalkotás nehézségének egyik fő oka. A tanítás hatékonyságának egyik záloga éppen az, hogy sikerül-e ezt a kettős természetet, valamint a fogalmi arculatok egyikéből a másikba való átlépést, majd visszalépést a tanulók számára természetessé tenni. (A 13 < keretbe írt szám + 1 esetében is éppen ezt a mentális folyamatot várjuk el a tanulóktól. A „keretbe írt szám + 1" rész értéséhez és a számításhoz a fogalom folyamat arculatát kell érteni. A megoldás megadásához pedig már a „keretbe írt szám + 1" objektum arculatának kezelése, azaz számok nagyságának összehasonlítása szükséges.)

További előrelépést jelent az algebra tanulásában a szabállyal rendelkező gépek, táblázatok „működését" leíró szabályok igazságának, azonosságának vizsgálata. Egy ilyen feladatot mutat be a *3.1. ábra*.

Válaszd ki, hogy melyik összefüggés teljesül ennek a táblázatnak minden oszlopára!

♥	4	7	9	5	11	13	15	19
Δ	2	5	7	3	9	11	13	17

a) ♥ : 2 = Δ

b) ♥ – 2 = Δ

c) Δ + 2 = ♥

d) ♥ – 3 < Δ

3.1. ábra. Példa a „szabállyal rendelkező gép" típusú feladatokra

Ezeken a feladatokon keresztül olyan tapasztalatokat szereznek a tanulók, amelyek az azonosságok, azonos átalakítások, ekvivalens átalakítások témaköreit készítik elő. Az ilyen feladatok megoldása egyébként a szabályindukcióra épül, és fejleszti az induktív gondolkodást is. Ugyanakkor a függvényfogalom alakulását is segítik az ilyen feladatok, természetesen megfelelő tanítási-tanulási módszerek és ehhez csatlakozó tevékenységek esetén.

A szöveges feladatokkal kapcsolatban természetes módon segíthető a pre-algebrai ismeretek alakulása: az algebra nyelvére való fordítás folyamata. Itt rendkívül sok esetben találkozunk azonban a sietséggel, a formalizmust erőltető gyors megoldásokkal. Az 5–6. osztályos tankönyvek egy része is igen hamar szorgalmazza a formális eljárások tanítását és az olyan kifejezésekkel való manipulálást, amelynek megértése még nem történhetett meg.

Holott az egyedi esetek különálló megoldása, a tevékenység (pl. legyen a pálcika hossza az első nap alatt megtett út! ...), a rajz, a rajzos modellek kialakítása és annak algebrai nyelvre történő lefordítása sok időt igénylő feladat. Általános modellként való alkalmazásuk előtt azonban konkrétum közeli mély megértés szükséges. (Egy $r + 10 = 100$ összefüggésben nem mindegy az algebra, a formulák jelentésének későbbi megértése szempontjából, hogy a tanuló arra gondol-e, hogy r a radírt jelenti, vagy tudja azt, hogy r a radír árát jelenti ebben az összefüggésben, mégpedig abban a pénzegységben, amelyben a 10 és a 100 adatokat is megadták a feladatban. Eleinte a formális megoldásban nem akad meg a folyamat akkor sem, ha nem megfelelő a szemlélet, de később elérkezik a tanuló egy olyan szakadékhoz, amelyen az elsietett absztrakció következtében már igen nehezen ugrik át.)

Relációk, függvények, sorozatok

A relációk, függvények, sorozatok tartalmi terület egyaránt szolgálja a matematikától mindenki által elvárt „logikus gondolkodás" fejlesztésének, valamint a matematikai fogalmak, modellek további alakulásának lehetőségét.

Merőben újnak számított a témakör egésze az 1978 előtti tananyagokhoz képest. A sorozatok témakörnek az elődjeként a „sorminta" rajzolása tekinthető, ami igen jó volt, de sajnos a legtöbb helyen kikopott a tanítói eszköztárból. Jól szolgálja a sorozat informális fogalmának bevezetését, és díszítésként való alkalmazása a minta (pattern) esztétikai vonását emeli ki, ami a 'matematika szép' gondolattal segíti a matematika iránti pozitív attitűd kialakulását.

A kezdeti időszakban a relációk bizonyos tulajdonságok észrevételét, kiemelését szolgálják. Nyelvi megfogalmazásuk, jelölésmódjuk a matematikai kommunikációba való belépést jelenti. Amikor eligazodni tanulnak adott konkrét kapcsolatokban, dolgok, fogalmak között találnak olyan összefüggéseket, amelyek egyre jobb megértésüket teszik lehetővé. A mondott tevékenységek fejlesztik a tanulókban elemi gondolkodási formák alakulását, viszonyok áttekintésének képességét.

Az 1–6. osztályokban sokkal inkább a „modellszerep" emelődik ki (reláció, függvény, sorozat mint egy valódi probléma matematikai modellje). A témakör fontos feladata az összefüggés-felismerő képesség fejlesztése. Természetesen sok elemi ismeret is feltárul a három témakörrel kapcsolatban, de a legfontosabb maga az összefüggés-felismerő képesség fejlesztésének folyamata, nem pedig a néhány memorizálható jelölés, fogalom elem.

Ki kell emelni az arányossági gondolkodás fejlesztésének feladatát, amelynek elnagyolása még mindig jellemzi az iskolai gyakorlatot. Talán itt hiányzik legjobban a tanárok beleérző képessége, nem értik a tanuló gondolkodásának lassú fejlődését, nem értik a sok-sok tapasztalat bemutatásának szükségességét. Azt hiszik, hogy könnyű például az állandó növekedés látását, érzetét felváltani az arányos (szorzásos) növekedésével. Az a tény, hogy sok helyen már a megfelelően kialakult arányossági gondolkodás előtt erőltetik a mértékegység-váltási feladatokat, éppen erről a szakmai hiányosságról tanúskodik.

Megoldható korai arányossági gondolkodással az a feladat, hogy: „melyik több, fél óra vagy 50 perc?” Ekkor a gyerek úgy gondolkodik, hogy 30 + 30 = 60, tehát fél óra tartama 30 perc, és erre alapozza megoldását. Ha azt javasolják neki, hogy a feladatot úgy oldja meg, hogy ossza el a 60-at kettővel, akkor már a

$$\frac{60}{2} \cdot 2 = 60$$

fordított arányossági gondolkodást kellene használnia, amelyet esetleg csak 11-12 évesen sajátít el. Sok mértékegység-váltási feladat nem kellően átgondolt megfogalmazása ugyanígy a fordított arányossági kapcsolat alkalmazását várja el már korai időszakban (akár alsó tagozatban) a tanulótól.

A relációk, függvények tanításának gyakorlata írott, rajzolt modelleket készít elő; a számegyenes, táblázat, gráf, párhuzamos számegyenesek, derékszögű koordináta-rendszer mint modellek beépülnek a kommunikációs eszköztárba; ezáltal magasabb szintű fogalmi gondolkodás elérését teszik lehetővé. Segítségükkel közelíthető meg például a reláció, a függvény inverzének eleinte ugyan elemi gondolatköre már az adott iskolai fokozatokon is.

A matematika számos témaköre lehetőséget ad a relációk–függvények témakör fejlesztésére is. Például a geometriában is segítséget ad az egyenesek párhuzamosságának, merőlegességének relációként való vizsgálata is stb.

Ugyanakkor a témakör elterjedt tanítási módja, amelyik igen alkalmas a sejtés és a bizonyítás különbözőségének megérzésére, nem fektet elég súlyt a bizonyítási igény fejlesztésére (*Csíkos*, 1999). Sok tanár megelégszik például egy sorozatban mutatkozó szabály kimondásával, de annak a gondolata, hogy a szabály akármilyen természetes számra való fennállása még nem nyilvánvaló, nem kerül elő. Sem az, hogy a megfogalmazott sejtés felhasználása bizonyításra is szorul. Ezekre a gondolkodási folyamatokra kevesebb rutinfeladat megoldása esetén kerülhet sor, valamint a kételkedés mint természetes emberi tulajdonság állandó jelenlétekor.

Geometria, mérések

A geometria iskolai tanítása körül sok nemzetközi vita folyt. A geometria tradicionális axiomatikus tanítása nyilvánvaló kudarcot vallott. A *Bourbaki-csoport* nagy harcot folytatott azért, hogy nemcsak a matematika tudományából, hanem az iskolai tárgyalásmódból is kerüljenek ki a szemléletes tárgyalásmódra építő didaktikai megoldások. Euklidesznek mennie kell! – adta ki a jelszót *Dieudonné* (*Robitaille* és *Garden*, 1989). Több országban ezek hatására a geometria lényegében kiszorult az iskolában tanított témakörök közül. Ami megmaradt, az a kerület- és területszámítás témaköre volt, ami lassan még kiegészült néhány elemi alakzat és minta *(pattern)* vizsgálatával a nyolcvanas években. Nem követte azonban ezt a tendenciát a magyar matematikatanítás gyakorlata. Itt is változás történt az 1978 előtti tantervekhez képest. A változás nemcsak a tananyagban történt, hanem a tananyag javasolt feldolgozásában is.

A geometria tanításában az alsó tagozatban addig szokatlan egyedi esetekből való kiindulás módszere került előtérbe. (Tehát nem a pont, egyenes, szakasz stb. fogalmakból indulunk.) Például az építések kapcsán előbb kerülnek elő a térbeli alakzatok, mint a síkbeliek; sokféle négyszöggel való munka, ezek tulajdonságaik szerinti csoportosítása előzi meg a négyszögek definiálását stb. Holott korábban éppen a speciális esetek tanításával való kezdésre tevődött nagy hangsúly. A kisgyerek fogalomalkotásához való alkalmazkodás kezdte fokozatosan áthatni a geometriai fogalmak alakításának útját. *Rickart* (1998) szerint a geometria egyik sajátossága (például az aritmetikához és az algebrához képest), hogy a benne használt fogalmak egészen közel állnak a hétköznapi nyelvhez, és emiatt a diákok nagy része könnyűnek érzi az elemi geometriát. A geometriai definíciók alkotása sokéves előkészítő munka során, apránként válik a tanulók kommunikációs eszközévé, felhasználva a készen magukkal hozott, naiv, hétköznapi fogalmakat, és azokat precíz matematikai tartalommal töltve meg.

A geometriai fogalmak egymásra épülésének egy modelljét *van Hiele* alkotta meg. A modell explicit hatása nyomon követhető az amerikai matematikai értékelési keretekben (*National Council of Teachers of*

Mathematics, 2000). *Van Hiele* modelljében a geometria tanulásának egymásra épülő, szekvenciális lépcsői szerepelnek (*van Hiele*, 1986; *Senk*, 1989). A geometriai tudás elsajátítása ez alapján a vizualizációból indul (vagyis a vizuális képzetek és a megnevezésükre szolgáló fogalmak összekapcsolásából), és végül a deduktív elemzés szigoráig jut el a geometriai gondolkodás. Figyelemre méltó, hogy bár ez a sorrendiség és egymásra épülés tudománytörténetileg és a gyermeki gondolkodás fejlődésében is megfigyelhető, a tanárképzésben gyakran alárendelt szerepet kap ennek a fejlődési útnak a végigjárása, és a deduktív felépítés válik dominánssá.

Alapkoncepciójában a van *Hiele* modellel rokon az úgynevezett SOLO-modell *(Structure of the Observed Learning Behavior),* amelyet piagetiánus és bruneri-dienesi alapokon állva használhatunk a matematikai (és ezen belül speciálisan a geometriai) tudás értelmezésére és értékelésére. A van Hiele-i szintekhez képest további elem, hogy jellemző életkori szakaszokhoz kapcsolja a tudásfejlődés ciklusait. A ciklus kifejezés szándékolt, hiszen látszólag ugyanazokat a matematikai elveket és fogalmakat életünk során újra és újra tanuljuk és mentálisan reprezentáljuk. A most minket érdeklő 6–12 éves korosztály számára a SOLO-modell tanulsága az, hogy a korábbi életkorokból a szenzori-motoros (enaktív) és ikonikus tudáselemekhez az iskolázás éveiben csatlakoznak hozzá az írott nyelvi és a matematikai szimbólumok. Jellemző, hogy a tanulási ciklusok során a tanuló először egy adott szempontra vagy adatra figyel, majd több forrást használ, végül pedig egy koherens képet alkot önmaga számára, majd a következő tanulási fázisban elölről kezdődik egy újabb ciklus. A tanulási ciklus elemeihez oktatási és értékelési fázisok társíthatók (*Pegg* és *Tall*, 2010).

A tanulók tevékenysége, a geometriai konstrukciók létrehozása többféle fejlesztést szolgál, egyúttal többféle geometriai terület előkészítésében is szerepe van. Ez a kiindulópontja a geometriai transzformációk tanításának, ami ugyancsak újként jelent meg az 1978-as tantervben. A konstrukciókról való beszélgetés, kommunikáció segíti a tulajdonságok kiemelését, nem „rátukmálja" a gyerekekre az elnevezéseket, hanem azok mint általuk keresett nyelvi pontosítások „kerülnek elő". (Például a párhuzamos papírszalagból vágott négyszögek összefoglaló neve lehet az, hogy „trapéz". A megépített tetraéder élét alkotó szívószál helyett egy idő után azt mondjuk, hogy „él" stb.)

A „szög” fogalma is előkerülhet úgy, mint a kommunikációt segítő kifejezés, amikor például a gyerekek egy deltoid alakú sárkánnyal kapcsolatban spontán módon csak a szélesebb-keskenyebb kifejezést használnák. A szög fogalmának tanítása még egyáltalán nem érte el azt a mélységet, ami elvárható. Igen sok helyen nem alakzatok, helyzetek megkülönböztetésére, leírására alkalmas fogalomként kerül elő (pl. mit jelenthet az erős szó ebben a szakszövegben: „erős lejtés esetén a csapadék hatásossága az eső befejeztével gyakorlatilag megszűnik”?). Igen sok tankönyvben is a szög mérése, a szöggel kapcsolatos elnevezések tanítása az, ami előkerül. Ezáltal egyáltalán nem történik meg a későbbi évek, például a középiskola szögfüggvényeinek fogalmi előkészítése. Kevesebb paradoxon kerül be a tanítási gyakorlatba, esetleg azzal a kifogással, hogy „nem akarják megzavarni a gyerekeket”. Holott a jól előkészített paradoxon meghívja a belső motivációt, segíti a tanultaknak a hosszú távú memóriába való bekerülését.

Az adott feltételű konstrukciók készítése a gondolkodásmódok közül különösen fejleszti a kombinatív gondolkodás alakulásának kezdetét, amikor a „minél többféle megoldást állíts elő” utasításnak megfelelően tevékenykednek a tanulók. A speciális konstrukciós eszközök szerepeltetése, a feltételek változtatása, szigorítása pedig akár az eukleidészi szerkesztés gondolatkörének megértését segíti elő.

A méretes geometria elemeinek tanítása nem számított új témakörnek. Az azonban, hogy maga a mérés elméleti megalapozása már a kisiskolás korban kezdődik, valamint a közelítés elve is korán megemlítésre, sőt alkalmazásra kerül, újnak számított. Ugyancsak máig tartó értetlenség kíséri azt a javasolt tanítási módszert, amely a kerület-, terület- és felszínszámítást konkrét problémák megoldása során már alkalmazza, ugyanakkor a „képlet” megtanításának időszakát elnyújtja.

A geometria és a mérések tartalmi területen belül a tantervek, a tankönyvek és az értékelés számára is több részterületet lehet definiálni. Megjegyezzük, hogy az IEA társaság nemzetközi rendszerszintű méréseiben a geometria és a mérés elkülönült területekként jelentek meg. Ezt részben az SI bevezetése körüli átmeneti időszak indokolta. A „szorosabb értelemben” a geometriához sorolt területek között a különböző geometriai alakzatok létrehozása (manipulatív, majd képi szintű konstrukciója) és a geometriai alakzatokkal végzett transzformációk jelentenek további részterületeket. További részterületként a térben történő tájékozódás határozható meg, ugyanakkor ennek számos átfedése van a „Földünk-környezetünk” és az „Ember a természetben” műveltségi területek tartalmi követelményeivel.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

Az 1978-as évben ezeknek a témaköröknek a tantervbe kerülése (*C. Neményi*, *Radnainé* és *Varga*, 1977) igen nagy felfordulást okozott. Egyrészt amiatt, hogy a tanítók még nem tanulták a képzőintézményekben. A tanulók gondolatainak megértése, esetleges korrigálása ezekben a témakörökben különösen próba elé állíthatja a tanítókat, tanárokat. Ez is oka lehet a témakörök kerülésének. A szülők sem tanulták ezeket a témaköröket az iskolában (esetleg csak egyetemi szinten), számukra túl „magasnak” vagy túl játékosnak, időt vesztegetőnek tűnt zászlók színezéséről, kockadobásról beszélgetni a tanórákon. Az új matematika tanterv körül fellángoló publicisztika, amely javarészt támadó volt, ugyancsak ezen témakörök tanítása terén bizonytalanította el legjobban a tanítókat, tanárokat. Azt mondhatjuk, hogy ez a hatás a mai napig tart. Még hosszú képzési, továbbképzési folyamat szükséges ahhoz, hogy a tanítók, tanárok kellő rugalmassággal vállalják a tanulókkal való együttgondolkodás buktatóit, továbbá fontosnak érezzék – a tananyag megtanítása mellett – a tanulók gondolkodásának fejlesztését, amelyre a kombinatorika és a valószínűségszámítás témakör különösen sok lehetőséget nyújt (lásd *Rényi*, 1973). Azonban bármilyen formalizáló, axiomatikushoz közelítő felépítés éppen ellentétes célt érhet el. Iskolarendszerünkben a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének szükségességére empirikus kutatások is felhívták a figyelmet (*Bán*, 2002).

A valószínűségi és a kombinatív gondolkodást összekapcsolja a megközelítésmód induktív jellege, vagyis a pszichológiai értelemben vett tapasztalati, induktív, sok esetben divergens gondolkodás. Hiszen a kombinatív gondolkodás az, amelyik nem elégszik meg azzal, hogy egy feltételrendszernek egyetlen megoldását találjuk meg csupán, hanem az összes esetet számításba veszi. Majd ezt a tudást felhasználva kereshető meg egy adott helyzethez illeszkedő optimális megoldás. A valószínűségi és statisztikai gondolkodásmód, amelyet a szakirodalom a sztochasztikus vagy korrelatív gondolkodásmód névvel is illet, képes gondolkodni, döntéseket hozni nem determinisztikus eseményekkel kapcsolatban. Sőt a determinisztikus eseményekkel kapcsolatos megállapításokat, döntéseket is sokszor azokat sztochasztikus eseményeknek tekintve hozzák meg a tudósok, gyakorlati emberek (például a meteorológiában, menetrendekkel kapcsolatban, szimulációk igénybevétele során stb.).

Mivel ezek a gondolkodásmódok azzal a sajátos vonással rendelkeznek, hogy a nem biztos eseményekről is sokat tudunk mondani matematikai módszerekkel, ezért ezeket a gondolkodásmódokat a lehető legkorábban az iskolában is fejleszteni kell (hiszen spontán módon mindenképp fejlődnek valamilyen irányba a köznapi élet élése során, lásd még *Vancsó,* 2010). Ellenkező esetben olyan torzulás, „merevség" tapasztalható, amely a többféle alternatíva felvázolását, az azok közötti választást vagy a nem determinisztikus eseményekkel kapcsolatos ésszerű döntést lehetetlenné teszi. Hasonlóan más matematikai területekhez, a természetes emberi gondolkodás (és ezen belül a már óvodáskorban fejlődő gondolkodási komponensek) matematikai szempontból „tévképzetnek", szebben fogalmazva: inkorrekt heurisztikának tekinthető. A valószínűségi és kombinatív gondolkodás területén ilyen elhajlást tárt föl *Tversky* és *Kahneman* (1983), valamint *Even* és *Tirosh* (2008).

Maga a tananyag nem nagy, de a gondolati fejlődés hosszú út eredménye. Arról nem is beszélve, hogy a véletlen eseményekkel kapcsolatos intuitív gondolkodástól azt várjuk, hogy merítsen az iskolában szerzett tapasztalatokból.

A valószínűség témaköre a törtekkel való műveletvégzéshez alkalmas terepet nyújthat, akár százalék, akár más alakban adott az esemény valószínűsége. A témakör tanításának gyakorlata egyelőre kevesebbet valósít meg ezekből annál, mint ami az 1978-as tanterv készítőinek reménye volt. A törtekkel való műveletvégzés ugyanúgy tanítási anyag, mint azelőtt, a valószínűségek kiszámítását mint gyakorlati terepet azonban kihagyják a tanítási anyagok, a kerettantervek készítői.

Az elemi számítások kihagyásának az a veszélye, hogy a gyakoriság, relatív gyakoriság, statisztikus valószínűség, a számtani átlag fogalmak nem a problémamegoldásban gyökereznek; az adatábrázolások jelentésének az 1–6. osztályban elvárható fogalmi előkészítése esetleg puszta formalitás (verbális definíció) marad.

„A matematikai gondolkodás módszerei" tartalmi terület

A „matematikai gondolkodás módszerei" témakör Magyarországon a 78-as tanterv bevezetésével került be először az iskolai tananyagba. A halmazok témakörrel való közvetlen foglalkozás a nemzetközi szinten megújuló tantervek legtöbbjében szerepelt, de a tárgyalás módja és formális volta (a definíciók, jelölések használata) korántsem volt olyan visszafogott, mint a magyar tanterv esetében. Bár hamarosan a magyar tanítók és tanárok is hajlottak arra, hogy minél több szakszó használatával mutassák meg azt, hogy „milyen komoly" matematikát tanítanak. (A matematikai gondolkodás fejlesztésének pszichológiai kérdéseiről részletesebben lásd e kötet első fejezetét.)

Eleinte nehézséget okozott a matematikát oktatók körében annak elfogadása, hogy a személyek, tárgyak összehasonlításának, sokaságokból való válogatásnak, rendezésnek mennyire nagy szerepe van a „tulajdonságok észrevevésében", az akaratlagos megfigyelés fejlesztésében, a tapasztalatok rögzítésében, a megfigyelések megfogalmazásában.

Új témát jelentett a fogalmak kapcsolatainak és halmazok kapcsolatainak megfeleltetése (például: alárendelt–fölérendelt fogalom). A magyar nyelvben használatos „nyelvi-logikai" fordulatok („minden…", „van olyan…" stb.) használatának a matematikában való előrehaladással való szoros kapcsolatára is ekkor kezdtek figyelni a tanárok. Azaz az elnevezések használata nélkül a kvantoros állítások és tagadásaik tudatos feldolgozására került sor. Többek között éppen ezek a nyelvi-logikai fordulatok hiányozhatnak az iskolába kerülő hátrányos nyelvi helyzetű gyerekek nyelvhasználatából. Ezért a matematikai megértés elemi feltétele ezeknek a hiányoknak a felszámolása. Hasonló módon a problémamegoldáshoz szükséges szövegértés fejlesztése is alapvetően fontos a matematikaórán is (*Csíkos*, 2003).

A logika elemeinek megjelenése segítette annak a gyakorlatnak a kialakulását, hogy a tanuló feladata állítások megfogalmazása is legyen, nemcsak az, mint korábban, hogy mások által kimondott állításokat pontosan megtanuljon. Igen nagy vitát váltott ki a „nyitott mondat" témakör megjelenése. Nem segítette a helyzetet, hogy a témakör már más országokban iskolai anyag volt. Nehéz volt elfogadni azt, hogy ennek – az egyenletet, egyenlőtlenséget is magába foglaló tágabb kategóriának, a logikai függvénynek – a tanítására kerüljön sor.

A bizonyítás igényének megjelenítése már az első osztálytól kezdve fejlesztendő terület, de az ebben való egyéni előrehaladás tanulónként nagyon eltérő lehet. Ennek ellenére érdemes megkívánni az egyes témakörök tárgyalása során a kételkedés, az érvelés, a bizonyítás gondolatkörének jelenlétét, valamint a tanulók aktív előrehaladását ezeken a területeken.

Az alsó tagozatos tantervi törekvéseket a felső tagozat részéről rengeteg támadás érte. Cikkekben, tanári testületek ülésein gyakori szlogen volt: „ti csak tanítsátok meg a gyerekeket számolni, mi a felső tagozaton majd megtanítjuk őket gondolkodni". Ez a felfogás nem csupán azért téves, mert a számolás megtanításában is jelentős gondolkodásfejlesztésre van szükség és lehetőség. Tetten érhető benne az a felfogás, amely a számolást mechanikus készségként értelmezi, és nem vesz tudomást arról, hogy a legegyszerűbb számolási műveletekben is – még felnőttkorban is – jelentős stratégiaváltások történnek (*Lemaire* és *Lecacheur*, 2004). A gondolkodásfejlesztés fontosságát fejezte ki a *Rátz László* vándorgyűlésen *Surányi János* professzor emlékezetes mondata: „Nem tudom, hogy meg lehet-e a gyerekeket tanítani gondolkodni, de azt tudom, hogy a gondolkodásról igen nagy sikerrel lehet leszoktatni őket."

Azt lehet mondani, hogy ennek a tantárgyi fejezetnek a tanítása lassan haladt előre. Ugyanakkor mára a magyar matematikatanítás részévé vált. A NAT 95-ben jelent meg először az önálló *„Gondolkodási módszerek*" fejezet, és ebbe került a 78-as tantervben még külön szereplő *„Halmazok, logika"* témakör. Ez egyúttal minőségi változást is jelentett, mert ez az a „tantervi pillanat", amely a gondolkodás fejlesztését nem a matematikatanítás melléktermékeként, hanem a tanítás fókuszaként jeleníti meg.

A matematikai gondolkodás mibenlétének megragadása, módszereinek leírása sarkalatos, ugyanakkor nehéz kérdés (*Byers*, 2007). Nem könnyű vállalkozás, hogy megfogalmazzuk, mi is a matematikai gondolkodás, de tény, hogy különbözik a köznapitól. Számtalanszor hallhatjuk bizonyos érvekre, bizonyos véleménnyel kapcsolatban: „látszik, hogy matematikus vagy", „ez csak egy matematikusnak jut eszébe" stb. Nagy valószínűséggel azért, mert a matematika rászorítja az embert a precíz fogalmazásra, rászoktat a részletekre való figyelésre, az egyes momentumok, információk súlyozásának fontosságára. Hozzászoktat, hogy azonnal észrevegyük, ha hiányosak az adatok, illetve „összemosódnak" nagyon is különböző dolgok. Két legfontosabb pillére az absztrakció és a szigorú következtetési szabályok betartása.

A matematikai gondolkodásban fontos szerep jut a következőknek:
(1) lényeglátás,
(2) képesség a bonyolult rendszerek, feltételrendszerek áttekintésére, egyszerűsítésére,
(3) kombinációs készség,
(4) modellalkotás, absztrakció,
(5) intuíció, sejtések megfogalmazása (pl. példák, speciális esetek vizsgálatával),
(6) algoritmikus gondolkodás (a dedukció is ilyen).

E képességek alkalmazása, e szellemi tevékenységek aktív átélése szükséges akkor is, ha valaki csupán alkalmazója, felhasználója kíván lenni egy matematikai módszernek, illetve megrendelője kíván lenni egy matematikai vizsgálódásnak. Szükségesek ezek a képességek a hibajavításokban. Bizonyos mértékig pedig mindenkinek szüksége van ezekre a készségekre ahhoz, hogy a mai modern, technika- és számítógép-központú társadalmunk mindennapjaiban jól eligazodjon.

Sok matematikus véli úgy (*Dudley*, 2010), hogy a közoktatásbeli matematikatanítás egyik legfontosabb célja – természetesen a számolástanítás mellett – a gondolkodás, azaz a fent felsorolt készségek fejlesztése. Nemrég jelent meg *Dudley* cikke az *American Mathematical Society* lapjában, amelynek címe – ebben a folyóiratban legalábbis – igen figyelemfelkeltő, bár rögtön az első mondat pontosítja a témát: „*What is mathematics education for?*" (Mire való a matematikaoktatás?). A szerző ebben amellett érvel, hogy a matematikatanításnak a számolástanítástól eltekintve semmi más célja és haszna nincs, mint a gondolkodásfejlesztés. A fő érve ennek alátámasztására pedig az, hogy azokban a munkakörökben sem használnak komolyabb matematikát a munkavállalók, ahol a munkáltató elvár ilyen ismereteket. A folyóirat néhány későbbi száma (AMS, 2010) több olvasói hozzászólást közöl ehhez a cikkhez. Az egyik alátámasztja e cikk érvrendszerét azzal, hogy tapasztalata szerint a legtöbb természettudós, mérnök és kockázatelemző is legfeljebb Excelt és általános iskolai szintű matematikát használ. Más hozzászólók is foglalkoznak a munkavállalóktól elvárható matematikai ismeretek témájával. A vitában megjelenik az a szál is, hogy a matematika maga az emberi kultúra része, hasonlóan az irodalomhoz, történelemhez, zenéhez stb., melyeket szintén nem csupán azért tanítunk az iskolában, mert a munkavállalóknak szükségük van ezen ismeretekre munkájuk során. Viszont egyik hozzászóló sem vitatja, hogy fontos a matematikatanítás gondolkodásfejlesztő hatása, és hogy korreláció van a magasabb matematikatudás és a jobb munkavállalói képesség között.

Nagyon fontos a matematikatanítás a gondolkodásfejlesztés szempontjából. Természetesen nem hihetjük azt, hogy más iskolai tantárgyak ne fejlesztenék a logikus gondolkodást. Éppen az a feladatunk, hogy azt a sajátosat keressük meg, amelyet a matematika tárgy keretében tudunk nyújtani. Azonban a matematika tantárgy léte nem oldja meg automatikusan a logikus gondolkodás fejlesztését. A megfelelő módszerek megtalálásával fenntartható az állandó érdeklődés, szokássá válhat a kapott információk ellenőrzése, az ok-okozati összefüggések felismerése izgalmának átélése (*Pólya*, 1945, 1954, 1981).

Az sem magától értetődő, mit jelent egy-egy ismeret birtoklása. Ahhoz például, hogy valaki érdemben használni tudja az Excelt – azaz ne csak arra használja, hogy szavakat gépeljen táblázatokba, hanem összetettebb számításokat, kimutatásokat, statisztikákat készítsen vele – egyrészt ismernie és használnia kellene tudni a beépített függvényeket, amelyek megértése kevés kivételtől eltekintve meghaladja az általános iskolai matematika anyagot, sok esetben a középiskolait is. Másrészt – és ez a nehezebb, a komolyabb gondolkodást igénylő feladat – egy gyakorlati probléma esetén ki kell találnia, hogyan fordítható le a feladat a matematika nyelvére, majd ezután azt, hogy a rendelkezésére álló függvények segítségével hogyan tudja ezt meg is valósítani. Nem könnyű az ismeretek, eljárások értő, nem pedig „papagájszerű" megtanítása. Az egész matematikatanításunk törekvése az lehet, hogy már a legkisebb kortól az értő tanulás kerüljön előtérbe.

Mennyire függetlenek egymástól a tantervi matematikai témakörök?

Figyelembe kell vennünk, hogy a tantervi témakörök nem puszta tanítási célt fogalmaznak meg, hanem egyúttal a tanuló személyiségfejlesztésének és matematikai gondolkodásfejlesztésének is színterei. Sok szempont teszi szükségessé azt, hogy a matematikai témakörök egymással párhuzamosan (de ne mozaikszerűen) kerüljenek tárgyalásra. Például a természetes szám darabszám, valamint mérőszám tartalmának fejlődése együtt és egymást erősítve halad a műveletek fogalmának alakulásával. Mindkettőt erősítheti a sorozatok témakörének először akár mint új problémaszituációnak a megjelenése. Ugyanakkor a számsorozat mint objektum erős kiinduló belső képet szolgáltathat a tanulók számára a természetes számok halmazának fogalmi megragadásához. A témakörök együttes tárgyalása sok didaktikai lehetőséget hordoz.

Természetesen az egyes témakörök didaktikai felépítésének belső logikája azt is szükségessé teszi, hogy egy-egy témakörben jobban, hosszabb időtartamban elmélyedjenek a tanulók. Ezáltal érezhetik meg a témakör sajátos belső logikáját, „játékterét".

A témakörök összeszövésének didaktikai módszere, a komplex módszer, amely *Varga Tamás* didaktikai koncepciójának egyik alapeleme volt, a tanítási gyakorlatban megvalósulni látszódik (*Halmos* és *Varga*, 1978). A tanuló gondolkodásfejlődésének ütemében ad lehetőséget a matematika egységének, témaköri összefonódásainak bemutatására már kisiskolás kortól. A gondolkodásfejlődés apró előrelépései nem teszik lehetővé azt, hogy egy-egy témakör tananyagában nagy előrehaladást lehessen elérni. A szimultán fejlesztés viszont egyrészt azt biztosítja, hogy valamennyi matematikai témakör épülésében előrehaladjanak a tanulók addig, amíg azt a gondolati fejlődés adott szintje lehetővé teszi. Másrészt biztosítja azt, hogy ne kelljen gondolati ugrásokat, fogalom szintű előrehaladást siettetni. A gondolkodás absztrakciós szintjének előrehaladása ad lehetőséget a jelöléshasználat egyre magasabb szintjére, a matematikai objektumokról való gondolkodás és a verbális megfogalmazások fejlődésére is.

A tanulók egyes témakörökben való előrehaladása nem egymástól függetlenül történik. Például az arányossági gondolkodás megfelelő szintjének kialakulása előtt teljesen esetleges az, hogy mértékegység-átváltásokat tudnak-e végezni a tanulók. Ugyancsak akadálya lehet ez a geometriai mennyiségek közötti összefüggések függvényszerű látásmódjának.

A matematikai gondolkodás módszereinek apródonként való elsajátítása hozhatja mozgásba ezeket a tudáselemeket. Ez jelenti azt a szövetet, amely a széthulló ismereteket kompetenciákba szervezi, és egyre magasabb szintű elvonatkoztatásokra, lényegkiemelésre, szerkezeti váz átlátására teszi képessé a fejlődő gyermeki személyt. Ez biztosíthatja, hogy a hatodik osztály végeztével a kisdiákok a matematikai gondolkodás egyre kompetensebb használói legyenek.

Irodalom

AMS (2010): Letters to the Editor, *Notices of the American Mathematical Society*, **57**. (7), 822–823.

Bagni, G. T. (2010): Mathematics and positive sciences: A reflection following Heidegger, *Educational Studies in Mathematics*, **73**. 1. sz. 75–85.

Bán Sándor (2002): Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó Budapest, 231–260.

Beke Manó (1900): *Számtan és mértan. A gazdasági ismétlő iskoláknak*. Wodianer és Fiai Könyvkiadó, Budapest.

Beke Manó (1911): *Vezérkönyv a népiskolai számtani oktatáshoz*. Magyar Tudomány-Egyetem nyomda, Budapest.

Beke Manó és Mikola Sándor (1909): *A Középiskolai Matematikai Tanítás Reformja.* Franklin Társulat, Budapest.

Bildungstandards in Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Luchterhand- Wolter Kluwe: München, Neuwied, 2005.

Borel, A. (1998): *Twenty-Five Years with Nicolas Bourbaki, (1949–1973).* http://www.ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb3.htm (28.01.2011)

Burkhardt, H. és mtsai (1984): *Problem Solving – A World View. Proceedings of problem solving theme group ICME 5.* Adelaide.

Byers, W. (2007): *How Mathematicians Think?* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Julianna és Varga Tamás (1977): Matematika 1–8. osztály. In: *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve*. 114/1977. (M.K.11.) OM számú utasítás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

Csapó Benő (2000): A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *Magyar Pedagógia*, **100.** 3. sz. 343–366.

Csíkos Csaba (1999): Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia,* **99.** 1. sz. 3–21.

Csíkos, C. (2003): Matematikai szöveges feladatok megoldásának problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 1. sz. 35–55.

Csíkos Csaba (2007): *Metakogníció – A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Dávid, L (1979): *A két Bolyai élete és munkássága*. 2. kiadás. Gondolat Könyvkiadó, Budapest.

Dehaene, S. (2002): Verbal and nonverbal representations of numbers in the human brain. In: Galaburda, A. M., Kosslyn, S. M. és Christen, Y. (szerk.): *The Languages of the brain*. Harvard University Press, Boston. 179–190.

Dewey, J: (1933): *How we think.* D. C. Heath and Co., Boston.

Dossey, J., Csapó, B., de Jong, T., Klieme, E. és Vosniadou, S. (2000): Cross-curricular competencies in PISA. Towards a framework for assessing problem-solving skills. In: *The INES Compendium. Contributions from the INES Networks and Working Groups.* Tokyo: Fourth General Assembly of the OECD Education Indicator Programme. OECD, Paris, 19–41.

Dudley, U. (2010): What is mathematics for? *Notices of the American Mathematical Society*, **57**. 5. sz. 608–613.

Even, R. és Tirosh, D. (2008): Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning and thinking. In: English, L. D. (szerk.): *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2nd edition. Routledge, London, 219–240.

Freudenthal, H. (1980a): *Weeding and Sowing*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1980b): *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gardner, M. (1997): Book review on What is Mathematics, Really? by Reuben Hersh. *Los Angeles Times*, Oct 12, **8.** [Magyarul: Mi is igazából a matematika? Vélemény Reuben Hersh könyvéről. *Természet Világa*, 1998. **129**. 3. sz. 126–127.] http://www.termeszetvilaga.hu/ tv98/tv9803/gardner.html

Ginsburg, H. P. (1998): Toby matekja. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest, 175–199.

Gray, E. M. és Tall, D. O. (1994): Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. **26**. 2. sz. 115–141.

Halmos, Mária és Varga Tamás (1978): Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realization Hungary. *Educational Studies in Mathematics* **9**. 225–244.

Hersh, R. (1997): *What is Mathematics, Really?*. Oxford: Oxford University Press. [Magyarul: *A matematika természete*. Typotex Kiadó, Budapest, 2000.]

ICMI, 1908. http://www.icmihistory.unito.it/portrait/klein.php

Klein, S. (1987): *The effects of modern mathematics*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 35–52.

Kosztolányi, J. (2006): *On teaching problem-solving strategies*. PhD thesis, University of Debrecen. Debrecen.

Lemaire, P és Lecacheur, M (2004): Five-rule effects in young and older adults' arithmetic: Further evidence for age-related differences in strategy selection. *Current Psychology Letters*. **12**. 1. sz. http://cpl.revues.org/index412.html

Mérő László (1992): Matek, torna, memoriter. *Café Babel* 5–6. sz. 69–76.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Olson, J. F., Berger, D. R., Milne, D. és Stanco, D. M. (2008): *TIMSS 2007 Encyclopedia. A guide to mathematics and science education around the world*. Volume I, A – L. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College, Boston.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nemzeti alaptanterv (2007): http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_ implement_090702.pdf

A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003 (XII. 17.) Korm. rendelet (a 202/2007. (VII. 31.) Korm. rendelettel módosított, egységes szerkezetbe foglalt szöveg) http://www.okm.gov.hu/kozoktatas/ tantervek/nemzeti-alaptanterv-nat

OECD (2009): *Learning mathematics for life: A perspective from PISA*. OECD, Paris.
Pegg, J. és Tall, D. (2010): The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In: Sriraman, B. és English, L. (szerk.): *Theories of mathematics learning – Seeking new frontiers*. Springer, New York, 173–192.
Pethes János (1901): *Vezérkönyv a számtantanításhoz. Tanítók és tanítónövendékek számára.* Fischel Fülöp könyvkiadása, Nagykanizsa.
Péter Rózsa és Gallai Tibor (1949): *Matematika a gimnázium I. osztálya számára.* Tankönyvkiadó¸ Budapest.
Pólya, G. (1945): *How to solve it.* Princeton University Press, Princeton.
Pólya, G. (1954): *Mathematics and plausible reasoning* (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton University Press, Princeton.
Pólya, G. (1981): *Mathematical Discovery* (Volumes 1 and 2): Wiley, New York.
Rapolyi László (szerk.) (2005): *Wigner Jenő válogatott írásai.* Typotex Kiadó, Budapest.
Radnainé Szendrei, Julianna (1983): A matematika-vizsgálat. *Pedagógiai Szemle*. **32**. 2. sz. 151–157.
Rátz László (1905): *Mathematikai gyakorlókönyv 1–2. kötet.* Franklin, Budapest.
Rényi Alfréd (1973): *Ars mathematica.* Magvető Kiadó, Budapest ickart, C. (1998): Strukturalizmus és matematikai gondolkodás. In: Sternberg, R. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest, 279–292.
Robitaille, D. F és Garden, R. A. (1989): *The IEA Study of Mathemtics II: Contexts and outcomes of school mathematics.* Pergamon Press, Oxford.
Ruzsa Imre és Urbán János (1966): *A matematika néhány filozófiai problémájáról*. Tankönyvkiadó, Budapest.
Sain Márton (1986): *Nincs királyi út! Matematikatörténet.* Gondolat Kiadó, Budapest.
Schoenfeld, A. H.(1994, szerk.): *Mathematical Thinking and Problem Solving.* Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
Senk, S. L. (1989): Van Hiele leveles and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20.** 309–321.
Smolarski, D. C. (2002): Teaching mathematics in the seventeenth and twenty-first centuries. *Mathematics Magazine*, **75**. 256–262.
Szebenyi Péter (1997): Tagoltság és egységesítés – tananyag-szabályozás és iskolaszerkezet. *Magyar Pedagógia*, **97**. 3–4. sz. 271–302.
Szendrei János (2002): Matematika. Az Eötvös József Szabadelvű Pedagógiai Társaság NAT 2002 tervezete. *Új Pedagógiai Szemle.* **52**. 12. sz. melléklet, 33–46.
Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról.* Typotex Kiadó, Budapest.
Szendrei Julianna (2007): When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: Research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, **39**. 443–458.
Tversky, A. és Kahneman, D. (1983): Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, **90**. 293–315.
Vancsó, Ö. (2010): *Mathematical logic and statistical or stochastical ways of thinking – an educational point of view.* Session 3F ICOTS-8, Ljubljana 2010. www.icots8.org

van der Waerden, B. L. (1977): *Egy tudomány ébredése. egyiptomi, babiloni és görög matematika*. Gondolat Kiadó, Budapest.

van Hiele, P. M. (1986): *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press, Orlando.

Varga Tamás (1972): A matematika tanításának várható fejlődése. In: *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése.* Tankönyvkiadó, Budapest, 303–349.

Varga, T. (1988): Mathematics education in Hungary today. *Educational Studies in Mathematics*. **19**. 291–298.

Verschaffel, L., Greer, B., és De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems.* Lisse, Swets & Zeitlinger.

[NKR] *Nemzeti Kutatás-nyilvántartási Rendszer.* https://nkr.info.omikk.bme.hu/cerif/tudomany.htm

[NEFMI] Nemzeti Erőforrás Minisztérium: *Felsőoktatási szakok tudományági besorolása.* http://www.nefmi.gov.hu/letolt/felsoo/szakok_tudagi_besorolasa_20040226.pdf

[MSC 2010] *Final Public Version* [Oct. 2009], American Mathematical Society http://www.ams.org/mathscinet/msc/ msc2010.html

[MR] *Mathematical Reviews*. American Mathematical Society http://www.ams.org/mathscinet

4.

A diagnosztikus matematika mérések részletes tartalmi kereteinek kidolgozása: elméleti alapok és gyakorlati kérdések

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Bevezetés

Ennek a fejezetnek az a fő funkciója, hogy kapcsolatot teremtsen az előző három elméleti fejezet és a következő részben bemutatásra kerülő részletes tartalmi leírások között. Itt foglalkozunk továbbá a tartalmi keretek műfaji sajátosságaival, és bemutatjuk azokat a megfontolásokat, amelyek az általunk alkalmazott megoldásokat indokolják.

Az első két fejezet a nemzetközi kutatások alapján vázolta fel a matematikai gondolkodás fejlesztésével és általában a matematika gondolkodásfejlesztő szerepével kapcsolatos eredményeket, elsősorban a fejlődéslélektani megközelítés alapján. A második fejezet a matematikatanítás külső céljai felől közelítette meg a problémát, ugyancsak a nemzetközi tudományos eredmények felhasználásával. A harmadik fejezetben már megjelentek a magyar közoktatás hagyományai, tantervi adottságai, és felsejlett az a gyakorlat is, amelyhez a diagnosztikus rendszert illeszteni kell. Ezekből már látható az egyik megoldandó feladat is: úgy kell a tudomány élvonalának eredményeit adaptálni, hogy azok mind az egyéni tanulókra, mind pedig az oktatási rendszer egészére a lehető legnagyobb fejlesztő hatást gyakorolhassák.

A diagnosztikus mérési rendszer három fő területen kerül egymással párhuzamosan kidolgozásra, minden tekintetben azonos alapelvek szerint.[1] Az olvasás, a matematika és a természettudomány azonos keretek között kezelését számos pszichológiai és pedagógiai alapelv és oktatásszervezési adottság is indokolja. Megfelelő szintű szövegértés nélkül nem lehet sem matematikát, sem természettudományt tanulni, ugyanakkor a matematika és a természettudomány olyan szövegek olvasásának és megértésének képességeit is fejleszti, amelyekre a szépirodalmi szövegek nem kínálnak lehetőséget. A matematika és a nyelv logikája kölcsönösen erősítheti egymást. A természettudomány a legjobb gyakorlóterep a matematikában elsajátított összefüggések alkalmazására. A sokféle kapcsolatrendszer figyelembevétele és kihasználása különösen fontos az iskola kezdő szakaszában, amikor a tanulók értelmi fejlődése nagyon gyors, és rendkívül érzékeny a stimuláló hatásokra.

A három terület párhuzamos kezelésének további előnye, hogy kölcsönösen megtermékenyítik egymást, az egyik területen megjelenő ötleteket, formai megoldásokat fel lehet használni a másik területeken is. A feladatrendszerek kidolgozása, az egységes skálázás, adatelemzés és a visszajelző rendszerek kifejlesztése is szükségessé teszi a három terület párhuzamos kezelését és bizonyos közös alapelvek követését. A párhuzamok azonban kompromisszumokat is igényelnek: ugyanazokat az alapelveket csak bizonyos mértékig lehet a három területen azonos módon követni. Az egységesség érdekében megőrizzük és párhuzamosan alkalmazzuk a háromdimenziós megközelítést, ugyanakkor az egyes dimenziók értelmezésében figyelembe vesszük a területek sajátosságait.

A párhuzamos munka további előnye lehet a komplementer hatás. A három területet összesen kilenc elméleti fejezet alapozza meg. A fejezetek szerkezetének felvázolása során már nem törekedtünk a szigorú párhuzamra. Így lehetővé vált, hogy az egyik terület az egyik, míg a másik valami más kérdést bontson ki részletesebben. Például az olvasás kötet első fejezetében hangsúlyosabb a fejlődés-lélektani, idegtudományi megközelítés, amelynek fontos üzenetei vannak a matematika és részben a természettudomány számára is. Néhány gondolkodási képesség leírása részletesebb a természettudomány kötet első fejezetében, ugyanakkor ezek a képességek fejlesztendők a matematikában is. A kötetek második fejeze-

1 Ez a fejezet is tartalmaz olyan részeket, amelyek mind a három kötet azonos funkciójú fejezetében megjelennek.

tei a tudás alkalmazási kérdéseivel foglalkoznak, bármelyik fejezet általános érvényű megállapításai a másik két mérési területen is érvényesíthetők. A harmadik fejezet mindegyik területen gyakorlati, tantervi kérdéseket is tárgyal, közös bennük a kötődés a magyar közoktatás történeti hagyományaihoz, mai gyakorlatához. Ugyanakkor az oktatás tartalmának kiválasztása és elrendezése terén is felmerül a progresszív nemzetközi tendenciák követésének, a másutt elért eredmények alkalmazásának igénye.

Ezeknek az elveknek megfelelően a kilenc elméleti fejezetet együttesen tekintjük a diagnosztikus mérési rendszer elméleti alapjának. Az egyes elméleti fejezetekben feldolgozott háttértudásból mindegyik területen meríthetünk, anélkül, hogy a közös kérdéseket minden párhuzamos fejezetben részletesen kibontottuk volna.

E fejezet első részében áttekintjük a tartalmi keretek kidolgozásának fő szempontjait. Elsőként az oktatás céljainak és a mérések tartalmának leírására használt eszközrendszereket tekintjük át, és bemutatjuk a diagnosztikus mérések tartalmának részletes leírására általunk használt megoldást. A további részekben kifejtjük, miképpen alkalmazzuk ezeket az elveket a matematika tartalmi kereteinek kidolgozásában.

Taxonómiák, standardok és tartalmi keretek

A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása során különböző forrásokra támaszkodhatunk. Munkánk során azt a fejlődési irányt követtük, amely az oktatás céljainak és a mérések tartalmainak pontosan meghatározására törekszik. Elsőként a tartalmak leírására használt rendszereket tekintjük át, és ezekhez viszonyítva jellemezzük az általunk alkalmazott módszert.

Taxonómiai rendszerek

A tantervi célok precíz leírására való törekvés az 1950-es évekig vezethető vissza. Többféle folyamat együttes hatásaként ekkor jelentek meg *Bloom* és munkatársainak taxonómiai rendszerei, amelyek azután erőteljesen befolyásolták az azt követő évtizedek pedagógiai törekvéseit. A taxonómiák kidolgozásának egyik kiváltó oka a tantervi célok megfogalmazásának homályosságával való általános elégedetlenség volt, egy másik pedig az oktatásban abban az időben megerősödő kibernetikai szemléletmód. Megjelent a szabályozhatóság igénye, amelyhez szükség volt a visszacsatolásra, a visszacsatolás pedig feltételezi a célként kitűzött és az aktuálisan elért értékek mérését. A cél és az aktuális állapot összehasonlítása alapján lehet megállapítani a hiányosságokat, és ezekre alapozva lehet megtervezni a beavatkozást. Az ugyanebben az időben más folyamatok hatására megerősödő pedagógiai értékelés, a tesztek elterjedése szintén a mérés tárgyának pontosabb meghatározását tette szükségessé.

A taxonómia lényegében egy szerkezeti váz, amely megmutatja, hogy hogyan lehet bizonyos dolgokat – esetünkben az elsajátítandó tudást – elrendezni, rendszerbe foglalni, osztályozni. Olyan, mint egy fiókos szekrény, amelynek fiókjain ott vannak a címkék, amelyek megmutatják, minek kell abba kerülnie; vagy, mint egy táblázat, amelynek a fejléce ki van töltve, és így ki van jelölve, mi lehet az egyes oszlopokban és sorokban. A korábbi általános leírások után egy ilyen formalizált rendszer alapján történő tervezés valóban nagy előrelépést jelentett, és a konkrét tantárgyi célok kidolgozóit a tanítás eredményeként elvárt viselkedés alapos végiggondolására késztette.

A legnagyobb hatása az elsőként megjelenő kognitív terület taxonómiai rendszerének volt (*Bloom* és mtsai, 1956), amely új távlatokat nyitott a tanterv- és értékeléselmélet számára. A taxonómiai rendszer konkrét, megfigyelhető kategóriákban írta le a tanulóktól elvárt viselkedésformákat. A legnagyobb újdonságot a hat egymásra épülő, és minden tudásterületen egységesen alkalmazható keretrendszer jelentette. Ezen túl a korábbi hasonló törekvéseket nagymértékben meghaladó részletesség, pontosság és konkrétság jelentett számottevő előrelépést. További előny volt, hogy ugyanazt a részletes leírást lehetett használni a tanulási folyamatok megtervezésére és a mérőeszközök elkészítésére. Innen ered a *cél- és értékeléstaxonómiák* elnevezés, amely utal a kettős funkcióra.

A *Bloom*-féle taxonómiák elsőként az Egyesült Államokban váltottak ki jelentősebb közvetlen hatást, majd ez a rendszer alapozta meg az első nemzetközi IEA felméréseket is. Az empirikus vizsgálatok nem mindenben igazolták a tudásnak a taxonómiai rendszerben feltételezett hierarchiáját. A *Bloom*-taxonómiát meghatározó viselkedés-lélektani megközelítés is háttérbe szorult az oktatási folyamatok pszichológiai értelmezésében, átadva a helyét más paradigmáknak, mindenekelőtt a kognitív pszichológiának. Így az eredeti kognitív taxonómiák alkalmazására is egyre ritkábban került sor. Az affektív és a pszichomotoros terület hasonló taxonómiái csak később készültek el, de – bár sok területen alkalmazták azokat – nem váltottak ki a kognitívhoz hasonlóan széles körű hatást.

A taxonómiák mint rendszerezési elvek „üres rendszerek”, nem foglalkoznak a konkrét tartalommal. A taxonómiákat bemutató kézikönyvekben a tartalom csak az illusztráció szerepét tölti be. Ha például *Bloom* taxonómiájának hat szintje a tudás *(knowledge),* a megértés *(comprehension),* az alkalmazás *(application),* az analízis *(analysis),* a szintézis *(synthesis)* és az értékelés *(evaluation)* a kémia egy konkrét területén elérendő célok leírásában kerül alkalmazásra, akkor azt kell pontosan megadni, mit kell tudni kémiából, mit kell megérteni, mit alkalmazni stb.

Az eredeti taxonómiák hatására vagy azok átdolgozásaként, korszerűsítéseként a későbbiekben is születtek és folyamatosan születnek újabb rendszerek és a célok leírását segítő hasonló szellemű kézikönyvek (*Anderson* és *Krathwohl*, 2001; *Marzano* és *Kendall*, 2007). Ezek közös jellemzője, hogy folytatják a *Bloom* által meghonosított hagyományt, továbbra is központi kérdésként kezelve a célok operacionalizálását, a tudás konkrétan felmérhető alapelemekre való lebontását. A taxonómiai rendszerek elkészítése során kialakult módszerek később a standardok kidolgozásának is hasznos módszertani forrásai lettek.

Standardok az oktatásban

A standardok kidolgozása az 1990-es években kapott lendületet. Elsősorban az angolszász országokban volt látványos ez a folyamat, amelyek közoktatásában korábban nem voltak a tanítás tartalmát szabályozó normatív dokumentumok. Volt például olyan ország, ahol – kis túlzással – minden iskolában azt tanították, amit helyi szinten eldöntöttek. Ilyen feltételek mellett az oktatáspolitika lehetőségei beszűkültek, az iskolarendszer teljesítményének javítására kevés lehetőség adódott. Ezért indultak el azok a folyamatok, amelyek az iskolai oktatás céljainak valamilyen szinten (tartományi, nemzeti) központi meghatározásához vezettek.

Az oktatási standardok lényegében az egységes oktatási követelményeket jelentik. Ellentétben a taxonómiákkal – mint rendszerekkel –, a standardok mindig konkrét tartalommal foglalkoznak. Általában külön szakmai csoportok készítik, így a különböző diszciplínák sajátosságaitól függően sokféle formai megoldást alkalmazhatnak.

A standardokat általában a szakterület specialistáiból szerveződő munkacsoportok készítik el a legfrissebb elméleti koncepciók és tudományos eredmények felhasználásával. (Az Egyesült Államokban például a matematikatanárok szakmai szervezete – *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM – dolgozta ki a közoktatás 12 évfolyamát átfogó standardokat.) A standardok általában leíró jellegűek, és azt fejezik ki, milyen tudás várható el a tanulóktól az adott tárgyból egy adott évfolyam befejeztével. Ebből következően a *standardok* fogalmának a magyar tantervi szakirodalom *követelmények* kifejezése felel meg legjobban.

A standardok kidolgozásával párhuzamosan elterjedt azok alkalmazása, a taxonómiai rendszerekhez hasonlóan mind az értékelésben, mind az oktatás folyamatában. Kézikönyvek sokasága jelent meg, amelyek részletesen bemutatják a standardok kidolgozásának és alkalmazásának módszereit. A hangsúlyok azonban mások, mint amelyek a taxonómiai rendszerek esetében érvényesültek. A standardok közvetlenül inkább az oktatásban hatnak (lásd pl. *Ainsworth*, 2003; *Marzano* és *Haystead*, 2008), és csak másodlagos az ezekhez igazodó értékelés (pl. *O'Neill* és *Stansbury*, 2000; *Ainsworth* és *Viegut*, 2006). A standard alapú oktatás (*standard-based education*) lényegében azt jelenti, hogy *vannak* részletesen kidolgozott, egységes követelmények, melyek elérése az adott életkorú tanulóktól elvárható.

A magyar és az egyéb erősen központosított oktatási rendszerekben tapasztalatot szerzett szakemberek számára a standardok és a standard alapú oktatás nem mindenben jelent újdonságot. Magyarországon az 1990-es évek előtt egy központi tanterv írta elő a tanítás tartalmait, amelyre egy tankönyv épült. Az általános iskola minden tanulója ugyanazt a tananyagot tanulta, és elvileg mindenkinek ugyanazokat a követelményeket kellett teljesíteni. Az egységes tanterveket egyes területeken évtizedek gyakorlati szakmai tapasztalata csiszolta (matematika, természettudományok), más területeken ki voltak szolgáltatva a politikai-ideológiai önkénynek. Az 1990-es években elindult folyamatokra erőteljesen hatott a korábbi angolszász modell, azonban az inga effektus is érvényesült, és a tantervi szabályozás átlendült a másik oldalra, a Nemzeti alaptanterv már csak minimális központi előírást tartalmaz. Ez a folyamat ellentétes azzal, ami ugyanebben az időszakban más országokban lejátszódott. Összehasonlításként érdemes megjegyezni, hogy az amerikai matematika standardokat bemutató kötet (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000) önmagában terjedelmesebb, mint a Nemzeti alaptanterv első, 1995-ben megjelent változata. Időközben a magyar Nemzeti alaptanterv még rövidebb lett.

A standardok megjelenése és a standard alapú oktatás azonban nem egyszerűen egységesítést vagy központosítást jelent, hanem a tanulás tartalmainak szakszerű, tudományosan megalapozott elrendezését. Ebben a tekintetben eltér a korábbi magyar központi szabályozástól, ahol ez csak részben volt így. Az új szemléletű standardok kidolgozása olyan országokban is meghatározóvá vált, amelyeknek korábban is voltak egységes tantervei. Például Németországban, ahol az oktatás tartalmait tartományi szinten korábban is részletesen szabályozták, elkezdődtek az egységes standardok kifejlesztésére irányuló kutatások (*Klieme* és mtsai., 2003). A standardok legfontosabb, meghatározó vonása a tudományos megalapozás igénye. A standardok kidolgozása, a standard alapú oktatás világszerte kiterjedt kutató-fejlesztő munkát indított el.

A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása során merítettünk mind a standard alapú oktatás elméleti megfontolásaiból, mind az egyes konkrét standardok tartalmi és formai megoldásaiból. Követtük a standardok kidolgozásának hagyományait abban is, hogy az egyes tartalmi-mérési területek sajátosságait érvényesítettük, és nem törekedtünk az olvasás, a matematika és a természettudomány tartalmainak leírásában a pontosan megegyező formai megoldásokra.

Az általunk kidolgozott tartalmi keretek azonban különböznek is a standardoktól abban a tekintetben, hogy nem követelményeket, nem elvárásokat határoznak meg. Közös vonásuk azonban a standardokkal a részletesség, a konkrét, pontos leírásra törekvés és a tudományos megalapozás igénye.

Tartalmi keretek

Az általunk elkészített részletes leírásokra a „tartalmi keretek" megnevezést használjuk (az angol *framework* megfelelőjeként). A mérések tartalmi keretei annyiban hasonlíthatnak a standardokra, hogy a tudás részletes, rendszerezett leírását tartalmazzák. Különbség azonban, hogy a standardok a kimenet felől közelítik meg az oktatást. A hagyományos tantervekkel ellentétben nem azt rögzítik, hogy mit kell tanítani vagy megtanulni. Nem határoznak meg elérendő követelményeket sem, bár a tartalmi leírások implicite kifejezik, hogy mit lehetne/kellene tudni a maximális teljesítményszinten.

A tartalmi keretek legismertebb példái a nemzetközi felmérésekhez készültek. A sok országra kiterjedő mérések esetében értelemszerűen szóba sem jöhet követelmények rögzítése. A tartalmi keretek ebben az esetben azt mutatják be, mit lehet, mit érdemes felmérni. A tartalom körülhatárolásánál különböző szempontokat lehet érvényesíteni. A korai IEA mérések esetében a részt vevő országok tantervei jelentették a kiindulási alapot, tehát az, hogy általában mit tanítanak az adott területen.

A PISA mérések tartalmi keretei a fő mérési területeken azt írják le, hogy milyen alkalmazható tudásra van szüksége a modern társadalmak tizenöt éves fiataljának. Ebben az esetben a tudás alkalmazása és a modern társadalom szükségletei, az alkalmazás tipikus kontextusai meghatározó szerepet játszanak a tartalmi keretek kidolgozásában, és természetesen az adott diszciplínák, iskolai tantárgyak tudásának alkalmazásáról van szó bennük.

Egy harmadik megközelítés lehet a tanulásra és a tudásra vonatkozó tudományos kutatás felőli, a fejlődéslélektan és a kognitív pszichológia eredményeiből kiinduló leírás. Ez a szempont domináns azokon a kereszttantervi területeken is, amelyek nem egy (vagy néhány) iskolai tantárgyhoz kötődnek. Ilyen mérés volt például a tanulási stratégiákat és az önszabályozó tanulást középpontba állító negyedik területen a PISA 2000 felmérésben, amelynek tartalmi kereteit alapvetően pszichológiai szempontok, a tanulásra vonatkozó kutatási eredmények határozták meg (*Artelt*, *Baumert*, *Julius-Mc-Elvany* és *Peschar*, 2003). Pszichológiai szempontok alapján lehet leírni a tanulók attitűdjeit, amelyek vizsgálata szinte minden nemzetközi mérésben szerepel, és különösen kiemelkedő szerepet játszott a PISA 2006 természettudomány vizsgálatában (*OECD*, 2006). Hasonlóképpen, a pszichológiai kutatásokból ismerjük a problémamegoldó gondolkodás szerkezetét, ami a 2003-as PISA kiegészítő mérési területe volt (*OECD*, 2004), és a legfrissebb kognitív kutatásokra épül a PISA 2012 keretében lebonyolítandó dinamikus problémamegoldás felmérés.

A diagnosztikus mérések számára készített tartalmi keretek (lásd az 5. fejezetet) merítettek a nemzetközi mérések tartalmi kereteinek munkálataiból. Annyiban hasonlítanak a PISA tartalmi kereteire (pl. *OECD*, 2006, 2009), hogy három fő mérési területre fokuszálnak, az olvasás, a matematika és a természettudomány felmérését alapozzák meg. Különböznek azonban abban a tekintetben, hogy a PISA egy korosztályra, a tizenöt évesekre fokuszál, így egy metszetet ad a tanulók tudásáról. Ezzel szemben a mi tartalmi kereteink hat évfolyamot fognak át, fiatalabb tanulókkal foglalkoznak, és jelentős hangsúlyt kap a fejlődési szempont.

A PISA tartalmi keretei egy adott mérési ciklusra készülnek. Bár az egyes mérési ciklusok között sok az átfedés, minden egyes ciklusban frissülnek is. A PISA tartalmi keretek az egész értékelési folyamat leírását átfogják, a mérési terület meghatározásától *(defining the domain)* a területet szervező alapelvek kifejtésén *(organizing the domain)* keresztül az eredményeket leíró skálákig *(reporting scales)* és az eredmények interpretálásáig. Az általunk kidolgozott tartalmi keretek e folyamatból csak a mérési terület meghatározását, a szervező elvek bemutatását és a tartalom részletes leírását fogják át. Bemutatják a mérések fő dimenzióit, a mérési skálák tartalmát, de nem foglalkoznak a skálán elérhető szintekkel és a skálázás kvantitatív kérdéseivel. Tekintettel a fejlődési szempontra, a skálák kidolgozására csak további elméleti előmunkálatok és az empirikus adatok birtokában kerül sor.

A mérések tartalmának több szempontú megközelítése

Az utóbbi évtized oktatási innovációit főleg az integratív szemlélet határozta meg. Az érdeklődés középpontjába került kompetenciák maguk is különböző tudáselemek (egyes értelmezések szerint további, affektív elemekkel kiegészült) komplex egységei. A kompetencia alapú oktatás, a projektmódszer, a tartalomba ágyazott képességfejlesztés, a tartalomba integrált nyelvtanítás és még sok más innovatív tanítási-tanulási módszer egyidejűleg több célt valósít meg. Az ilyen integratív megközelítések révén megszerzett tudásról feltételezhető, hogy könnyebben transzferálható, szélesebb körben felhasználható. A szummatív jellegű kimeneti tesztek hasonló elvek szerint épülhetnek fel, ezt a megközelítést követik a PISA tesztek és a magyar kompetenciamérések is.

Másfajta mérési megoldásra van azonban szükség akkor, ha a tanulás problémáit szeretnénk megelőzni, a lemaradásokat, a későbbi sikereket veszélyeztető hiányosságokat szeretnénk azonosítani. Ha a mérések eredményét a szükséges beavatkozások meghatározására használjuk, nem elég a tanulók tudásáról globális indikátorokat szolgáltató tesztet készíteni. Nem elég megállapítani, hogy a tanuló meg tud-e oldani egy komplex feladatot. Fel kell deríteni azt is, hogy mi az esetleges kudarc oka, vajon az alapvető ismeretei hiányoznak, vagy pedig azok a gondolkodási műveletei nem kellően fejlettek, amelyek az ismeretek logikus következtetési láncokká szervezéséhez szükségesek.

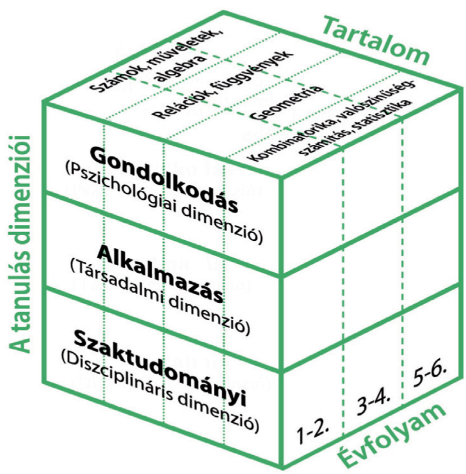
A diagnosztikus mérésekhez a tanulói tudás részletesebb leírására van szükség, ezért a tanításban érvényesülő integratív megközelítéssel ellentétben az analitikus megközelítést alkalmazzuk. Ugyanakkor a tanulást segítő méréseknek igazodniuk is kell az oktatás konkrét folyamataihoz. E követelménynek megfelelően kialakulóban van a diagnosztikus és formatív felmérések technológiája, amely merít a nagymintás szummatív mérések tapasztalataiból, ugyanakkor számos új elemmel gazdagítja is a mérési eljárásokat (*Black*, *Harrison*, *Lee*, *Marshall* és *Wiliam*, 2003; 2005; *Leighton* és *Gierl*, 2007).

A diagnosztikus mérések tartalmi kereteinek kidolgozása szempontjából számos tanulsága van a hasonló területeken végzett korábbi munkáknak, különösen a kisgyermekkorban alkalmazott felméréseknek (*Snow* és *Van Hemel*, 2008) és az iskola kezdő szakaszára kidolgozott formatív technikáknak (*Clarke*, 2001). Számunkra ezek közül is a legfontosabb a több szempontú, analitikus megközelítés, a pszichológiai és a fejlődési elvek hangsúlyossá tétele. Ugyanakkor a korábbi formatív és diagnosztikus rendszerek papír alapú teszteket használtak, ami erősen korlátozta a lehetőségeiket. Mi online számítógépes teszteket alkalmazunk, ami gyakoribb és részletesebb méréseket tesz lehetővé. A korábbiaknál nagyobb felbontású felméréseket végezhetünk, amelyhez alkalmazkodni kell a tartalmi kereteknek is.

A mérendő tartalom elrendezésének szempontjai

A felmérések tartalmát három fő szempont szerint rendezhetjük el. A három változó szerinti elrendezés egy háromdimenziós tömböt alkot, melynek vázlatát a *4.1. ábrá*n mutatjuk be. A mérések tartalmának kifejtéséhez azonban ezt a háromdimenziós tömböt, annak egyes blokkjait lineárisan kell elrendezni. A tömb elemeit többféle módon felsorolhatjuk, attól függően, hogy hogyan szeleteljük fel, melyik dimenzió mentén készítünk metszetet először, másodszor, majd harmadszor. Itt azt az elrendezési szempontot mutatjuk be, amelyik legjobban megfelel a diagnosztikus értékelés követelményeinek.

Az elsőként kiemelt szempont maga is egy többdimenziós rendszer, amely az elemzésünk három fő dimenzióját, a pszichológiai (gondolkodási), a társadalmi (alkalmazási) és a diszciplináris (szaktárgyi) dimenziókat jeleníti meg. Ez a három dimenzió az, melyekre mindegyik fő mérési területen (olvasás, matematika, természettudomány) fejlődési skálákat dolgozunk ki. (Az 5. fejezetben foglalkozunk vele részletesebben.)



4.1. ábra. A mérések tartalmának több szempontú elrendezése

A második szempont a fejlődés. Ebben a tekintetben a hat évfolyamot három kétéves blokkra bontottuk. az 1–2., a 3–4. és az 5–6. évfolyamokat foglalva egy-egy csoportba. Mivel azonban a hat évfolyamot egységes fejlődési folyamatnak tekintjük, ez csak egy technikai megoldás a tartalom elrendezésére. Empirikus bizonyítékok hiányában az életkorhoz (évfolyamhoz) rendelés egyébként is csak hozzávetőleges lehet.

Végül a harmadik szempont az adott mérési területen rendelkezésre álló tartalmak köre. Az így lebontott tartalmi blokkok alkotják a részletes tartalmi keretek egységeit. A különböző szempontok kombinálása miatt az egyes szempontok értékeinek növelése könnyen kombinatorikai robbanáshoz vezethet. Így esetünkben a konkrét mérési tartalmak számát kell mértéktartóan kezelni. A három fejlődési dimenziót, három életkori blokkot és matematika esetén négy fő tartalmat megkülönböztetve 36 blokk adódik. További részterületek megkülönböztetésével ez a szám rohamosan növekedne.

A diagnosztikus mérések skálái, a pszichológiai, az alkalmazási és a diszciplináris dimenzió

Korábbi empirikus vizsgálataink tapasztalatai alapján egy olyan modellt dolgoztunk ki, amelynek három dimenziója megfelel az oktatás három fő céljának. Ezek a célok végighúzódnak az iskolázás történetén, és megfelelnek a modern iskolai teljesítménymérés fő irányainak (*Csapó*, 2004, 2006, 2010).

Az értelem kiművelése, a gondolkodás fejlesztése olyan cél, amely nem külső tartalmakat nevez meg, hanem belső tulajdonságra hivatkozik. Modern terminológiával ezt *pszichológiai* dimenziónak nevezhetjük. Az előző részben már utaltunk arra, hogy a PISA vizsgálatokban is megjelent ez a dimenzió. Több olyan mérési területet is láttunk, amely pszichológiai eredmények alapján értelmezte a mérés tartalmát. A matematika terén ez a dimenzió azt vizsgálja, fejleszti-e a matematika a gondolkodást, az általános kognitív képességeket vagy a szűkebb értelemben vett matematikai gondolkodást az elvárható mértékben.

Egy másik régi cél, hogy az iskola nyújtson hasznosítható, iskolán kívül is alkalmazható tudást. Ezt a szempontot *társadalmi* dimenziónak nevezzük, és a tudás hasznosíthatóságát, alkalmazhatóságát érjük alatta. A tudás alkalmazása rokon fogalom a tudástranszferrel, amely egy adott kontextusban elsajátított tudás alkalmazását jelenti egy másik kontextusban. A transzfernek lehetnek fokozatai, amelyet a transzfertávolsággal lehet jellemezni. A matematikai tudás alkalmazása minden olyan feladatmegoldás, amely a matematika egy adott területén tanultakat egy másik területen alkalmazza (közeli transzfer), vagy kivezet a tiszta matematika világából, és a feladatot más tantárgyak keretei közé vagy gyakorlati kontextusba helyezi (távoli transzfer).

A harmadik gyakran említett cél az, hogy az iskolában a tanulók elsajátítsák mindannak a tudásnak a lényeges elemeit, amelyet a tudományok és a művészetek felhalmoztak. Ez a cél valósul meg, amikor a tanulók a diszciplína, a tudományterület szempontjai és értékei szerint közelítenek a tanuláshoz. Ez a szaktantárgyi vagy *diszciplináris* dimenzió. Az utóbbi években több olyan oktatási törekvés indult el, amely a korábbi, egyoldalú diszciplináris megközelítést kívánta kiegyensúlyozni. A kompetencia alapú oktatás és az alkalmazást középpontba állító tudásszintmérés némileg elhomályosította a szaktudományok szempontjait. Ahhoz azonban, hogy a tananyag szaktudományi szempontból összefüggő, egységes és így megérthető rendszert alkosson, szükség van azoknak a tudáselemeknek az elsajátítására is, amelyek közvetlenül nem szolgálják az alkalmazást vagy a gondolkodás fejlesztését. A fogalmak tudományos érvényességének kialakítása, a pontos meghatározások ilyen tudáselemek.

A háromdimenziós modell azt jelenti, hogy ugyanaz a tartalom (esetleg kisebb hangsúlyeltolódással) felhasználható mindhárom dimenzióban feladat írására. Ezt a kombinatív képesség példájával szemléltethetjük. A gyerekekben kialakul a kombinatív képesség elemi szintje pusztán a környezettel való interakció révén. Ezt a gondolkodást fejlesztik az iskolai gyakorlatok, és ennek megfelelően fel lehet mérni, hol tart a kombinatív gondolkodás, mint az általános kognitív fejlődés egyik területe. Készíthetünk egy olyan feladatot is, amelyben a kombinatív gondolkodást és esetleg az iskolában tanult kombinatorika tudását új, hétköznapi helyzetben kell alkalmazni. Végül ellenőrizhetjük, hogy a tanulók tudják-e, mi a variáció és a kombináció, továbbá hogyan lehet a kiszámításukhoz szükséges formulákat levezetni. Ez utóbbi már olyan tudás, amelyet nem lehet a kognitív fejlődést stimuláló gyakorlatokkal kialakítani, csak a megfelelő szaktárgyi matematikatudás elsajátításával.

A három mérési terület között a matematika sajátos helyzetet foglal el abban a tekintetben, hagy a matematikai gondolkodás fejlődése – különösen az iskola kezdő szakaszában– szorosan összefügg az általános értelmi fejlődéssel. A matematika minden területén meghatározó szerepe van a műveletvégzésnek, a gondolkodásnak. Ezért a három dimenzió nem minden esetben válik el olyan élesen egymástól, mint a másik mérési területeken. Ebből következően gyakran egy feladaton belül is megjelenthetnek a különböző dimenziók szempontjai.

A matematikai gondolkodás képességei

A matematikai gondolkodás elemeit a kötet első fejezete tekinti át. A fejezet a matematikai gondolkodás képességeinek föltárásában egyaránt támaszkodik *Piaget* és *Vigotszkij* munkásságára, és ezen túl egy olyan képességrendszert javasol, amely kellően általános, és ugyanakkor sajátosan matematikai. A kellő általánosság azt jelenti, hogy a gyakran különböző elnevezésekkel illetett matematikai gondolkodási folyamatok leírását négy alapvető gondolkodási formára vezeti vissza. A fejezetben vázolt képességrendszer ugyanakkor mégis sajátosan matematikai. Függetlenül a matematikatudomány konkrét területi tagozódásától és a társadalmi elvárásokból fakadó követelményektől, az egész és a racionális számok, az additív és multiplikatív gondolkodási formák együttes rendszere a matematikai gondolkodás leírását nyújtja. A következőkben két olyan fogalomkörön keresztül teremtünk további kapcsolatot az elméleti fejezet és a részletes tartalmi keretek között, amelyek fontos szerepet játszottak az elmúlt két évtized nemzetközi kutatásaiban.

Problémamegoldó gondolkodás

A matematikai gondolkodás kutatásának irodalmában jelentős arányt képviselnek azok a megközelítések, amelyek az általános problémamegoldás részterületeként tekintenek a matematikai gondolkodásra. Általánosságban az olyan feladatot nevezzük problémának, amelynek megoldási folyamatában nincs kész algoritmusunk, amelyet követhetünk, hanem a feladat tudatos tervezési, nyomon követési és ellenőrző folyamatok felhasználását igényli. Az olyan kérdésekre adandó válaszadás, mint például: „hogyan mérhető le az iskolaudvar hossza a lépéseinkkel?” vagy „hány liter víz fér az otthoni fürdőkádba?”, lehetővé teszik, hogy a tanulóink a problémát részekre bontsák, analizálják, majd a problémamegoldás lépéseit áttekintsék, a problémát megoldják. Az ilyen módon értelmezett problémamegoldó gondolkodás fejlődésének feltétele és segítője a matematikai fogalmak, szimbólumok ismerete és a matematikai készségek és képességek fejlődése.

A matematikai problémamegoldásban, a szűkebb értelemben vett (és az 1. fejezetben részletesebben bemutatott) matematikai képességeken túl a gondolkodás más képességei is szerepet játszanak. Ezek teszik lehetővé, hogy a matematikai műveleteket új, ismeretlen helyzetekben alkalmazzuk, a begyakorolt rutinfeladatokon túlmutató problémák megoldásában is.

A problémamegoldó gondolkodás vizsgálata elsősorban a szöveges feladatok kitűzésének és a megoldási folyamat elemzésének technikáját alkalmazza (*Csíkos*, *Kelemen* és *Verschaffel*, 2011). A szöveges feladatok mint a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének természetes eszközei már az 1–2. osztályban megjelennek. A szöveges feladatok megoldásának azonban előfeltétele a megfelelő szövegértés. A szöveg hosszúságának, nyelvtani bonyolultsági fokának igazodnia kell a tanuló fejlettségi szintjéhez. Ez eleinte két-három egyszerű mondatot jelenthet csupán. Újabb fejlődési fokozat, amikor a szöveget már nem hallás után kell feldolgozni, hanem önálló olvasás során. A 3–4. osztályban már megfigyelhető, hogy az eredetileg a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére – a valóság matematikai modellezésének változatos eszközein keresztül – lehetőséget nyújtó szöveges feladatok egyre inkább a számolási készség további fejlesztésének gyakorlóterepévé válnak. Fontossá válik emiatt a feladat szövegének megértése és a megértést lehetővé tevő problémareprezentáció.

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének fontos módszere a gondolkodási folyamatok szavakba öntése, a „miért?” kérdések megfogalmazása (*Pólya*, 1945/1957). A feladatról alkotott belső, mentális képeink megbeszélése, a feladatokhoz rajzok készítése (amelyek egymástól jelentősen különbözhetnek, hiszen a mentális modellek egyénre szabottak) elősegíti a problémamegoldó gondolkodás stratégiai, metakognitív elemeinek fejlődését.

Matematikai készségek és képességek

Az utóbbi két évtized jelentős törekvése volt azoknak a készségeknek és képességeknek az azonosítása, amelyek a matematika területéhez köthetők, akár a fejlesztés, akár az értékelés szemszögéből. Az intelligenciakutatás egyik irányzata például arra vállalkozott, hogy a mérhető pszichikus tulajdonságok közötti különbségek alapján az intelligencia szerkezetét föltárja. *Carroll* (1993) monográfiában összegezte az ilyen kutatások tapasztalatait, majd később vállalkozott az intelligencia képesség-rendszerében a matematikai képességek leírására. *Carroll* szerint a matematikai teljesítményben a fluid intelligencia számos összetevőjének közvetlen szerepe igazolható. Például az általános következtetéses gondolkodás, a mennyiségi gondolkodás vagy az úgynevezett piaget-i gondolkodás. A kristályos intelligencia elemei közül is többet kiemel, mint a matematikai képességek fontos összetevőjét.

A nyelvi fejlődés jelentősége többek között abban van, hogy az emberek hajlamosak egy bizonyos, kitüntetett nyelven számolni, és a különböző nyelvekben megfigyelhető számelnevezések hatással vannak a számolási készség működésére is. A verbális és írott nyelv megértésének képessége is nyilvánvalóan fontos szerepet játszik a matematikai szöveges feladatok megértésében. A számolási készség több összetevője is azonosítható az intelligencia faktoraiban: az átfogó kognitív gyorsaság és a számolási könnyedség egyaránt mérhető elemei a gondolkodásnak.

A számolási készségek kialakulásának, illetve korai fejlődésének vizsgálatára a magyarországi kutatási programok közül a legrészletesebben a PREFER, illetve a DIFER mérőeszközök kifejlesztése során került sor (*Nagy*, 1980; *Nagy*, *Józsa*, *Vidákovich* és *Fazekasné*, 2004).

A matematikai gondolkodás képességeinek egy másik jelentős területét jelentik az általános következtetéses gondolkodás képességei. Öt olyan gondolkodási képességet említünk, amelyek a hazai pedagógiai gondolkodásban és a diagnosztikus értékelési programokban már megjelentek: induktív (*Csapó*, 2002), deduktív (*Vidákovich*, 2002), rendszerezési (*Nagy*, 1990), kombinatív (*Csapó*, 1998) és korrelatív (*Bán*, 2002) gondolkodás. Ezek a matematikában is szerepet játszó képességek változatos matematikai tartalmak esetén értékelhetők és fejleszthetők.

A matematikai tudás alkalmazásának területei

A matematikai fogalmak kialakulása során természetesen folyamatos kölcsönhatás van a megfigyelt jelenségek és a kialakuló matematikai fogalmak között. *Rényit* (2005. 39. o.) idézve: „Amikor a gyereket számolni tanítják, először kavicsok vagy pálcikák megszámolására tanítják őket. Csak ha már a gyerek meg tud számolni kavicsokat és pálcákat, akkor képes eljutni odáig, hogy megértse, nemcsak két kavics és három kavics az öt kavics, hanem, hogy két valami és három valami az mindig öt valami, vagyis hogy kettő meg három az öt.”

A matematikai fogalmak megértése és használata több szinten lehetséges: a megértés kognitív tudományi értelmezése gyakran a belső disszonancia megszűnéseként tekint a megértésre (*Dobi*, 2002). A megértésnek az a szintje, amikor – ahogyan például *Rényi Alfréd* teszi – magukról a matematikai fogalmakról tesz megállapításokat, a megértésnek egy magasabb szintjét jelentik. Ezt a magasabb szintet *Skemp* (1975) reflektív matematikai gondolkodásnak nevezi.

A matematikai tudás alkalmazásának értékelése során szöveges feladatokat oldanak meg a tanulók, amelyekben helyet kapnak a hétköznapi tapasztalataikból ismert fogalmak és matematikai jelenségek. Az ókortól kezdve a szöveges feladatoknak legalább három funkciója él egymás mellett.

(1) A matematikai tudás „szövegbe öltöztetése", vagyis a matematikai készségek és képességek fejlesztése és gyakoroltatása szöveges feladatokon keresztül. Ebben az esetben a feladatok szövege ismerős, barátságos, ugyanakkor nem feltétlenül egy gyakorlati problémát jelenít meg. Az ilyen feladatokat *Szendrei Julianna* „tanpéldának" nevezi (*Szendrei*, 2005). A tanpéldák – vagy ahogyan a továbbiakban nevezzük őket: szöveges gyakorlófeladatok – tehát elsősorban a matematikai készségek és képességek fejlesztésére, a gyakoroltatásra szolgálnak, és a feladatok szövegének konkrét tartalma – bizonyos keretek között – szabadon váltogatható.

(2) A matematikai szöveges feladatok az embert körülvevő világ matematikai modellezésének eszközeit is jelentették. Az ókori egyiptomi írnok és a reneszánsz kori velencei kalmár matematikai képzésében olyan feladatok uralkodtak, amelyekben hétköznapi szituációk, a későbbiekben valóságosan megoldandó problémák jelentek meg.

(3) Szintén több ezer éves múltja van a rekreációs és rejtvény jellegű matematikai szöveges feladatoknak. Archetípusa ennek a feladatnak a „hány éves a kapitány?" jellegű nonszensz feladatkitűzés és az olyan feladatok, amelyekben a megoldónak ki kell találnia, vajon mire gondolt valójában a feladat kitűzője. Ide tartoznak a nyilvánvalóan adathiányos feladatok ugyanúgy, mint azok, amelyeket a kreativitás pszichológiájának kutatói a belátásos *(insight)* problémák közé sorolnak (*Kontra*, 1999).

A szöveges feladatok említett funkciói gyakran egymással összekapcsolódnak. Elképzelhető, hogy egy adott iskolai évfolyamon belül egyesek számára egy feladat rutinszerűen megoldható szöveges gyakorlófeladat, míg mások számára a világ matematikai modellezésének eszköze. Sőt, a feladatkitűzés módjától is függhet, hogy a tanuló ugyanazt a szöveges feladatot gyakorló tanpéldának tekinti vagy pedig olyannak, amelynek megoldása során ismereteit mozgósítva több lehetséges matematikai modell közül választhat. A matematikai tudás alkalmazásáról szóló elméleti fejezetben több példát is láthatunk, amelyekben hátrányba kerültek azok a tanulók, akik nem tanpéldának tekintettek egy-egy szöveges feladatot. Általánosságban elmondható, hogy a szöveges feladatok megoldásának menetére vonatkozó információ a matematikai tudás részét képezi. A pedagógus szerepének jelentőségére utal az a megállapítás, miszerint osztályonként más és más szocio-matematikai normákat sajátítanak el a tanulók a feladatmegoldás mibenlétéről, menetéről és rituáléjáról.

Realisztikus szöveges feladatok

A matematikai tudás alkalmazásáról szóló elméleti fejezetben leírtak alapján a szöveges feladatoknak van egy olyan csoportja, amelynek elsődleges funkciója nem valamely matematikai művelet vagy tudáselem szövegbe öltöztetése, hanem a tanulók számára ismert, a képzeletükben és tapasztalatukban megragadható tudáselemek matematikai modellezésének elősegítése. Hol húzódik a határ a tanpéldák és a realisztikus szöveges feladatok között?

Önmagában véve egyetlen feladatot sem nevezhetünk realisztikusnak vagy nem realisztikusnak. A nem realisztikus és a realisztikus feladatok szétválasztásához több tényezőt szükséges figyelembe venni. Legalább három tényezőtől függ, hogy egy szöveges feladat realisztikusnak tekinthető-e.

(1) A feladat szövegében előforduló dolgok és tulajdonságok szerepe: amennyiben a feladat szövegében szereplő dolgok (szereplők, jelenségek, tulajdonságok) lényeges részét képezik a feladatnak abban az értelemben, hogy ezek megváltoztatása a megoldás folyamatában is lényeges változást okoz, valószínűsíthető, hogy realisztikus feladatról van szó.

(2) A feladatban szereplő dolgok és a meglévő tanulói tudás viszonya: a realisztikus jelző eredeti értelmében a feladatban szereplő dolgok elképzelhetőségére utalt. Nem követelmény egy realisztikus feladat

esetében, hogy a hétköznapi valóság tárgyai szerepeljenek a szövegben; lehetséges, hogy a hétfejű sárkányról szóló kombinatorikai feladat realisztikus.

(3) Az osztálytermi szocio-matematikai normák határozzák meg, hogy mennyire kötött rituáléja és szabályrendszere van annak, hogy a szöveges feladatok során milyen lépéseket várunk el. Ebből a szempontból gyakran a realisztikus feladatok indikátora lehet, ha a szöveges gyakorlófeladatoknál ismertetett, „megszokott" algoritmus csődöt mond a feladatmegoldás folyamatában.

Gyakori, hogy realisztikus feladatok esetén már az adatok kigyűjtése, majd pedig az elvégzendő műveletek meghatározása olyan matematikai modell kiválasztásával jár, amelyben tervező, nyomon követő és ellenőrző (tudatos) folyamatok zajlanak.

Autentikus feladatok

A realisztikus feladatok halmazán belül egy sajátos csoportot alkotnak az úgynevezett autentikus feladatok. A vonatkozó elméleti fejezetben definiáltuk a feladattípus jellemzőit, azokat a részletes tartalmi és értékelési keretek fejezeteiben a konkrét matematikai részterületeken jellemezzük és példákkal illusztráljuk.

Az autentikus feladatok a tanuló tapasztalataira s tevékenységére épülő szöveges feladatok, amelyek gyakran intranszparens problémák. A realisztikus feladatok között az autentikus feladatok sajátossága, hogy hangsúly kerül a tanulói tevékenységre, amely szükségszerűen kapcsolódik a motiváltság és a bevontságérzés kategóriáihoz. Külső, formai jegyek alapján az autentikus feladatok gyakran a hosszabb szövegükről ismerhetők fel, amelyben egy valóságos problémahelyzet leírása történik, gyakran – matematikai szempontból – fölösleges vagy éppen hiányzó adatokkal. Ugyancsak formai jegye lehet az autentikus feladatoknak, ha azokban a tanulót a leírt problémahelyzethez kapcsolódó feladatkitűzésre kérjük. A feladatmegoldó folyamat jellemzői közül pedig azt emeljük ki, hogy az autentikus feladatokban nincs közvetlen, nyilvánvaló algoritmusa a megoldásnak, tehát valódi matematikai modellalkotásra van szükség, amelynek során úgynevezett tevékenység zajlik. A külső szemlélő által is megfigyelhető tevékenységformák között megemlítjük az adatgyűjtést (akár külső forrásokból, akár megbeszélés módszerével), a méréseket, az előzetes tanulói tudás alapján folytatott vitát és párbeszédet.

Sok esetben – ahogyan az a hétköznapok autentikus problémáira is jellemző – nincs egyetlen, jól definiált megoldása a feladatnak, viszont pedagógiai szempontból a matematika művelésének folyamata (a tervezés folyamatából induló, a feladatmegoldást nyomon követő és értékelő matematizálás) gyakran önmagában az autentikus probléma megoldásával egyenértékű. Az autentikus feladatok megoldásának folyamata gyakran zajos csoportmunkát igényel, ilyen módon fölrúgva olyan hagyományokat, amelyeket laikusok és pedagógusok is a matematikaórák jellemzőjeként kezeltek korábban.

A matematikai problémamegoldás egyik első általános modellje *Pólya György* (1945/1957) nevéhez fűződik. Azok a lépések, amelyeket ő általában a sikeres matematikai feladatmegoldás lépéseként leír, legszembetűnőbben a realisztikus (és azon belül az autentikus) feladatok megoldása során érthetők tetten. Azok a kérdések, amelyeket *Pólya* munkájában megtalálunk – és amely kérdéseket az utókor metakognitív kérdéseknek nevez – a probléma matematikai jellemzői mellett a megoldó személy és a matematikai probléma viszonyára vonatkoznak. „Át tudod-e fogalmazni a problémát a saját szavaiddal?” „Tudsz-e olyan ábrára vagy diagramra gondolni, amely segíthet a probléma megoldásában?”

A matematikatudomány szerinti részterületek

A matematikai tudás diagnosztikus értékelése során a feladatok természetszerűleg kötődnek a matematikatudomány egy-egy részterületéhez. A harmadik fejezetben leírtak alapján az iskolai matematika területei alapvetően megfelelnek a matematikatudomány jelenlegi tagozódásának. Különböző évfolyamokon más-más területre kerül a hangsúly, és az egyes területeknek eltérő történeti fejlődési vonaluk van a hazai közoktatásban.

Számok, műveletek, algebra

A számok, műveletek, algebra témakör a matematikatanítás alappillére. Az 1. és 2. osztályos matematikában a legtöbb időt és energiát a számolási készség fejlesztése veszi igénybe. Ez a tartalmi terület magában foglalja a számfogalom fejlődését, a számkör bővülését, a négy matematikai alapművelet elsajátítását és a számok helyett alkalmazott jelekkel az algebrai gondolkodás előkészítését. Ezen túl az alkalmazott matematikai tudás követelményei kapcsán a valóságban megfigyelhető számosságok és a matematikai alapműveletekkel leírható hétköznapi jelenségek modellezése is ehhez a területhez tartozik.

Kulcsfontosságú a témakör megértéséhez számba venni *Dehaene* (1994) hármaskódelméletének pedagógia konzekvenciáit. A számok (elsősorban a természetes számok) nevei, az arab számok leírt alakja és az adott számhoz kapcsolódó mentális mennyiségreprezentáció kölcsönös kapcsolatrendszerei teszik lehetővé, hogy a tanulók biztos számfogalommal rendelkezzenek. Már óvodáskor előtt néhány szám nevét tudják a gyermekek, kisebb számosságok esetén azt értő módon használják is (például két fül, három ceruza), a számok leírt alakja azonban jellemzően az iskolás években kapcsolódik össze a számnevekkel.

A számokhoz kötődő mennyiségreprezentációk fejlődésével kapcsolatos kutatási eredmények szerint például a mentális számegyenes 2. osztályos korban a 100 alatti természetes számok esetében meglehetősen pontos és már lineáris felépítésű (*Opfer* és *Siegler*, 2003), lehetővé téve, hogy 2. osztály végére az úgynevezett százas számkörben a számok leírt alakja, a számok verbális elnevezése és mindezekhez valamilyen mennyiségreprezentáció hatékony kapcsolatrendszere jöjjön létre.

A matematikai alapműveletek elsajátításának leírásában a készségfejlődés és -fejlesztés törvényszerűségeit alkalmazhatjuk. A fejlődés szakaszait jól ismerjük: a nevezetes szakadási pontokat, amelyek a számlálásban akadályokat jelenthetnek, mint 6 után a 7-hez, vagy 16 után a 17-hez eljutni (*Nagy*, 1980). Arról is vannak adataink, miként válik az alapműveleti számolási készség működése esetenként túlautomatizálódottá az alsó tagozatos korban; ez a probléma a szöveges feladatok és a valóság mennyiségi összevetése (illetve ennek elmaradása) esetében szembetűnő. Az algebrai jelölések bevezetésében az egyszerű geometriai formák dominálnak ebben a korosztályban (négyzettel, körrel, félkörrel stb. jelöljük az ismeretlen mennyiségeket).

Relációk, függvények

A gondolkodás egyik sajátossága, hogy szabályszerűségeket, mintázatokat keres az őt körülvevő világban. A matematikai gondolkodás területén az összefüggések felismerése és leírása több tartalmi területhez is besorolható, attól függően, hogy milyen adatok és jelenségek között keresünk összefüggést, és az összefüggést determinisztikus vagy valószínűségi jellegűnek tekintjük.

A relációk és függvények matematikai definícióiban halmazok és halmazok közötti hozzárendelések szerepelnek. Mind a halmazok, mind a hozzárendelések a matematikai alapfogalmak közé tartoznak, vagyis fokozott jelentősége van annak, hogy ezeket az alapfogalmakat a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz, a már meglévő képzetekhez és elemi fogalmakhoz kapcsoljuk. A témakör kapcsán különös nehézséget okoz, hogy a relációk és függvények absztrakt matematikai fogalmait milyen mértékben köthetjük olyan vizuális képzetekhez, mint amilyenek a „gépjátékok" táblázatai vagy a kétdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázolt görbék.

A Nemzeti alaptantervben a függvényekkel kapcsolatos követelmények jelentős része nincs iskolai évfolyamhoz kötve, ami az értékelési keretek szempontjából azt jelenti, hogy a tanulók fejlődő gondolkodásának értékelését jól definiált, egymásra épülő feladatrendszerhez érdemes kapcsolni. Például az a Nemzeti alaptantervben szereplő követelmény, hogy „Együttváltozó mennyiségek összetartozó adatpárjainak, adathármasainak jegyzése: tapasztalati függvények, sorozatok alkotása, értelmezése stb." a közoktatás valamennyi évfolyamára érvényes. Az értékelés tartalmi keretei szempontjából ugyanakkor döntést kell hoznunk, hogy miképpen operacionalizáljuk az egymásra épülő tudáselemeket, és mely életkori blokkban helyezzük el azokat. Ennél a konkrét követelménynél a következő kérdések lehetnek relevánsak: Milyen együttváltozó mennyiségek szerepeljenek a feladatokban? Mely évfolyamokban szerepeljenek adatpárok, és mely évfolyamokon adathármasok? Milyen módszerrel adja meg a tanuló az adatok közötti összefüggést? Milyen szókincset várunk el az egyes évfolyamokon a változók közötti összefüggések jellegére és szorosságára vonatkozóan? E szaktudományi szempontú kérdéssor mellett előrebocsátjuk, hogy a „Relációk, függvények" témakört nagyon fontos eszköznek tartjuk az arányossági gondolkodás és (még általánosabban) a multiplikatívnak nevezett matematikai gondolkodási formák fejlesztéséhez.

Geometria

A geometriáról a hagyományos tantervi beágyazottság hasonlóképpen elmondható, minként azt a „Számok, műveletek, algebra” témakör kapcsán tettük. Az IEA-vizsgálatok nemzetközi tanterv-összehasonlító elemzése alapján hazánkban a matematika tantervekben a geometria aránya igen jelentős (lásd *Robitaille* és *Garden*, 1989).

A matematika műveltségterületen a Nemzeti alaptanterv bevezetőjében felsorolt célok, értékek és kompetenciák közül kiemelt fontosságú a tájékozódás, amely a geometria egyik részterületeként definiálható. A geometria és a mérések témakör alkalmas mind a tájékozódás a térben, mind pedig a tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban célkitűzések megvalósítására.

A megismerés területének minden pontja megjelenik a témakör feldolgozása során. Talán külön kiemelhető, hogy az alkotás különféle módozatai (öntevékenyen, saját tervek szerint, adott feltételeknek megfelelően), illetve a kreativitás jó terepet kap a geometria tanulásának kezdeti szakaszában is. Az alkotások velejárója az együttműködés és a kommunikáció is.

A tér- és síkgeometriai szemléletet a gyermekek konkrét tárgyi tevékenységével, a valóságot bemutató, a legkülönbözőbb technikákkal nyert anyagok, modellek (pl. tárgyak, mozaikok, fotók, könyvek, videó, számítógép) segítségével alakítjuk.

Az NCTM említett tartalmi követelményeiben a geometriától elkülönített területként jelenik meg valamennyi iskolai évfolyamon a mérés területe. Fölfogásunk szerint a geometriai területen belül helyezhetők el a méréssel kapcsolatos alapelvek és követelmények. A következő két lista, amelyben kiemeltük, hogy az NCTM mit tekintett a legjelentősebb követelményeknek a geometria és a mérés területeken, világossá teszi, hogy a hazai matematikatanítási hagyományban jól megfér egymás mellett a két terület egy egységes „geometria” esernyő alatt.

Az NCTM Standard erre a korosztályra geometria témakörben a következő célkitűzéseket és elvárásokat tartalmazza:

(1) Két- és háromdimenziós geometriai alakzatok jellemzői és tulajdonságainak felismerése, megnevezése, építése, rajzolása, jellemzése, matematikai vitakészség kialakítása a geometriai összefüggésekről.
(2) Tájékozódás síkon és térben, térbeli relatív pozíciók leírása, megnevezése, interpretálása, ismeretek alkalmazása.
(3) Transzformációk (eltolás, elforgatás, tükrözés) felismerése és alkalmazása, szimmetrikus alakzatok felismerése és létrehozása.
(4) Geometriai alakzatok mentális képének előállítása térbeli memória és vizuális memória felhasználásával, különböző perspektívákban ábrázolt alakzatok felismerése és értelmezése, geometriai modellek használata a problémák megoldásában.

A mérés témakörében az NCTM Standard célkitűzései és elvárásai szintén hasonlók a kerettantervekéhez:

(1) A tárgyak és egységek, rendszerek és folyamatok mérhető tulajdonságainak megértése (hosszúság, súly, tömeg, térfogat, terület, idő mérésének megértése, tárgyak összehasonlítása és rendezése ezek alapján a tulajdonságok alapján, hogyan mérünk alkalmi és standard mértékegységekkel, tulajdonság mérésére alkalmas eszköz és egység megválasztása).
(2) A méretek meghatározására alkalmas technikák, eszközök és szabályok alkalmazása (a mérés összehasonlítás, egység választása, a mérőeszközök használata).

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanítása a közoktatás első hat évfolyamán főleg a tapasztalatszerzést célozza. Ennek tükrében a tantervi követelmények sem tartalmaznak sok ismeretet, az alapkészségek fejlesztése kapja a nagyobb hangsúlyt. A távlati konkrét szaktantárgyi tudás azonban a kombinatív és valószínűségi gondolkodás tapasztalati megalapozása nélkül elképzelhetetlen.

A kezdő szakaszban a tanulók kombinatív gondolkodását elsősorban a rendszerezés fontosságának megértetésén keresztül formáljuk. A gyerekeknek eleinte még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. Kétféle gondolati igényességet kezdünk kiépíteni. Az egyik a szemponttartás, vagyis az, hogy a feltételt a feladat egészében szem előtt tudják tartani. A másik pedig az, hogy alkotásaikat folyamatosan ellenőrizzék: nem alkottak-e már ugyanilyet, különbözik-e a készülő új elem a többitől. A feladatvégzés azáltal fejlődik tovább, hogy megpróbálhatnak minél többfélét létrehozni az adott feltétel szerint, végül a teljességre való törekvés hangsúlyos.

A középiskolában az iskolai tantervek és az érettségi vizsgakövetelmények sokkal nagyobb hangsúlyt helyeznek a valószínűség témakörre, mint korábban. Ehhez igazodva a téma sokkal körültekintőbb előkészítő munkát igényel az alsóbb évfolyamokon is. Nagy különbség van azonban a *valószínűségi szemlélet fejlesztése*, és a valószínűség *számítása* között. Az elméleti számítások élesen elválnak a kísérletek során szerzett tapasztalatoktól. Az utóbbit inkább a gyerekek érzéseire hagyatkozva, de egyre tudatosabban, más körülményeket is megvizsgálva végezzük. Kiemelt jelentőséget kap az adatok lejegyzésének egyre tudatosabb volta, mely nélkülözhetetlen a statisztika témájának mélyebb megértéséhez. Kezdetben az a valószínűség tartalma, hogy ami ténylegesen gyakrabban előfordult, az valószínűbb. Csak egy következő szakaszban módosul ez úgy, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb (még akkor is, ha a tényleges kísérleti adatok ezt nem támasztják alá). Ennek megfelelően a tantervi fejlesztési feladatok és az értékelés formái is tapasztalatszerzésre alapoznak: A „biztos", „nem biztos", „valószínű", „lehetséges" fogalmak kialakítása játékkal, tevékenységgel, hétköznapi példák gyűjtésével célravezető.

Összegzés és további feladatok

A matematika részletes tartalmi keretei csak kiindulópontot jelentenek a diagnosztikus mérési rendszer kidolgozásához. Egy hosszú fejlődési folyamat kezdő szakaszáról van szó, melynek során elkészítettük a mérési koncepciót, összegeztük a rendelkezésre álló tudományos eredményeket, és részletesen leírtuk a mérés eszközrendszerének kidolgozásához felhasználható tartalmakat.

Az elméleti háttér és a részletes tartalmi keretek továbbfejlesztésének többféle forrása lehet. A munka időbeli keretei által szabott korlátok miatt nem kerülhetett sor a külső szakmai vitára. Most e kötetekben megjelennek magyarul és angolul, és így a legszélesebb tudományos és szakmai közösségek számára hozzáférhetővé válnak. A továbbfejlesztés első fázisában e szakmai körből érkező visszajelzések feldolgozására és felhasználására kerülhet sor.

A fejlesztés második, lényegében folyamatos szakasza az új tudományos eredmények beépítésével valósulhat meg. Néhány területen különösen gyors a haladás, ezek közé tartozik a kora gyermekkori tanulás és fejlődés kutatása. A tudás, a képességek, a kompetenciák értelmezése, operacionalizálása szintén számos kutatási programban megjelenik. Hasonlóan élénk munka folyik a formatív és diagnosztikus értékelés terén. E kutatások eredményeit fel lehet használni az elméleti háttér újragondolásához és a részletes leírások finomításához.

A tartalmi keretek fejlesztésének legfontosabb forrása alkalmazásuk gyakorlata lesz. A diagnosztikus rendszer folyamatosan termeli az adatokat, amelyeket fel lehet használni az elméleti keretek vizsgálatára is. A most kidolgozott rendszer a mai tudásunkra épül, a tartalom elrendezése és a hozzávetőleges életkori hozzárendelés tudományelméleti értelemben csak hipotézisnek tekinthető. A mérési adatok fogják megmutatni, melyik életkorban *mit tudnak* a tanulók, és csak további kísérletekkel lehet választ kapni arra a kérdésre, hogy hatékonyabb tanulásszervezéssel *meddig lehet eljuttatni* őket.

A különböző feladatok közötti kapcsolatok elemzése megmutatja a fejlődés leírására szolgáló skálák összefüggéseit is. Rövid távon elemezni lehet, melyek azok a feladatok, amelyek az egyes skálák egyedi jellegét meghatározzák, és melyek azok, amelyek több dimenzióhoz is tartozhatnak. A diagnosztikus mérésekből származó adatok igazán fontos elemzési lehetőségei azonban az eredmények longitudinális összekapcsolásában rejlenek. Így hosszabb távon elemezni lehet azt is, milyen az egyes feladatok diagnosztikus ereje, melyek azok a területek, amelyek tudása meghatározza a későbbi tanulás eredményeit.

Irodalom

Anderson, L. W. és Krathwohl, D. R. (2001): *A taxonomy for learning, teaching and assessing.* Longman, New York.

Artelt, C., Baumert, J., Julius-Mc-Elvany, N. és Peschar, J. (2003): *Learners for life. Student approaches to learning.* OECD, Paris.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. és Wiliam, D. (2003): *Assessment for learning. Putting it into practice.* Open University Press, Berkshire.

Ainsworth, L. (2003): *Power standards. Identifying the standards that matter the most.* Advanced Learning Press, Englewood, CA.

Ainsworth, L. és Viegut, D. (2006): *Common formative assessments. How to connect standards-based instruction and assessment.* Corwin Press, Thousand Oaks, CA.

Bán Sándor (2002): *Gondolkodás a bizonytalanról: valószínűségi és korrelatív gondolkodás*. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 231–260.

Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H. és Krathwohl, D. R. (1956): *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals.* Handbook. Cognitive Domain. Longmans, New York.

Carroll, J. B. (1993): *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies.* Cambridge University Press, Cambridge.

Carroll, J. B. (1998): *Matematikai képességek: A faktoranalitikus módszer néhány eredménye.* In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest, 15–37.

Clarke, S. (2001): *Unlocking formative assessment. Practical strategies for enhancing pupils learning in primary classroom.* Hodder Arnold, London.

Clarke, S. (2005): *Formative assessment in action. Weaving the elements together.* Hodder Murray, London.

Csapó Benő (1998): *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (2002): *Az új tudás képződésének eszközei: az induktív gondolkodás.* In: Csapó Benő (szerk.): Az iskolai tudás. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 261–290.

Csapó, B. (2004): *Knowledge and competencies.* In: Letschert, J. (szerk.): *The integrated person. How curriculum development relates to new competencies.* CIDREE, Enschede. 35–49.

Csapó Benő (2008): *A tanulás dimenziói és a tudás szerveződése.* Educatio, 2. sz. 207–217.

Csapó, B. (2010): *Goals of learning and the organization of knowledge.* In: Klieme, E. , Leutner, D. és Kenk, M. (szerk.): *Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes.* **56.** Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Beltz, Weinheim, 12–27.

Csíkos, C., Kelemen, R. és Verschaffel, L. (2011): *Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, DOI: 10.1007/s11858-011-0308-7

Dehaene, S. (1994): Number sense: *How the mind creates smathematics.* Oxford University Press, New York.

Dobi János (2002): *Megtanult és megértett matematikatudás.* In: Csapó Benő (szerk): Az iskolai tudás. Osiris Kiadó, Budapest. 177–199.

Hartig, J., Klieme, E. és Rauch, D. (2008, szerk.): *Assessment of competencies in educational context.* Hogrefe, Göttingen.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H. E. és Vollmer, H. J. (2003): *Zur Entwicklung* *nationaler Bildungsstandards.* Bundesministerium für Bildung und Forschung, Berlin.

Kontra József (1999): A gondolkodás flexibilitása és a matematikai teljesítmény. *Magyar Pedagógia,* **99.** 141–155.

Leighton, J. P. és Gierl, M. J. (2007, szerk.): *Cognitive diagnostic assessment for education. Theory and applications.* Cambridge University Press, Cambridge.

Marzano, R. J. és Haystead, M. W. (2008): *Making standards useful in the classroom.* Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria.

Marzano R. J. és Kendall, J. S. (2007): *The new taxonomy of educational objectives.* 2nd ed. Corwin Press, Thousand Oaks, CA.

Nagy József (1980): *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Nagy József (1990): *A rendszerezési képesség kialakulása.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004): *DIFER Programcsomag: Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer 4-8 évesek számára.* Mozaik Kiadó, Szeged.

O'Neill, K. és Stansbury, K. (2000): *Developing a standards-based assessment system.* WestEd, San Francisco.

OECD (2004): *Problem solving for tomorrow's world. First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003.* OECD, Paris.

OECD (2006): *Assessing scientific, mathematical and reading literacy. A framework for PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science.* OECD, Paris.

OECD (2009): *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science.* OECD, Paris.

Opfer, J. E. és Siegler, R. S. (2007): *Representational change and children's numerical estimation.* Cognitive Psychology, **55.** 169–195.

Pólya György (1945,1957): *A gondolkodás iskolája.* Bibliotheca, Budapest.

Pólya György (1962): *Mathematical Discovery. On understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* John Wiley and Sons. (Magyarul: *A problémamegoldás iskolája.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985)

National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Rényi Alfréd (2005): *Ars Mathematica.* Typotex Kiadó, Budapest.

Robitaille, D. F. és Garden, R. A. (1989): *The IEA Study of Mathemtics II: Contexts and outcomes of school mathematics.* Pergamon Press, Oxford.

Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája.* Gondolat Kiadó, Budapest

Snow, C. E. és Van Hemel, S. B. (szerk.) (2008): *Early childhood assessment.* The National Academies Press, Washington DC.

Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek.* Typotex Kiadó, Budapest.

Vidákovich Tibor (2002): *Tudományos és hétköznapi logika: a tanulók deduktív gondolkodása.* In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest, 201–230.

5.

Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

Gábri Katalin
Oktatási Hivatal

Lajos Józsefné
Oktatási Hivatal

Makara Ágnes
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Szendrei Julianna
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Szitányi Judit
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

Zsinkó Erzsébet
Eötvös Loránd Tudományegyetem TÓK Matematika Tanszék

A matematika részletes értékelési keretek felépítése a bevezető fejezetekben kifejtett elméleti háttéren alapszik. Ebben a fejezetben háromszintű tagozódás érvényesül a következő séma szerint. A matematikai tanulásának három dimenziója határozza meg a fejezet elsődleges tagolását. Ezen belül is a pszichológiai elveket kiemelő fejezet került az első helyre, ezzel is hangsúlyozva, hogy csak az értelmi fejlődés természetes folyamataihoz igazodó, gondolkodást fejlesztő matematikatanítás lehet eredményes. A második helyre tettük a matematikai tudás alkalmazási szempontok szerinti leírását, és a harmadik alfejezetbe került a matematika szorosabb értelemben vett diszciplináris elvei szerinti áttekintés. A matematikára különösen érvényes a három dimenzió összefonódása, és ahogy az előző fejezetek többször hangsúlyozták, az elkülönítés elsősorban a részletes diagnosztikus értékelés céljait szolgálja. Természetesen a tanításban a három dimenzió integráltan, szinte észrevétlenül jelenik meg, és párhuzamosan szerepelnek a különböző dimenziók feladatai az értékelésben is.

A második szerkezeti tagolás az évfolyamok alapján történik. A tanulók közötti nagy különbségek miatt az életkor szerinti hozzárendelés csak hozzávetőleges lehet, ugyanakkor a több szintre bontással hangsúlyozzuk az egymásra épülést és a fejlődési alapelvet. A harmadik rendező szempontot a matematikatudományi alapokon meghatározott területek jelentik. Mivel a fejlesztés több évfolyamot átfog, ezek a tartalmak más-más szinten mindegyik évfolyamon megjelennek.

Az itt leírt szerkezeti felépítésből következik, hogy ez a fejezet 36 részfejezetre tagolódik. Az egyes életkori sávokhoz 12-12 egység tartozik; a matematikatudomány egyes területeit 9-9 részfejezet képviseli, a három tudásdimenzióhoz pedig szintén 12-12 részegység sorolható. Az egyes tudásdimenziók leírása vonatkozó elméleti fejezetekben (e kötet első három fejezete) megtalálhatók az életkori sávok alkalmazásának és a tudásterületek kiválasztásának szempontjai. A fejlődés sajátosságaiból következik, hogy egyes területek fejlesztésének súlypontja korábbra, másoké későbbre esik. Ezért az itt következő 36 rész nem minden tekintetben arányos vagy azonos mértékben részletes. A részletek további pontosítása azonban csak felmérések, az empirikus adatok birtokában lesz lehetséges.

A matematikai képességek diagnosztikus értékelése

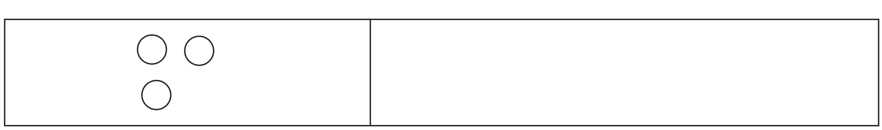
Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Az alsó tagozatos fejlesztés során a jól megtervezett konkrét cselekvő tevékenységekből, a diákok által megtapasztalt valóságból kiindulva, a valóságot bemutató vizuális, audiovizuális ábrázolásokon át jutunk el az absztraktabb rajzos, verbális, végül a jelekkel, szimbólumokkal történő megfogalmazásokig. A valóság, a fogalom és a szimbólum (jel) helyes összhangba hozása, egymásnak való kölcsönös megfeleltetése sok-sok tevékenységgel történik. Már óvodáskorban elkezdődik annak a képességrendszernek a fejlesztése, amelyet az egész számok értő használata jelez. Az egész számok – mint matematikai gondolkodáselemek – megfelelő szintű fejlettségét mutatja (többek között), ha az iskolába lépő tanuló számára világos, hogy nagyobb mennyiséget nagyobb szám reprezentál.

Egy jellemző óvodai feladat:

Rajzolj több karikát a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldali keretben látsz!



Az első osztályban kiegészítjük a kérdéseket, utasításokat:

1. *Rajzolj 3 karikával többet a jobb oldalra, mint amennyit a bal oldalon látsz!*
2. *Írd le számtannyelven is, amit az ábrán látsz! (*Megoldás*: 3+3+3=9; 3+6=9; stb.)*

A második osztályban tovább bővül a kérdések matematikai tartalma:

1. *Rajzolj annyi kört a jobb oldalra, hogy az ábrán összesen 18 kört lássunk!*
2. *Írj összeadásokat, kivonásokat az ábráról!* (Megoldás*: 18-3=15; 3+3+12=18; 15-3=12; stb.*)
3. *Piros színnel kerítsd körül úgy a köröket, hogy minden kerítésen belül ugyanannyi kör legyen!* (Megoldás*: 1×18 kör vagy 2×9 kör vagy 3×6 kör vagy 6×3 kör vagy 9×2 kör vagy 18×1 kör*)

A közös élmények, tapasztalatok, az együtt végzett matematikai tevékenységek egyfajta közös hivatkozási alapot jelentenek egy osztály/csoport számára. Minél gazdagabb és mobilabb ez a hivatkozási alap, annál biztosabb, hogy a később elhangzó kérdések, állítások, egyéb megfogalmazások során minden tanulónál ugyanazt a képzetet, cselekvéssort, emléket, gondolatot hívjuk elő.

Számok

Az óvodából érkező gyerekeknek vannak emlékeik arról, hogy tárgyakat, képeket hasonlítottak össze, tulajdonságokat vizsgáltak, kapcsolatokat kerestek, viszonyokat próbáltak megfogalmazni a maguk szintjén. Az iskolában folytatódnak a jól előkészített és változatos tevékenységek, tudatosulnak a fogalmak tartalmi jegyei. A tanulók ezáltal megértik és jól alkalmazzák a több-kevesebb (pl.: kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésekkel), ugyanannyi (pl.: párba állításokkal, mely párosítás e kapcsolat értő kialakításának módszere), kisebb-nagyobb, hosszabb-rövidebb illetve magasabb-alacsonyabb (pl.: összemérésekkel), stb. relációkat. A relációkhoz kapcsolódó jeleket (>; <; = szimbólumokat) a gyermeki környezethez, a meseviléghoz kapcsolódó elnevezéssel illetik (pl.: a róka szája arra nyílik, mert ott lát több tyúkot), de van, ahol a „relációs jel” megnevezést használják. (Óvatosan kell bánni a matematikai kifejezések korai bevezetésével, mert előfordulhat, hogy emiatt rosszul (pl.: szűkebb tartalommal) rögzülnek, s ez később hátrányt, meg nem értést okozhat a gondolkodásban.)

A megfigyelések, összehasonlítások sorozata képessé teszi a tanulókat az azonosításra, a megkülönböztetést segítő lényeges tulajdonságok felismerésére, megnevezésére, fokozatos absztrahálásra (pl. egy kiskutya két képen való ábrázolása közötti különbségek felfedeztetése), nemcsak a fizikai kontúrokra (pl. lehúzza vagy felemeli a kutyus a fülét), de akár érzelmi/hangulati állapotot kifejező különbségek észrevételére is (pl. nyugodtan ül vagy izmait megfeszítve, haragos képpel, nyitott szájjal van lerajzolva). A különbségek, változások megfigyelése, megbeszélése, tudatos kiemelése a műveletek képi megjelenítését vetíti előre, egyfajta előkészítés a műveleti szimbólumok számára.

A tevékenységek között a konkrét képeknek, ábráknak, rajzoknak jól választott mozgással (pl. sorozatok képzésekor felállás, leülés, különböző kéztartások), versikék szótagoló elmondásával (pl. egy elem kiválasztása „kiszámolókkal”), hangokkal (pl. dobbantás, koppantás, taps vagy akár valamely előénekelt hang) való leolvasása egyfajta „számlálást” jelent. Például:

Jelöljön a ♣ *egy tapsot, a* ♥ *pedig egy lábdobbantást.*
Az alábbi képet „olvassuk le” a jeleknek megfelelően!

♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥♣♣♣♥♥

Találjatok ki mozgások, hangok segítségével különböző leolvasásokat!

A számlálás ugyanazon kép (szám) esetén is többféle módon történhet. Ezt sokan így fogalmazzák meg: „egy számnak többféle neve van”. Ez azt jelenti, hogy a számot például bontott alakjaival, különbségalakokkal is kifejezhetjük. A felsorolt tevékenységek célja, hogy a tanuló legyen képes a tanult számkörben a biztos számlálásra, az elnevezések, jelölések emlékezetbe vésésére, felidézésre, alkalmazására.

A számfogalom kialakítását, fejlesztését általában három irányból közelítjük meg. Ehhez kapcsolódóan az alábbi oktatás-módszertani megfontolásokat tesszük:

Műveletek

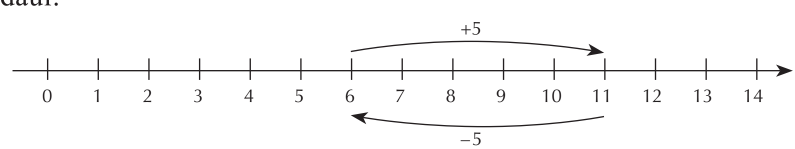
A matematikai képességrendszerben additív gondolkodásnak nevezett jelenség eklatáns megjelenési és értékelési területét jelentik az egész számokkal végzett matematikai műveletek. Maga az additív jelző szótárilag összeadásra utal, azonban tágabb értelemben ide tartoznak a mennyiségek, számosságok összehasonlítását megvalósító tudáselemek. Ezek a tudáselemek teszik lehetővé annak megértését, hogy adott mennyiségből valamennyit elvéve, majd ugyanazt hozzátéve a kiinduló mennyiséghez jutunk.

A számfogalom fokozatos kialakítását, mélyítését szolgáló tevékenységek során előkészítjük az összeadás (+) és a kivonás (−) műveletének matematikai tartalmú fogalmát: a számok különböző leolvasásával, az összegalakok (pl. 5 dió és 2 alma ugyanannyi darab, mint 3 alma és 4 dió) és különbségalakok leolvasásával: pl. egy képen jól látható, hogy 5 fiú közül 1 fiú nem evett, azaz 5 fiú közül 4 megette az ételt. Az 5−4 az 1-nek különbségalakja.

A pótlás (valamennyire kiegészíteni (pl. 3+△=7)) és a bontás (az összes két vagy több részre osztása (pl. 8=△+△)) tartalmilag elsősorban az összeadáshoz kapcsolódik, matematikai hátterét tekintve nyitott mondatok megoldását jelenti. A bontás lehetővé teszi egy szám sokféle előállítását, de egy szám előállítása pótlással és elvétellel is történhet (pl. a 4 szám 1-ből, 2-ből, 3-ból pótlással, míg 5-ből, 6-ból stb. elvétellel állítható elő). A változatos kirakások, a képes, szöveges szituációk során szerzett, még jellemzően szóban megfogalmazott tapasztalatok a műveletvégzés algoritmusát is jól előkészítik. Mire megjelenik az írásbeli lejegyzés, a műveleti jelek (szimbólumok) értése, alkalmazásuk biztos tudása a tanult számkörben jól megalapozott. Az első két évfolyamon elsősorban az összeadás, a kivonás fogalmát alapozzuk meg és mélyítjük fokozatosan (a 2. évfolyamon a 100-as számkörre kiterjesztve), valamint kialakítjuk az önellenőrzés igényét.

Kiemelt szerepet tulajdonítunk a számegyenes segítségével történő műveletértelmezésnek is.

Például:



A számegyenesen való kétirányú lépegetések összekapcsolják a műveletet és megfordítását. A nyilak jobbra mutatva a hozzáadást, balra mutatva az elvételt jelölik. Jól szemléltetik, hogy a 6-nál 5-tel nagyobb a 11, és a 11-nél 5-tel kisebb a 6.

Tevékenységek sorával készítjük elő a szorzás (egyenlő tagok összeadása), részekre osztás (pl. megjelenítéssel, jelölés, pl. 20/4 bevezetésével), bennfoglalás (megjelenítés, jelölés, pl. 20:4), maradékos osztás (kirakással, maradék megjelölésével) fogalmi jellemzőit.

A műveletek jellemzőinek, kapcsolatainak vizsgálata során az első évfolyamon elsősorban az összeadás tagjainak felcserélhetőségét, csoportosíthatóságát fedeztetjük fel a diákokkal, és kapcsolatot keresünk az összeadás és kivonás között. A második évfolyamon a tagok változtatása és az eredmény változása közötti összefüggést, a szorzás és osztás közötti kapcsolatot is megfigyeljük, és konkrét tárgyi tevékenységről leolvassuk a tényezők felcserélhetőségének értelmezését.

Algebra

A matematikatudományi szempontú tartalmi felosztásban az algebrai jelek és eljárások külön egységet képeztek a „Számok, számrendszerek” tudásterületen. A jelek kezeléséhez szükséges absztrakciót feltételezi a piaget-i értelemben vett konzerváció művelete, amely az additív és multiplikatív gondolkodás elemeként a matematikai gondolkodás alapelemét jelenti.

Relációk, függvények

A relációk és függvények témakör kiemelt szerepet játszik egyes gondolkodási képességek fejlesztésében. A multiplikatív gondolkodás elemei között említhetjük az induktív gondolkodást (azon belül a számsorozatokat, a szám- és szóanalógiákat), amelyek a „Relációk, függvények” témakörhöz tartoznak. Hasonlóan, az arányossági gondolkodás fejlesztése során megjelenik az egyenes arányosság függvényként való értelmezése.

A számlálás készségének fejlesztéséhez kapcsolódóan a tanulóknak csökkenő és növekvő számsorozatokat kell tudni folytatniuk a természetes számok körében, százas számkörben. Egyenletes változó sorozatok szabályait is föl kell ismerniük.

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

1 4 7 10 13 ___ ___

A tanulóknak képesnek kell lenniük a periodikusan ismétlődő mozgások, ritmusok követésére és folytatására. Számsorozatok esetében fel kell ismerniük, hogy csökkenő, növekvő vagy periodikus sorozatról van-e szó.

Folytasd a sorozatot két taggal!

1 3 5 3 1 3 ___ ___

Hogyan folytatnád a következő sorozatot? Keress legalább kétféle szabályt!

2 4 6 ___ ___

Ugyancsak a multiplikatív gondolkodás alkalmazási területét adják az olyan feladatok, amelyekben számsorozatok vagy egyéb sorozatok (tárgyakból, egyéb elemekből), táblázatok elemei közötti összefüggéseket keresünk. A tanulók induktív és deduktív gondolkodási képességeit egyaránt fejlesztik ezek a feladatok. A képességfejlesztés szempontjából és a megoldások elbírálása szempontjából egyaránt fontos a szabályok sokféle megfogalmazási lehetőségét megbeszélni, megvitatni, értelmezni.

Figyeljétek meg az alábbi virágokból készített sorozatot, és válaszoljatok a kérdésekre!

a) Rajzold le a következő tagját a sorozatnak!
b) Milyen szabály szerint készítették ezt a sorozatot?
c) Ha folytatnánk a sorozat rajzolását, mit gondolsz, mi lenne a sorozat 12., 15., 20. tagja?

A szöveges feladatok egésze vagy egyes részei gyakran tartalmaznak olyan gondolatokat, melyek közös megvitatása nevelő hatású, ezért feltétlenül beszélgessünk róla (pl. szólhat a szöveg a környezetvédelemről, barátságról, önzetlen segítségnyújtásról, az uzsonna társakkal való megosztásáról, a kulturált együttélés feltételeiről, épülhet családi, ünnepi, földrajzi, történelmi, művészeti témákra).

A szöveges feladatokkal való rendszeres foglalkozás fejleszti a tanulók pontos, világos és értelmes kommunikációját, a szövegértés és -alkotás kompetenciájának megerősítését, a problémamegoldó gondolkodást, a kreativitást, az érvelésen alapuló viták, az ellenőrzés, az önellenőrzés igényének kialakítását.

A tanulóknak képeseknek kell lenniük 2. osztály végére olyan sorozatok szabályainak megállapítására és a sorozat folytatására is, amelyben a számsorozat tagjainak különbségéből célravezető a szabály megfogalmazása.

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

1 3 6 10 15 ___ ___

A legtöbb számsorozat esetén létezik ugyan egy kézenfekvő szabály, amelyet a legkisebb kognitív erőfeszítéssel meghatározhatunk. Az induktív gondolkodás képességének egyik eleme éppen az, hogy a tanuló fölismerje az információelméleti szempontból „gazdaságos”, emiatt kézenfekvőnek vagy legintelligensebbnek nevezhető megoldást.

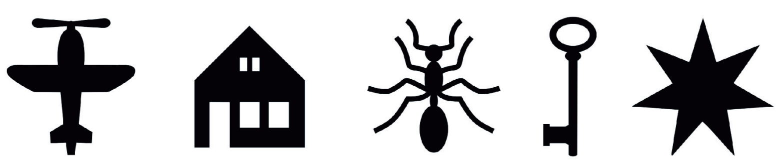
Azonban az induktív gondolkodás képességének fejlesztése mellett a divergens gondolkodás alakításának követelményéből következik, hogy minden olyan szabályt el kell fogadnunk megoldásként, amelyet a tanuló képes racionálisan levezetni. Az iménti feladat esetében például a számok közötti különbség mindig eggyel nő, vagyis a következő tag 6-tal lesz nagyobb, mint 15. A leegyszerűsítő, a sorozat információtartalmát nem kihasználó szabályalkotást is el kell ismernünk, azonban a tanórán megmutatjuk ilyen esetekben, hogy „több” van a sorozatban, mint például a két következő lehetséges leegyszerűsítő szabály: (1) egyszerű, monoton sorozat, ahol a soron következő tag nagyobb az előzőnél. Ha ezt a szabályt alkotjuk meg, akkor a folytatásban bármely két természetes számot elfogadjuk, amelyek a sorozat monotonitását biztosítják. (2) Gyakran előfordul kisiskolásoknál, hogy periodikusnak ítélnek meg egy számsorozatot, amelyet a feladat kitűzője nem annak szánt. Ebben az esetben a 15-öt az 1 és a 3 követné. A feladatok kitűzése során tehát vagy eleve adjuk meg a sorozat folytatásának szabályát (vagy legalább utaljunk a megállapítandó szabály típusára), vagy pedig a szabályalkotás elválaszthatatlan lesz a sorozat folytatásától.

Geometria

A matematikai gondolkodás rendszerében két képességet emelünk ki, amelyek szorosan kötődnek geometriai tartalmakhoz. Az intelligenciakutatás egyik élénken vizsgált képességterülete a térbeli gondolkodás, vagyis az embernek az a képessége, hogy fejben képes elforgatni síkbeli és térbeli alakzatokat, és azokkal műveleteket végezni, például geometriai transzformációként értelmezett forgatást. A geometria egyik részterületéhez, a méréshez pedig a multiplikatív gondolkodás részeként értelmezett arányossági gondolkodás kapcsolható. Mind a terület- és térfogatszámításban, mind a mértékváltásban adhatók olyan feladatok, amelyek lényegében az arányossági gondolkodás fejlettségét vagy annak hiányosságát jelzik. Az 1-2. osztályos követelmények között ez utóbbi képességet még nem említjük, az előbbiekben két, geometriai tartalmakhoz jellemzően kötődő képességterület említése volt a célunk. A térbeli gondolkodáshoz e korosztályban a következőkben leírt tartalmak kapcsolódnak.

A transzformációkkal létrejövő számtalan minta (a természetben, népművészetben, az épített környezetben, különböző emberi alkotásokban található mintákat is ideértve) megfigyelése előkészíti a szimmetriák, ismétlések, ritmusok, periodicitások matematikai értelmezését. A tevékenységek elősegítik, hogy *a tanulók képessé váljanak a szimmetriák felismerésére tapasztalati (manipulatív és képi) szinten. Legyenek képesek megkülönböztetni a tükörképet az eltolt képtől az összkép alapján.*

Másold át az alábbi ábrákat áttetsző papírra!



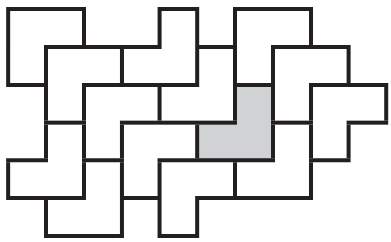
Próbáld ki, hogy mely ábrák hajthatók össze úgy, hogy a két rész pontosan fedje egymást?

Megoldás: az 1., 3., 5. alakzatok hajthatók össze a feltételnek megfelelően.

Jellegzetes feladat a térbeli képesség tesztelésére:

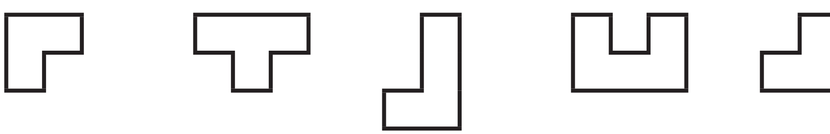
Színezd grafitceruzával azokat a lapokat, amelyek ugyanúgy állnak, mint a szürkére színezett lap!

a)



Karikázd be annak a lapnak a betűjelét, amelyikkel folytatható a fenti parkettázás! ~~**Húzd át**~~ annak a lapnak a betűjelét, amelyikkel nem!

b) *c)* *d)* *e)* *f)*

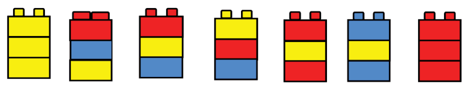


Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatív gondolkodás műveletei részben a kombinatorika matematikai tudásterületének elemeihez köthetők. A permutálás, a variálás és kombinálás matematikai jelenségeinek pszichikus megfelelőit feltárva számos olyan további képességelemhez jutunk (pl. adott halmaz összes részhalmazának megkeresése, a Descartes-féle szorzathalmaz generálása), amely az iskolai matematikaoktatásban nem tipikusan a kombinatorika része. A matematikai gondolkodás elemei között azonban ez utóbbiak is kétségkívül a mulitplikatív gondolkodás megnyilvánulásai, pszichológiai szempontból pedig a kombinatív gondolkodáshoz sorolhatók.

Általában a 2. évfolyam végére nem jutunk el önálló kombinatív képességrendszer kiépítéséhez, hiszen ez feltételezne valamely struktúrában való gondolkodást, ami viszont magas matematikai absztrakciós képességet igényel. Ezért a mérés során sem célszerű felvetni ilyen jellegű problémákat, hanem érdemes kis elemszám esetén értékelni a részképességek fejlettségét.

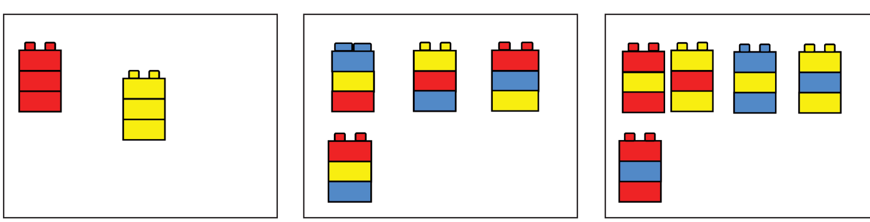
A továbbiakban néhány feladaton keresztül mutatjuk be a kombinatorika épülését az alapozó szakaszban:



Ebben a feladatban a problémát a szempont tartása jelenti. Megfelel-e a feltételnek (háromemeletes, piros, kék, sárga színek alkotják)? Nincs az új tornyok között olyan, ami már korábban szerepelt? A tanulók tudásának felmérése szempontjából fontos, hogy ki mennyi új objektummal bővítette a készletet, kinek sikerült a meglevőktől és egymástól is különbözőt alkotni.

Nehezítést jelenthet a feladat másfajta megfogalmazása:

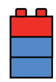
Piros, sárga és kék Lego-elemekből tornyokat építettem. Ezután három csoportba rendeztem azokat:



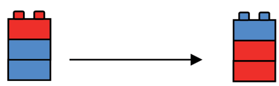
Milyet építhettem volna még? Rajzolj további tornyokat a megfelelő helyre!

A fenti feladatnál a rajz, és nem a szöveg mutatja a rendszerezés szempontját. A szempont megfejtése a feladat lényeges eleme (egy-, két-, illetve háromszínű tornyok). Ebben az elrendezésben azonban a teljes rendszer átláthatósága kérdéses. Kérdéses továbbá az is, hogy található-e más szempont is a megoldáshoz.

A második csoport elrendezése azt mutatja, hogy az egymás alatt lévő elemek a tornyok „megfordításával” jöhetnek létre. Ez a stratégia itt nagyon jól működik. Nem vihető viszont tovább a harmadik csoportra, hiszen itt a példák sorából kimaradt néhány jellemző elem, ezért nem tűnhet fel az esetleges hiány. Elképzelhető, hogy valaki a harmadik csoportban lévő elemek elrendezésében érez valamiféle szabályosságot, nevezetesen, hogy az elemek egymás inverzei. Ebben a rendszerben viszont nem garantált az összes elem megtalálása, hiszen a rajz nem mutat példát a következő típusra:



A feladatban tehát más-más stratégiát kell alkalmazni az egy-, két-, illetve háromszínű elemek megtalálásához. Elképzelhető, hogy valakinek épp a megoldási stratégia jelenti a szempontrendszer alapját, és a fenti elemet a második csoportba rajzolja, hiszen

ebből a toronyból:  ez a torony megfordítással jön létre.

A fenti feladat bemutatásával a kombinatorikai gondolkodás sokszínűségét szerettük volna illusztrálni, melynek egyenes következménye, hogy az értékelés során ebben a szakaszban meg kell elégednünk az adott feltételrendszerbe illeszkedő további néhány elem megtalálásával.

A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A számfogalom fejlődésében az egész és a racionális számok megfelelő reprezentációja kulcsfontosságú. Az additív gondolkodás megjelenési formái között szerepelnek olyan képességek, amelyek elvezetnek a racionális számok reprezentációjához. A racionális számok a gondolkodásunkban a számláló és a nevező közötti viszony mentális leképezései. Már óvodáskortól előkészítjük a részekre osztás segítségével a törtszámok tapasztalati bázisát.

Az egész egyenlő részekre osztásával különféle mennyiségek (hosszúság, tömeg, űrtartalom, terület, szög) segítségével alakul az egységtört fogalma, majd az egységtörtekből több rész egybefogásával állítanak elő kis nevezőjű törtszámokat. Kétirányú tevékenységet végeznek ennek során a gyerekek. Vágással, tépéssel, hajtogatással, színezéssel, a részek összeillesztésével egységtörtek többszöröseit állítják elő, illetve az egészhez viszonyítva megneveznek előállított törtrészeket. Különféle mennyiségekből előállított törteket összehasonlítanak, nagyság szerint rendezik azokat, keresik az egyenlőket.

Az additív gondolkodási formák közé tartoznak olyan képességek, amelyek a számtani műveletek tulajdonságainak megfelelő elsajátítását teszik lehetővé. Az összeadás műveleti tulajdonságairól a gyerekek folyamatosan szereznek tapasztalatokat. A számolási eljárások lehetővé teszik, hogy a tanulók kellő biztonsággal válaszoljanak olyan problémafelvetésekre, amelyek konkrét számokkal végzett műveletek végzését vagy összehasonlítását igénylik.

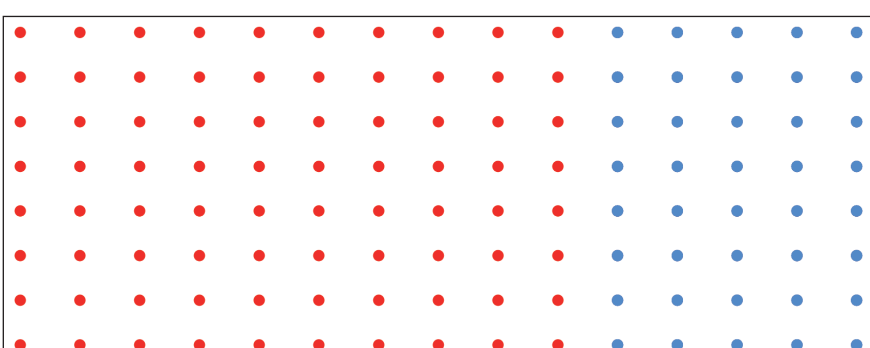
Például:

A Szabó család négynapos kiránduláson vett részt. Az első napon 380 km-t, a másodikon 270 km-t tettek meg, és ekkor elérték az útjuk célját. Visszafelé ugyanezen az úton jöttek. 400 km megtétele után értek az éjszakai szálláshelyre. Hány kilométert kellett megtenniük a negyedik napon?

Kirakások, szám- és szöveges feladatok kínálnak lehetőséget a zárójel egy számmá összekapcsoló szerepének gyakorlására, az összeg tagonkénti szorozhatóságára.

Például:

A rajz egy gyümölcsöskertet ábrázol. A piros körök almafákat, a kékek szilvafákat jelölnek. Hány gyümölcsfa van ebben a kertben?



Az írásbeli szorzás során tudatosan alkalmazzák a műveleti tulajdonságokat.

Például:

Melyik szorzás helyes?

a)
$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{526} \\ 2367 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{526} \\ 18636 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \underline{263} \cdot 27 \\ 1841 \\ \underline{5260} \\ 7101 \end{array}$$

Az írásbeli műveletek közül a legnehezebb eljárás az írásbeli osztás. Negyedik osztályban eszközhasználattal ismerkednek meg a gyerekek az egyjegyű számmal való osztással.

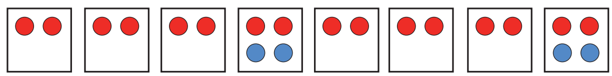
A műveletvégzések során biztonságot ad a gyerekeknek a többféle ellenőrzési módszer, amelyekkel az eljárás tanulásakor megismerkednek. Az ellenőrzés módszerei között megtalálható a becslés, a szorzás, az osztandó tagokra bontása, valamint a zsebszámológép használata.

Negyedik osztályban már általában lehetőséget teremtünk többféle megoldási mód keresésére és a megoldások összevetésére. Ily módon fejleszthető a modellek között létező kapcsolat felismerésének képessége. Tudatossá válik a gyerekek számára a különböző modellekben megjelenő adatok azonossága, az ábrázolások és a műveletek összekapcsolása. A különféle megoldási módok megismertetése, ezek értő alkalmazása biztosítéka annak, hogy új helyzetekben, megváltozott feltételek esetén is tudják a gyerekek ezeket az eljárásokat aktivizálni, szükség esetén a problémához illően módosítani. Így lesz a tanulók ismerete könnyen továbbfejleszthető. A többféle megoldási mód megismerése, összehasonlítása során a gyerekek megítélhetik azok célszerűségét, szépségét is.

Példa egy feladat többféle módon történő megoldására:

Egy magas hegy tetejére felvonóval lehet feljutni. Néhány felvonóban egyszerre ketten utaznak, néhány felvonóan pedig négyen. Egy 20 fős társaság 8 kabinban fért el. Hány két-, és hány négyszemélyes kabinban utaztak?

1. megoldás: *Tevékenységgel, eszközhasználattal*
   A gyerekek maguk elé helyeznek 8 papírlapot, amelyek a kabinokat szemléltetik, előkészítenek 20 korongot, amelyek az utazókat modellezik. Elhelyezik a korongokat a papírlapon úgy, hogy minden lapra két, illetve négy korong jusson.

   A kérdésre a választ a kialakult kép alapján fogalmazzák meg: 6 kétszemélyes és 2 négyszemélyes kabinban utazott a 20 fős társaság.
2. megoldás: *Próbálgatással, táblázat alkalmazásával*

A kétszemélyes kabinok száma	1	2	3	4	5	6
A négyszemélyes kabinok száma	7	6	5	4	3	2
A kétszemélyes kabinokban utazók száma	2	4	6	8	10	12
A négyszemélyes kabinokban utazók száma	28	24	20	16	12	8
Összes utazó száma	30	28	26	24	22	**20**

   Ebből a megoldásból több információ is leolvasható, és olyan kérdésre is választ kapunk, amelyet az eredeti probléma nem fogalmaz meg. Például: 30 fő hogyan utazhat fel a hegyre nyolc kabinban?
3. megoldás: *Nyitott mondat segítségével*
   Jelölje a felhasznált kétszemélyes kabinok számát: $\square$
   Ezek szerint a felhasznált négyszemélyes kabinok száma: $8-\square$
   A kétszemélyes kabinokban utazók száma: $\square\cdot 2$
   A négyszemélyes kabinokban utazók száma: $(8-\square)\cdot 4$
   Az összes utazó száma: $\square\cdot 2 + (8-\square)\cdot 4 = 20$
   Ebből meghatározható, hogy a kétszemélyes kabinok száma 6.
   (A gyerekek ennek meghatározásához a tervszerű próbálgatás módszerét alkalmazzák.)
   A felhasznált négyszemélyes kabinok száma 2.

A fent bemutatott egyetlen feladat három lényegesen különböző megoldási módja példa arra, hogy nem várhatjuk a gyerekektől egyetlen séma alapján a problémák megoldását, nem ragaszkodhatunk szigorúan betartandó lépések követéséhez. Ezért jó, ha értékelésünk a helyes modellválasztásra és a modellen belüli problémamegoldásra irányul.

Ezeken az évfolyamokon megkezdjük későbbi fejlesztésre váró fogalmak, eljárások előkészítését anélkül, hogy ennek tudatosítása a gyerekek számára megtörténne. A szervezett tapasztalatszerzés csupán kezdeti lépése a hosszú folyamatnak (pl. következtetés törtrészről az egészre). A tantervvel összhangban a tanulók matematikai ismeretei a további évfolyamokon továbbfejlődnek, ezért indokolatlan elvárni tőlük a fogalmak pontos meghatározását.

Relációk, függvények

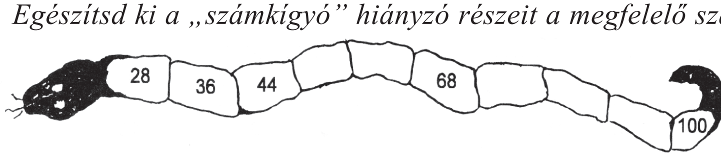
3–4. osztályban a tanulók tudnak egyszerű grafikont készíteni, róla adatokat visszaolvasni. Képesek szöveggel, képekkel adott helyzethez matematikai modellt keresni, azt az adatoknak megfeleltetni. Szükség esetén egyéb matematikai modelleket (sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok, grafikonok) használnak a szöveges feladatok megoldásához.

Az egyszerű összefüggéseket a tanulók felismerik, kifejezik példákkal, elemi általánosítással. Az összefüggések felismerése, kapcsolatok leolvasása történhet ábráról, táblázatból.

A megtanult ismeretek, a készségek, képességek értékelésére kezdetben az egyszerű utasítással megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben általában egy megtanult, begyakorlott lépés vagy lépéssor elvégzésére kérjük a tanulót. Előfordul, hogy még nem matematikai szimbólumokat használunk a feladat megszövegezésére, hanem rajzot, ábrát, és gyakran az elvégzendő lépéseket sem „matematikai” formában, hanem rajzban, valamilyen módon szemléltetve, sőt a mindennapi gyakorlatban valamilyen tevékenység formájában várjuk. A következőkben néhány példafeladattal szemléltetjük, milyen változatos tartalmú feladatok nyújtanak lehetőséget az induktív szabályfelismerés és -követés gyakorlására.

Folytasd az ábrák rajzolását a megkezdett módon:
\# ¤ Δ Δ ♥ # ¤ Δ Δ ♥ # ¤ Δ ....

Egészítsd ki a „számkígyó” hiányzó részeit a megfelelő számokkal!



Folytasd az alábbi sorozatot 3 elemmel a megadott szabály alapján: az elemek közötti különbség mindig ugyanannyival nő.
1 3 6 ....
Keress Te is szabályt, és folytasd az alapján is a sorozatot!

Milyen jel van az (5;C) jelzéssel megadott négyzetben? ....

D		☺		⌂		⌂	
C	⌂		☼		☼		☼
B		☼		⌂		☼	
A	☼		☺		☺		⌂
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

Színezd ki az alábbi utasítás alapján a megadott négyzetrács elemeit!

sárga: (3;f) (4;e) (4;g) (5;g)
piros: (2;f) (3;e) (3;g) (4;h) (5;e) (5;g) (6;f)
zöld: (3;c) (4;b) (4;c) (4;d) (5;c)
barna: (1;a) (2;a) (3;a) (4;a) (5;a) (6;a)

h						
g						
f						
e						
d						
c						
b						
a						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

Milyen szabályosságot találsz a barnával színezett négyzetek jelzőszámai között?

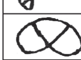
Az arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, nagyítás, stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására. A számok, műveletek és algebra fejezetekben is szerepelnek hasonló matematikai szerkezetű vagy tartalmú feladatok; az itteni megjelenést az indokolja, hogy ezeknél a feladatoknál a matematikai mélystruktúra kifejezetten adatpárok vagy függvények kezelését igényli.

Mennyibe kerül 6 kg burgonya, ha 4 kg ára 312 Ft?

Zsófi a 27 km hosszú kerékpárutat másfél óra alatt tette meg, egyenletes sebességgel. Mennyi utat tett meg 10 perc alatt?

A gyerekek lépésekkel mérik meg a tanterem hosszát. Csaba 18-at tudott lépni, amíg az egyik faltól a másikig ért, Julcsi pedig 24-et. Melyikük tudott hosszabbat lépni?

Nagyi az unokáknak péksüteményt készített, összesen 32 db-ot. Kiflit és perecet sütött. Melyikből mennyit?

	*5*	*6*	*7*	*10*					
	*27*								

Zoli hétfőn kapott egy malacperselyt, és egy 200 forintost. Ezt bedobta a perselybe, és minden este bedobott még egy 5 Ft-ost és egy 10 Ft-ost. Melyik napon lett a perselyben 320 Ft-ja?

A szöveges feladatok között nagy jelentőségűek azok, amelyek a valóság jelenségeit, valamilyen mozgást, változást írnak le. Leggyakrabban hőmérsékleti változást, növekedést, mozgást írunk le. Ezeket a változásokat kell a tanulóknak felismerniük, esetleg szemléltetniük, kapcsolatokat, összefüggéseket, szabályosságokat keresniük. A jelenségek leírásakor, szemléltetésekor lehetőség van a különféle helymeghatározás értékelésére. A következő feladatsorozat az összefüggések felismerésének és a szabálykövetésnek változatos tartalmú lehetőségeit illusztrálja.

Amikor Panni született, az édesanyja 25 éves volt. Hány éves most az édesanyja, ha Panni 9 éves? Hány éves lesz akkor Panni, amikor az anyukája 50 éves lesz? Mikor lesznek ketten együtt összesen 99 éve-

sek? Készíts táblázatot kettőjük életkoráról, és a táblázat adatai alapján fogalmazz meg más állításokat is!

Két város közötti távolság 190 km. Mindkét városból reggel 8 órakor indul el a másik város felé egy vonat. Az egyik vonat 50 km-t tesz meg egy óra alatt, a másik pedig 45 km-t. Készíts rajzot a mozgásukról, és állapítsd meg, mikor találkoznak!

Egy tározóban 4800 hl víz van. Egy szivattyú percenként 8 hl vizet emel ki belőle, egy csővezetéken keresztül pedig percenként 2 hl víz folyik bele. Mikor ürül ki a tározó?

Péter rejtvényt fejt. Egy négyzethálós papír valamely pontjából kiindulva kell a megadott utasítás szerint rajzolnia. A nyilak a mozgás irányát, a számok a lépések számát jelölik. Mit rajzolt Péter, ha pontosan követte az utasítást?

8↑ 5→ 2↓ 3← 1↓ 2→ 2↓ 2← 3↓ 2←

Geometria

A térbeli képességhez tartozó tudáselemek révén a tanulók képessé válnak síkbeli sorminták, terülő minták, parkettaminták létrehozására kirakással, színezéssel, sablonnal, és hálón való rajzolással.

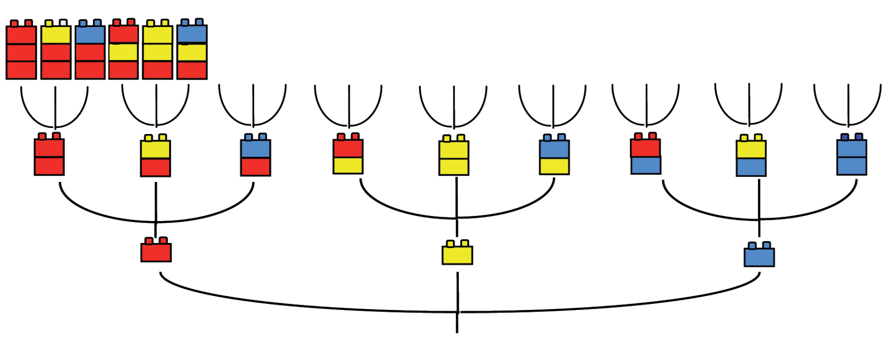
A mérés területén megjelenik a mértékváltás követelménye. A mértékegységek átváltását a tanulóknak csak olyan esetekben kell tudniuk, amelyekhez – elvileg – reális tapasztalat kapcsolódhat. Így ugyanis a mechanikus számolás technikáját (és ezzel együtt biztonságát) a valós tapasztalatokban gyökerező arányossági gondolkodás veheti át.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

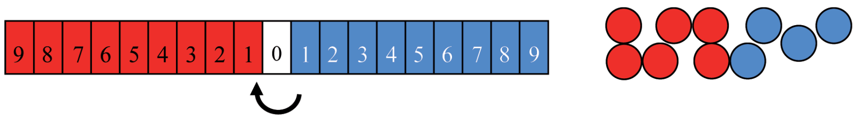
A kombinatorika és valószínűség témákban ezekben az évfolyamokban a rendszerezőképesség fejlesztése kerül a középpontba. Például a tanórán a gyerekek feladata lehet, hogy alkossanak háromszintes tornyokat, próbáljanak minél többfélét építeni. Keressék az összes lehetőséget. Az órán a tanító megkéri a gyerekeket, hogy figyeljék meg és gyűjtsék össze azokat az ötleteket, hogy melyek alapján tudják megállapítani: elkészült-e az összes lehetséges torony. A teljesség igénye nem feltétlenül alakul ki a gyerekekben önmagától, hosszabb idő után sem. Szükség lehet a tanító problémafelvetésére, segítségére: van-e még másmilyen, vagy ennyiféle van, és nincs több? Hogyan láthatja át a kisgyerek, hogy sikerült-e minden lehetőséget megtalálnia, vagy ha nem, miféle hiányzik még? Ennek egy fontos és jó lehetősége, hogy az elkészített tornyokat valahogyan „szépen” elrendezik maguk előtt.

Néhányan esetleg arra figyelnek, hogy milyen színű a torony alsó eleme, s külön rakják azokat, amelyeket pirossal kezdtek építeni, külön a kék és külön a sárga aljú tornyokat. Ez esetben ráérezhetnek arra, hogy a három csoportban ugyanannyi toronynak kellene készülnie, s ez támpont lehet a hiány megállapításához, esetleg a hiányzó építmény megkereséséhez is. Úgy szokták megfogalmazni, hogy „szimmetria-oka” van, hogy a három csoportban ugyanannyiféle torony lesz. Ennek a gondolatnak az a jelentése, hogy semmi sem magyarázná, miért lehetne többféleképpen folytatni az építést, ha alulra az egyik színt tesszük, mint ha a másikkal kezdtünk volna.

Ennek az elrendezésnek előnye, hogy továbbvihető: bármelyik színnel kezdték, középre ismét háromfélét tehetnek, s bármilyen is az alsó kettő, mindig háromféleképpen lehet befejezni a harmadik elemmel az építkezést. Ezt a rendszerépítést egy fához hasonlítható diagrammal szemléltethetjük (így is nevezik: „fa-diagram”):

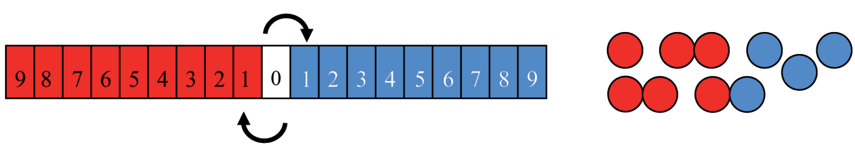


A valószínűségi szemlélet fejlesztése során rengeteg játék kerül kipróbálásra. Például korongokkal. A játékot párban játsszák. A pár tagjai a játéktáblán oldalt választanak maguknak, és egy, a 0-ból (fehér mező) induló bábut mozgatnak. Jobbra léphetnek egyet, ha a 10 korong feldobása után több a piros, mint a kék, és egyet léphetnek balra, ha több a kék, mint a piros korong. (Ha ugyanannyi, akkor nem lépnek.)



Példánkban jobbra lehet lépni egyet. A játékot az nyeri, akinek az oldalán áll a bábu mondjuk 20 dobás után. (Ha éppen 0-án áll, akkor döntetlen). A játék egyszerű, a valószínűségi érzés azt diktálja, hogy ugyanolyan jó választás a kék oldal, mint a piros. Amikor osztály szinten összevetik tapasztalataikat, ugyanezt állapíthatják meg.

Egy másik alkalommal két bábuval és 10 koronggal játszanak úgy, hogy „A” akkor léphet, ha a piros korongok száma páros, „B” pedig akkor, ha a kékeké páros. Mindkét játékos a saját bábuját mozgatja.



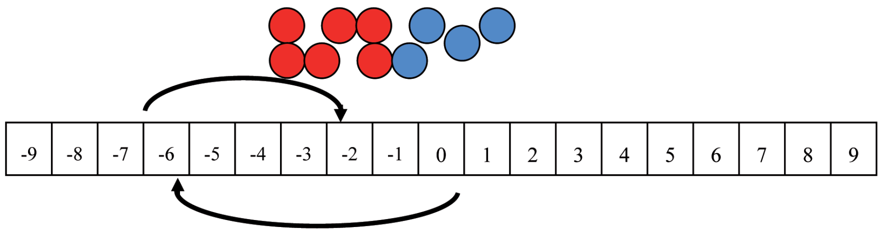
Példánkban mindkét játékos lép egyet. Néhány játékot le kell játszaniuk ahhoz, hogy megfigyeljék: a játék mindenképpen döntetlen lesz, hiszen vagy mindkét játékos léphet vagy egyik sem. Érdemes azonban megtréfálni a gyerekeket ezzel a problémával, hiszen így válik sajátjukká az a gondolat, hogy a 10 csak olyan összegre bontható, melynek mindkét tagja páros, vagy mindkét tagja páratlan.

Ha a korongok számát most 9-re változtatjuk, ismét olyan játékot játszunk, ahol a valószínűségek megegyeznek.

További megfigyeléseket tehetnek, ha a problémát általánosítják. Például más páros vagy páratlan számú koronggal játszanak. A fejlesztés során a tanulók számára sokkal inkább motiváló feladat megszerezni a páros és páratlan számok összegre bontásáról a tapasztalatot egy ilyen játék kapcsán, mint mechanikusan végzett műveletekkel.

Más didaktikai céllal ismét páronként 10 koronggal játszanak. Egy bábu 0-ról indul, de most a játéktáblát a számegyenes váltja föl. A korongok feldobása után annyit lépjenek negatív irányba, amennyi piros

korong esett az asztalra, és annyit pozitív irányba, amennyi kék korong esett az asztalra!
Például ezt dobtam:



Negatív irányba lépek hatot, majd onnan, ahová érkeztem, pozitív irányba négyet. Léphettem volna előbb a kék irányba négyet, majd a piros irányba hatot. (A végén vajon ugyanoda érek? Vagyis a kommutativitás működik akkor is, ha negatív számok is szerepelnek?)

Most tízet dobnak egymás után úgy, hogy a bábu mindig onnan lép tovább, ahol az előző dobás után megállt. A gyerekeknek a játék megkezdése előtt tippelniük kell arra, hogy 10 dobás után hová érkezik a bábu ezek közül a leggyakrabban: −6, −3, −1, 1, 3, 8. Lehetséges, hogy a 8-ba? Vagy a −3-ba? A játék megkezdése előtt minden lehetséges. A valószínűségről alkotott képünk azt diktálja, hogy a sok dobás valahogyan kiegyenlíti egymást, és valahol a 0 közelében érdemes tippelni. Igen ám, de most a 0 nem szerepel a lehetséges tippek között, ezért az 1 vagy a −1 esetleg a 3 vagy −3 is jó lehet.

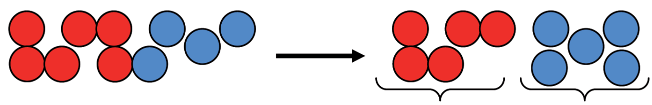
Ha lejátszottak néhány játékot, és a tanító végigkérdezi a gyerekeket, hogy melyik pár hova jutott, például a következő feljegyzéseket készíthetik: −2, −8, −2,− 4, 0, 0, 6, 6, 4, 8, 2, 2

Vajon *véletlen,* hogy mindenki páros számra jutott?

Egy újabb kör megerősítheti a sejtést, elkezdődhet a magyarázatok keresése. Összegyűjthetjük a lehetséges dobásokat, és az egy lépés hosszára vonatkozó lehetőségeket:

10 p = −10	10 k = 10
9 p +1 k =−8	9 k +1 p = 8
8 p + 2 k = −6	8 k + 2p = 6
7 p + 3 k = −4	7 k + 3 p = 4
6 p + 4 k = −2	6 k + 4p = 2
5 p + 5 k = 0	

Vagy egyszerűen csak azt figyelik meg, hogy mi történik, ha egyetlen kék korongot pirosra változtatunk:



Megint egy olyan összefüggés, amelyet ha a gyerekek maguk fedezhetnek fel, sokkal inkább magukénak érzik, mint a tanár szájából elhangzott mondatot: „Ha a kisebbítendőt eggyel csökkentem, és a kivonandót eggyel növelem, a különbség kettővel csökken."

Akárhogyan is dobunk tehát a 10 koronggal, az első dobás után mindenképpen páros helyre érünk. A további dobások során pedig minden esetben párosokat lépünk. A lépegetés során a gyerekek tapasztalathoz juthatnak a pozitív számok ellentettjének értelmezéséhez szükséges tevékenységről, pozitív és negatív számok összeadásáról, valamint arról is, hogy az összeg paritására vonatkozó összefüggés a negatív számok körében is érvényes marad. A valószínűségről alkotott fogalmak tekintetében élményszerűbb tapasztalathoz juthatnak *lehetetlen eseményről*, mint egy olyan elcsépelt és túlságosan átlátható példával, hogy két kockával dobva a dobott számok összege 13 nem lehet.

Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

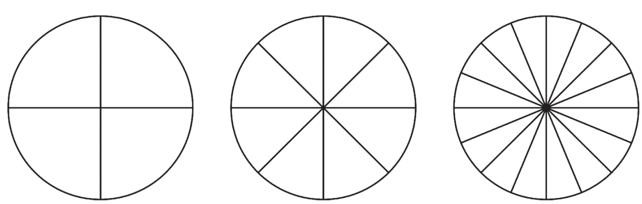
Számok, műveletek, algebra

5–6. osztályban az egész számok (pozitív és negatív egészek egyaránt) tetszőlegesen nagy abszolút értékig előkerülnek az iskolában, vagyis a számosságok korábbi évfolyamokban jellemző tapasztalati bázisát megtartva ki kell alakítani a „nagy" számok reprezentációit is. Matematikai szempontból tekintve ennek eszköze a számok normálalakja, pszichológiai szempontból nézve pedig az additív gondolkodás képességei. Az additív gondolkodás elemeként kialakul a számok nagyságára vonatkozó összehasonlításban a „kisebb, mint” és nagyobb, mint” relációk egymással felcserélhetősége.

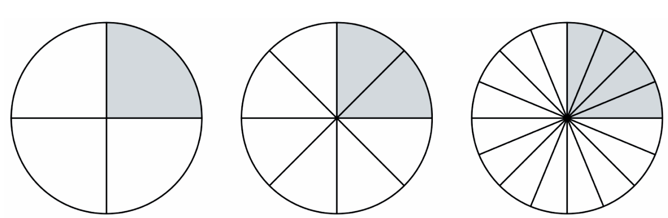
A tapasztalati bázishoz kapcsolható számok körében természetesen 5–6. osztályban is folytatódnak a változatos és céltudatos tevékenységformák: kirakások, vágások, bontások, helyiérték-táblázatok készítése, kitöltése, ezekből számok kiolvasása, szóban kimondott számok leírása, számegyenesen való ábrázolások, leolvasások, összehasonlítások stb. A sokoldalú tapasztalás segíti például a tört, tizedes tört, negatív szám fogalmának mélyítését, ugyanazon értékek sokféle megjelenítését (például bővítésekkel, egyszerűsítésekkel), és ugyanazon értékek különböző formában való megjelenítését (például tört tizedestört alakja és fordítva). Csak a sokszínűen megtapasztalt fogalmak, tartalmak lesznek maradandóak, mozgathatóak, előhívhatóak.

A törtek esetén is nagyon fontos láttatni (sok hajtogatással, kivágással, egyforma kockákból való kirakásokkal, változatos egységválasztással, rajzolással stb.) azt, hogy valamely egységet egyenlő részekre sokféleképpen oszthatunk, így egy adott törtértéket sokféleképpen jeleníthetünk meg.

Az alábbi ábrán három azonos sugarú körlapot felosztottunk 4, 8, 16 egyenlő részre.
Színezzük ki a körlapok negyedrészét!

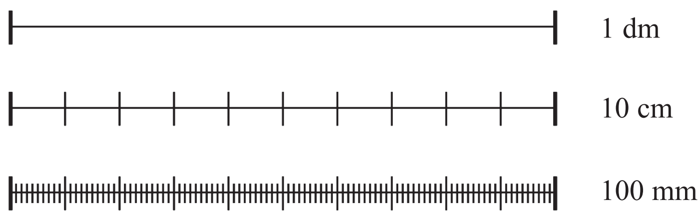


Megoldás:



Jól szemlélteti az ábra, hogy az 1/4=2/8=4/16. Ha ezek a körlapok egyforma tortákat ábrázolnának, akkor az 1/4 résznyi tortát elfogyasztó gyerek ugyanannyi tortát enne, mint a 2/8 részt vagy a 4/16 részt elfogyasztó gyerek. Csak az egyik 1, a másik 2 egyenlő, de kisebb, a harmadik gyerek 4 egyenlő, de még kisebb szeletet kapna ebből a tortából.

Jelöld be mindhárom szakasznak az ötödrészét! Írd le a kapott mennyiséget a szakasz végén látható mértékegységgel! Hasonlítsd össze a mennyiségeket!



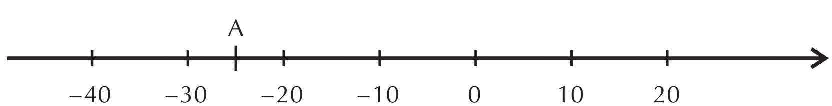
Megoldás: *Átlátszó papírra másolva, áthajtogatásokkal is megtapasztalhatjuk, hogy 1/5 deciméter éppen 2 cm (2/10 deciméter), és éppen 20 milliméter (20/100 deciméter), azaz igaz, hogy 1/5=2/10=20/100.*

Sok ilyen feladat megalapozza a törtek bővítése és egyszerűsítése fogalmának megértését, és az alkalmazás során történő átalakítások indokoltságát (közös nevező keresése).

Az egészek és törtek számegyenesen való ábrázolása jól szemlélteti a számok egymáshoz való viszonyának megértését, a számok növekvő, csökkenő sorrendiségét.

A számegyeneshez kapcsolódó kérdések megválaszolása a számfogalom és műveletfogalom megértését is mélyíti.

Válaszolj az alábbi kérdésekre!



Melyik a kisebb szám, a 20 vagy a −40?
Mely szám tartozik a számegyenes A-val jelölt pontjához?
Mekkora a távolság −10 és 10 között?
Rakd növekvő sorrendbe az 1,5; −17,8; 0; 65; −197 számokat abszolút értékük szerint!
Írd le növekvő sorrendben a −325; 3,25; 32,5; 0 és a 0,325 számokat!

A tanulóknak képessé kell válniuk a tanult számok számegyenesen való ábrázolására, illetve a számegyenes egy pontjához tartozó szám pontos vagy közelítő meghatározására, a számok nagyság szerinti összehasonlítására.

A felső tagozat első két évfolyamán is törekszünk arra, hogy szóbeli és írásbeli műveletek helyes sorrendű, jó eredményt adó elvégzése mellett a számolásokat egyszerűsítő, gyorsító módszereket, eljárásokat is megismertessünk (pl. a műveleti tulajdonságok, a zárójelek felhasználásával). Ez is erősíti a fogalmak mélyítését, a műveleti algoritmusok tudatosítását.

A 6. évfolyam végére a tanulók megismerkednek a racionális számkörben végzett alapműveletekkel.

A számológépek tanórai használatát csak az alapműveleti számolási algoritmusok megértésének, a végeredményt illetően kellően pontos becslés nyújtása képességének birtokában engedélyezzük. A papír-ceruza tesztelés gyakorlatában általában nem engedjük a számológép használatát. Ennek több oka közül az egyenlőtlen technikai feltételeket (és esetleg a számológépnek látszó, de annál jóval többet tudó technikai eszközök használatának problémáját) emeljük ki.

A különböző „tudású” zsebszámológépek akkor szolgálják tanítványaink érdekét, ha nem vállalják át a gondolkodás fejlesztéséhez szükséges lépések, műveleti elemek elvégzését idő előtt. A problémák megoldásának modellje fejben születik, a kivitelezéshez nyújtott eszköz lehet a számológép. Például, amikor az egyenletek megoldását tanítjuk, akkor fejben és írásban dolgoznak a gyerekek, mert megértetni és megtanítani szeretnénk a megoldás algoritmusát. A nehezebb szöveges feladatok esetén a matematikai modell felállítása a kihívás; ha a modell már megvan, akkor esetleg használható a számológép, a számítógép egyenletmegoldó programja. Ha például a becsült vagy kiszámított eredmény helyességét szeretnénk gyors visszahelyettesítéssel ellenőrizni, akkor szintén indokolt lehet a számológép használata. A konkrét feltételek ismeretében dönthetünk csak helyesen arról, hogy mikor és miért hagyjuk használni a számológépeket, számítógépeket. A használat vagy annak tiltása indokoltságát mindig értelmes pedagógiai érvek támasszák alá!

A fejlett informatikai környezet alkalmazása szükségessé teszi a jó becslőképesség kialakítását. Ha technikai okok miatt nem működnek a gépek, akkor a jó becslőképesség biztonságérzetet ad (pl. a kifizetendő/visszajáró összeg kiszámításában).

A szöveges feladatok megértésének új elemei

Az 5–6. évfolyamon a folyamatosan bővülő ismeretek (racionális számkörre kiterjesztett műveletek, a műveleti sorrend, az egyenes és fordított arányossággal és a százalékszámítással kapcsolatos ismeretek) lehetővé teszik összetettebb szöveges feladatok megjelenését. Elvárásként fogalmazódik meg a megoldások igényesebb kivitelezése (lejegyzési, esztétikai szempontból), tudatosul, hogy a kerekítés szabályait felülírhatja a valóság (pl. ha a méterben kapható drótkerítésből 56,3 méter kell, akkor 57 métert veszünk, ha a konkrét számított terület alapján a burkoláshoz 37,2 darab csempe kell, akkor minimum 38 darabot és még néhányat veszünk), fejlődik a becslési készség és az ellenőrzés, önellenőrzés igénye.

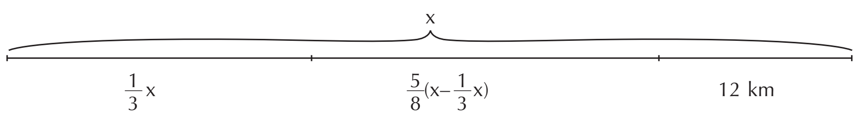
A szöveges feladatok ezen a két évfolyamon is elsősorban a következtetéses gondolkodás fejlesztését (pl. egyszerű elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása következtetéssel, lebontogatással), az arányos következtetések fejlődését (pl. szabványmértékek átváltása, egyenes és fordított arányosság, egyszerűbb százalékszámítási feladatok), a problémamegoldó képesség (problémafelismerés, problémaazonosítás és -megoldás) fejlesztését, az értő-elemző olvasás fejlesztését szolgálják.

A fejlesztés során folyamatosan tudatosulnak a tanulókban a szöveges feladatok megoldásának egymást követő lépései (a szöveg alapos megértése, értelmezése, a feltételek és a kérdés egyértelmű szétválasztása, az adatok (és felesleges adatok is) felismerése, a szövegből kiolvasható kapcsolatok, összefüggések felismerése, megállapítása, ábrázolása, lejegyzése, megoldási terv(ek) készítése, az eredményre vonatkozó becslés rögzítése, az eredmény kiszámítása (szóbeli és írásbeli műveletekkel), meghatározása, ellenőrzése, a becsült értékkel és a valósággal való összevetése, szövegesen megfogalmazott válasz elkészítése), fejlődik a többféle megoldás keresésének igénye.

A tanulóknak tudniuk kell egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket szabadon választott módszerrel megoldani, egyszerűbb szöveges feladatokat, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel megoldani, képesnek kell lenniük a megoldások számegyenesen való ábrázolására. A megoldási módszerek közül − a következtetések mellett − ki kell emelni a rajzos, ábrás, szakaszos, számegyenest felhasználó módszereket. Sokszor ezek a rajzok, ábrák mutatják meg, hogy megértette-e a problémát, a feladatot a tanuló. A szövegek valamilyen konkrét rajzos, ábrás leképezése a lassan kialakuló absztrakt gondolkodás pillanatnyi szintjéről sok információt adhat a tanár számára.

Edit és Dani kirándulni mentek. Az első nap megtették a tervezett út harmadát, a második napon a hátralévő út 5/8 részét, így a harmadik napon csak 12 km-t kellett gyalogolniuk, hogy célba érjenek. Milyen hosszú volt ez a túraútjuk?

Megoldás szakaszokkal: *x a teljes túraút hosszát jelöli.*



12 km 3/8 része az egész út 2/3 részének,
4 km 1/8 része az egész út 2/3 részének,
8 · 4 km = 32 km az egész út 2/3 része.
Az egész út hossza: (16 + 32) = 48 km
Ellenőrzés a részek kiszámításával és összegzésével is történhet.

Keress összefüggést az alábbi mennyiségek között!
a) A karácsonyfa ára és magassága
b) Az autó menetideje és sebessége (az úthossz legyen 20 kilométer)
c) Egy születésnapi torta szeleteinek száma és a szeletek nagysága (egyenlő szeleteket vágunk)
d) A zöldborsó mennyisége és ára
e) A négyzet oldala és kerülete
f) A fagylalt ára és a gombócok száma

Megoldás: *A mennyiségek közötti helyes összefüggések felfedezése, megfogalmazása.*

A tanulóktól várható válaszok például:
a) Ugyanazon fajtájú fenyő esetén a magasabb fáért többet fizetünk, mint az alacsonyabbért.
b) Ha egy autó kétszer gyorsabban megy, akkor fele annyi idő alatt teszi meg a 20 km-t.
c) Minél több egyenlő szeletre vágom a tortát, annál kisebbek lesznek a szeletek.

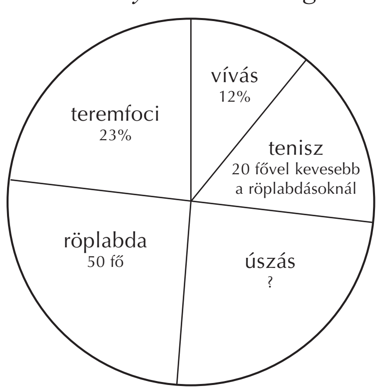
d) A borsóért fizetett ár egyenes arányban változik a borsó mennyiségével.
e) A négyzet oldala és kerülete egyenes arányban változik.
f) A gombócok száma és a fagyi ára arányosan változik.

A havi családi bevétel 48%-a a különböző tartozások, számlák kiegyenlítésére kell. Ebben a hónapban a megmaradt 104 ezer forintból a megélhetést (étkezés, ruházkodás, javítások, szórakozás, stb.) fedezi a család. Mennyi volt a családi bevétel ebben a hónapban?

Megoldás:

A megmaradt pénz (100-48)%, azaz a 104 ezer forint a havi családi bevétel 52%-a.
A családi bevétel 1%-a 2 ezer forint, a teljes bevétel tehát 100×2 ezer forint, azaz 200 ezer forint.
A feladat ellenőrzése: 200 ezer forint 48%-a 96 ezer forint, ez a 104 ezer forinttal együtt éppen 200 ezer forint.

200 sportoló megmondta a legkedvesebb sportágát. Az alábbi kördiagramon ezt ábrázoltuk. Hány százalékuk legkedvesebb sportága az úszás?



Megoldás:	*100%*	*200 sportoló*
	1%	*2 sportoló*
	23%	*46 sportoló (teremfoci)*
	12%	*24 sportoló (vívás)*
		50 (röplabdás)
		30 (teniszező)

Összesen: 46+24+50+30=150 sportoló
200–150=50 sportolónak az úszás a kedvence
50 éppen 200 negyede, azaz 25%-a.
A megkérdezett sportolók 25%-ának kedvenc sportága az úszás.
Ellenőrzés lehet például a részösszegek összeadásával.

Feladatszövegek konstruálásának követelményei

A felső tagozat kezdetén a kibővült matematikai ismeretek segítik a matematikai modellek szimbólumokkal való leírását. Ennek ellenére még ezeken az évfolyamokon is szükség van tevékenységekről, kirakásokról, képekről, ábrákról, rajzokról való szövegek, közlések, utasítások, kérdések leolvasására. Ha a számfeladatokhoz, nyitott mondatokhoz fogalmazott szövegek hibásak, akkor a problémás szöveghez érdemes megmutatni a jól illeszkedő számfeladatot, nyitott mondatot, és összevetni az eredetileg adott matematikai modellel. A különbségek, eltérések bemutatása segít a tanulónak abban, hogy megértse, hol hibázott. Ha valaki nem tudja (meri) elkezdeni a szöveg alkotását egy modellhez, akkor kezdje el a tanár, ezzel segítve, bátorítva a diákot a szöveg folytatására, befejezésére. Ha ez sem segít, mondjon a tanár több egyszerű adekvát szöveget, hogy pontosabban értse a diák, hogy mi is a feladata.

A helyes fejlesztés eredménye abban mutatkozik meg, hogy adott matematikai modellhez egyre összetettebb és egyre igényesebben fogalmazott szövegek alkotására lesznek képesek a gyerekek. A szövegek általában a matematikán belüli alkalmazásokra, a gyereket körbevevő mindennapi valóságra vonatkoznak, de irányítsuk a figyelmet a természettudományos műveltségterülethez kapcsolható szövegekre is. Jó támpontot adnak a megvalósításhoz az e területről vett speciális összefüggések (képletek) felhasználásával készült modellek (pl. út-idő-sebesség, mérési adatok közötti kapcsolatok, grafikonok alkalmazása).

Nórának 1200 Ft-ja volt. Elköltötte a 3/5 részét. Tegyetek fel kérdéseket a szöveghez!

Megoldás: *a) Mennyit költött Nóra?*
b) Mennyi pénze maradt meg?
c) 1200Ft-nak hányad része maradt meg?
d) Hány százalékát költötte el a pénzének?
Stb.

Mondj szöveget az alábbi számfeladathoz!
2(300+100) = 800
Megoldás például: *Volt 300 forint spórolt pénzem, nagypapámtól kaptam még 100 forintot. Apukám, tekintettel a születésnapomra, megduplázta a meglevő pénzemet. Hány forintom lett?*

Mondj szöveget az alábbi nyitott mondathoz!
2(1kg + 3kg) = x kg
Megoldás: *Katit kétszer küldte el a mamája a boltba, és mindkétszer 1 kilogramm cukrot és 3 kilogramm burgonyát kellett vennie. A két vásárlással hány kilogramm árut vitt haza?*

Írj szöveget az alábbi nyitott mondathoz!
2 (30 + x) = 200
Megoldás: *Egy téglalap alakú földterület egyik oldala 30 méter, a kerülete 200 méter. Mekkora a másik oldala?*

Írj szöveges feladatot az alábbi összefüggéshez!
a×b = 50, (a és b pozitív egészek)
Megoldás: *Egy téglalap területe 50 egység. Mekkorák az oldalai?*

Érdemes kiszámíttatni az oldalak hosszát, mert itt több megoldási lehetőség is adódik. 50-et felbontjuk két tényező szorzatára az összes lehetséges módon: 1×50; 2×25; 5×10. A tényezők felcserélésével nem kapunk az előzőektől különböző megoldást, új téglalapot. Így az oldalak 1 egység és 50 egység hosszúak, vagy 2 egység és 25 egység hosszúak, vagy 5 egység és 10 egység hosszúak.

Relációk, függvények

A tanulók korábbi, arányossági következtetésen alapuló feladatmegoldására építve megismerik az egyenes arányosság fogalmát, meghatározását. Képessé válnak felismerni az egyenes arányosságot gyakorlati jellegű feladatokban, valamint a természettudományos tárgyak tanulása során is. Biztonságosan oldanak meg a mindennapi életben felmerülő, egyszerű, konkrét arányossági feladatokat következtetéssel.

A változó mennyiségek közötti kapcsolatok vizsgálata során a tanulók tapasztalatot szereznek a fordított arányosság felismerésében, összetartozó értékpárjainak meghatározásában.

Az arányossági következtetések fejlesztik a tanulók összefüggéslátását, következtetési képességét. A tanulók képessé válnak egyszerű példákban az összefüggések felismerésére, kapcsolatok meghatározására. Legegyszerűbb és korábban is gyakran előforduló lineáris összefüggések esetén képesek hiányzó elemek pótlására, az adatok táblázatban való ábrázolására. Találkozniuk kell nemlineáris összefüggésekkel is, sőt célszerű ugyanannak a jelenségnek több nézőpontból való megvizsgálása is.

Az induktív gondolkodás fejlődésének ebben az életkori szakaszában a tanulók képesek hiányzó elemeket meghatározni, illetve ismert elemek esetén szabályt megfogalmazni. Tudnak szabállyal megadott sorozatot folytatni, néhány eleméből szabályt megadni. Képesek a felismert szabály formulával való megadására.

Ezen az iskolaszakaszon tovább fejlődik a tanulók helymeghatározó képessége. Tudnak számegyenesen adott tulajdonságú pontokat megkeresni, számintervallumokat ábrázolni, a kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb kifejezéseknek megfelelő adatokat szemléltetni, illetve ábráról leolvasni. Ismerik a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, az azzal kapcsolatos fogalmakat (tengelyek, origó, jelzőszám, koordináták, síknegyed). Tudnak a koordináta-rendszerben konkrét pontokat ábrázolni, pontok koordinátáit leolvasni.

Táblázattal megadott összefüggésekhez tudnak grafikont készíteni, valamint grafikon alapján megadni a táblázat elemeit. Az elsőfokú függvényt felismerik, pontjai alapján ábrázolni tudják. Képesek a gyakorlati életből vett egyszerű példákban a kapcsolatok felismerésére, lejegyzésére, ábrázolására. Az egyenes arányosság alkalmazásával, arányos következtetéssel egyszerű százalékszámításos feladatokat oldanak meg (pl. bevásárlás, takarékosság, napirend). Ennek gyakorlása során, a számításhoz szükséges algoritmusok felfedezésével és használatával párhuzamosan megismerik a százalékszámítás alapfogalmait: alap, százalékláb, százalékérték.

A megtanult ismeretek, készségek, képességek bemutatására kezdetben a matematikai szimbólumokkal megfogalmazott feladatok alkalmasak. Ezekben minden „zavaró tényező” nélkül közvetítjük a feladat matematikai struktúráját, legtöbbször utalunk azokra a műveletekre, algoritmusokra, amelyeket a megoldás során használni kell, sőt gyakran a feladat szövegében is szerepelnek matematikai szimbólumok.

Számítsd ki 120-nak a 15%-át!

Készíts megfelelő beosztású számegyenest! Ábrázold az adott tulajdonságú számokat! $-3 \leq x < 9$ *és x egész szám.*

Ábrázold koordináta-rendszerben az A(−2;1), B(3;1), C(4;3) és D(−1;3) pontokat! Kösd össze azokat ábécésorrendben! Mi az így kapott síkidom neve?

Rajzolj olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyeknek a második jelzőszáma nagyobb, mint az első!

Milyen kapcsolat van az alábbi táblázat adatai között?

eltelt idő (óra)	1	2	3	4
megtett út (km)	4	8	12	16

Keress szabályt az alábbi táblázat adataihoz! A szabály alapján pótold a hiányzó adatokat!

x	8	4	2		0
y	4	8		1	

Az utolsó három feladat példa arra, hogy az alkalmazásnak ezen a legegyszerűbb szintjén is lehet olyan feladatok megoldása elé állítani a tanulókat, amelyekben többféle helyes válasz, megoldási lehetőség is felmerül. Az ilyen jellegű feladatokkal is előkészíthetjük az összetettebb, problémajellegű, autentikus feladatokkal való foglalkozást. Természetesen ez a szempont a tanítás során merülhet csak fel, az értékelésnél ilyen esetben utalni szükséges a több megoldás lehetőségére.

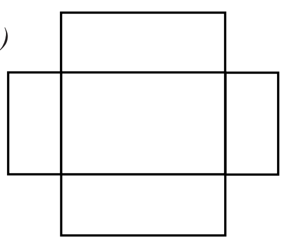
Geometria

A korábbi évfolyamokon szerepelt két képesség (térbeli és arányossági) mellett, köszönhetően az 5–6. évfolyamra gyarapodó fogalmaknak, lehetővé válik geometriai tartalmakhoz is többféle olyan feladatot alkotni, amelyek az induktív, deduktív és rendszerezési képesség fejlettségének diagnosztizálására alkalmasak.

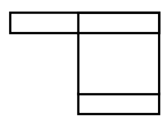
Jellegzetes feladat a térbeli képesség tesztelésére:

Egészítsd ki az ábrákat úgy, hogy mindegyik egy-egy téglatest hálója legyen!

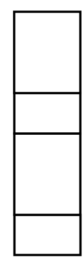
a)



b)

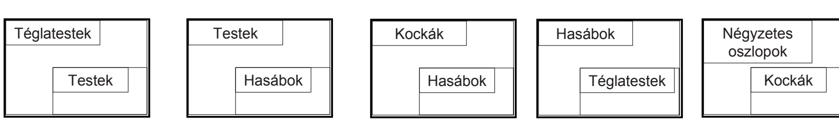


c)



Példa olyan feladatra, amely a rendszerezési képesség működését méri geometriai tartalmon:

Megfelelő helyre kerültek-e az alábbi halmazábrákba beírt elnevezések? Karikázd be annak a halmazábrának a betűjelét, amelyiknél igen, és ~~húzd át~~ azét, amelyiknél nem!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Végül egy olyan példát mutatunk, amelyben többféle matematikai képesség felhasználása várható a megoldás során, így például deduktív és kombinatív képességelemeké is:

Három azonos méretű flakon együttes űrtartalmának kerekített értéke 2 liter. Egy flakon űrtartalmának dl-ben megadott értéke egész szám. ***Válaszolj*** *a következő kérdésekre!*

a) Legfeljebb hány dl lehetett a három flakon együttes űrtartalma? ....
b) Legalább hány dl lehetett a három flakon együttes űrtartalma? ....
c) Legfeljebb hány dl-es lehetett egy flakon? ....
d) Legalább hány dl-es lehetett egy flakon? ....
e) ***Add meg*** *dl-ben egy flakon minden lehetséges űrtartalmát!* ....

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika esetében az alapkészségek fejlesztése és a szaktantárgyi tudás elmélyítése ebben a korosztályban is egyaránt releváns célkitűzés. A kombinatív és a korrelatív gondolkodási képességek tartalomhoz kötött fejlesztésének lehetősége mellett sor kerül az adatkezelés és -ábrázolás, valamint a halmazelméleti alapokon álló valószínűségi események matematikailag adekvát megalapozására. A korrelatív gondolkodás képessége a matematikai gondolkodás rendszerében a multiplikatív gondolkodás egyik formájaként értelmezhető. Adatsorok közötti összefüggés felismerése és a kapcsolat megfogalmazása a feladat, ahol az összefüggés nemcsak hogy nem lineáris, hanem általában nem is adható meg egyszerű képlettel (sőt, sokszor nem is determinisztikus a kapcsolat). A matematikai jelenségek világában a korrelatív gondolkodás fejlesztési és értékelési területe a statisztikai jelenségek világa. (Kevéssé értékesnek tarthatjuk az olyan korrelatív összefüggések megfogalmazását, mint pl. „Minél több csúcsa van egy sokszögnek, annál több átlója van” vagy „a nagyobb számoknak a köbe is egyre nagyobb”. A korrelatív gondolkodás fejlesztésére tehát elsősorban a statisztikai jelenségek megtapasztalása során van lehetőség.

A matematikai tudás alkalmazásának diagnosztikus értékelése

Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Kisiskolás korban a szöveges feladatoknak kettős szerepük van. Egyrészt, megjelennek a műveletek értelmezésénél, másrészt a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében. Mindkét esetben jellemző, hogy a szöveg a hétköznapi élet tapasztalatait vagy a gyermeki fantáziavilág jelenségeit fogalmazza meg, lehetővé téve ezzel a gyerekek számára a történet elképzelését, illetve modellezését. Kezdetben, 1–2. osztályban még nem várhatjuk el a szöveges feladatok megoldási menetének tudatos alkalmazását, szükséges a tanítói segítségnyújtás javaslatokkal, egyszerű kérdések megfogalmazásával.

A szöveges feladatok kezdetben tevékenységeket, történéseket kísérő megfogalmazások, amelyek eljátszása illetve utánzása vezet el a megoldáshoz. A feladatok attól válnak realisztikussá, hogy a feladatmegoldás során aktív szerephez jutnak a hétköznapi tapasztalatok, a memóriában elraktározott vizuális és egyéb képzetek, és ezeket fölhasználva alkot a tanuló egy matematikai modellt a feladatmegoldás folyamán.

Nézd meg alaposan az alábbi képet, és mondj róla egy rövid mesét, történetet! Mondj a képről számfeladatokat is!

Az ilyen típusú feladatok megoldási útmutatójának általában része a matematikai fogalmak és szimbólumok azonosítása, de ugyanakkor a helytálló, a valóságos tapasztalatokkal összeegyeztethető matematikai modellalkotás válik meghatározóvá.

Nyilvánvaló, hogy ugyanaz a feladat szöveges rutinfeladat lehet magasabb iskolai évfolyamon, és realisztikus feladatnak minősülhet alacsonyabb évfolyamokon. A következő példafeladat az 1–2. osztályos tanulók többsége számára feltételezhetően a realisztikus kategóriába esik, míg a felsőbb évfolyamos tanulók számára egyszerű rutinfeladat.

A gyerekek három szem szilvát kapnak ebéd után. Hány szem szilva kerül arra az asztalra, ahol 6 gyerek ebédel?

Az osztály tanulói közül 6 gyerek eljátszhatja az ebédlő asztalnál ülő gyerekeket. Minden gyerek kap 3 szem szilvát. A gyerekek megállapítják, hogy összesen hány szem szilvát kaptak.

Segíti a szöveg értelmezését, ha a szöveg egy adott képről vagy kialakult helyzetről szól. A képről alkotott szöveg mintául is szolgálhat a fordított irányú tevékenységekhez, amelyekben a gyerekek feladata a szöveghez illő képalkotás. A feladatok realisztikus jellegét adhatja a tanulók – képhez kapcsolódó – élményeinek megfogalmaztatása, olyan kérdések alkotása, amelyek a kép alapján megválaszolhatók.

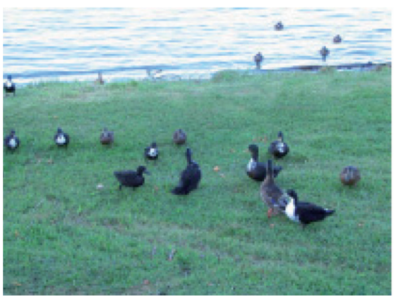
Például:

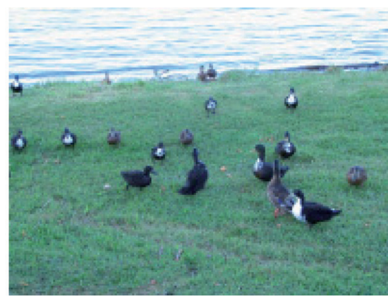
A kertben tulipánok és fehér nárciszok nyílnak. Hány tulipán nyílik a kertben, ha 2 tulipán piros és 3 tulipán sárga?
Mennyivel több nárcisz nyílik, mint amennyi tulipán?

A szöveges feladatok számfeladatokra, illetve nyitott mondatokra fordítását jó, ha megelőzi a változásokat jól szemléltető képpárral való megjelenítés. A képpárról való olvasás, a szöveg és a képpár összekapcsolása jelzi az adott és a hiányzó adat közti kapcsolat felismerését. A valóságos szituációkat idéző képpárok valóságtartalmú feladatok alkotását teszik lehetővé.

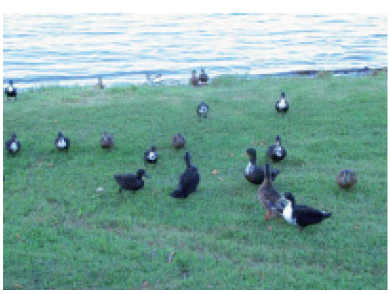
Például:

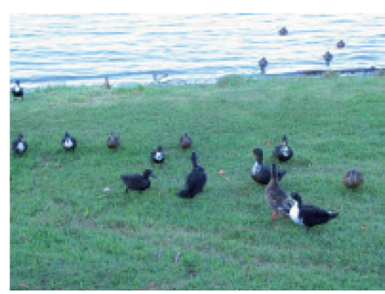
Mondd el, mi történt a két fotó készítése közben, ha ilyen sorrendben készültek a felvételek!





Mi történt, ha ebben a sorrendben készültek a felvételek?





Az elmeséléssel, illetve elmondással adott szöveges feladat realisztikussá válik a gyerekek számára, ha megjeleníthető tárgyi tevékenységgel vagy rajzzal. Az eszközök és a rajzok kezdetben tárgyhűek, azt szemléltetik, amiről a történet szól. Később elvárható egyszerűbb rajzok, absztraktabb ábrák értelmezése is. Ez a folyamat egyúttal azt is jelzi, ahogyan egy autentikus, tevékenykedtető feladat rutinszerűen megoldható szöveges feladattá válik a fejlődés során.

Édesanya 6 gombot varrt Évi kabátjára, 2-vel kevesebbet, mint Petiére. Hány gomb kellett a két kabátra összesen?

1. szint: Valódi gombok kirakása két kabát rajzára.
2. szint: Gombok helyett korongok kirakása a gyerekek neve alá.
3. szint: A gombok számának megfelelő körök vagy pöttyök rajzolása a gyerekek nevének kezdőbetűje után.

További példa a gyermeki tapasztalatokra építő, realisztikus feladatokra:

Ma mind kesztyűt fogunk a sétához felvenni. Hány pár kesztyűt kell kikészíteni, ha 5 fiú és 4 lány sétál?

A feladatban előforduló fogalmak megvitatása (mind, pár, 5, fiú, 4, lány) a feladat matematikai modelljének elkészítéséhez járulnak hozzá.

Hány éjszakát alszunk hétfő reggeltől vasárnap estig?

Számos, egymástól jelentősen különböző mentális modell alkotható ehhez a feladathoz, beleértve a mentális számegyenest, a naptár rajzolását.

A tevékenységgel értelmezett és megoldott szöveges feladatok mintájára válnak képessé a gyerekek kérdések megfogalmazására, illetve feladatok alkotására.

Tominak 15 kisautója van. A kisöccsének, Daninak 7.
Kérdezz!

A gyerekek több kérdést is megfogalmazhatnak.
– Hány autója van a két gyereknek összesen?
– Mennyivel van több autója Tominak, mint Daninak?
– Hány autót kell még gyűjtenie Daninak, hogy ugyanannyi legyen neki is, mint Tominak?
– Hány autót adjon Tomi Daninak, hogy ugyanannyi autójuk legyen a testvéreknek?

A fenti tevékenységek készítik elő a szöveges feladatok matematikai modellhez való kapcsolását. A szöveggel megfogalmazott összefüggés kifejezése számokkal, jelekkel és műveletekkel, kezdetben közös tevékenységgel történik. A közös modellalkotást követheti az önálló tevékenység, melynek során várjuk az egyszerű szöveges feladat összekapcsolását számfeladattal illetve nyitott mondattal.

Például:

Melyik nyitott mondat illik a szöveghez? Kösd a feladathoz a megfelelő nyitott mondatot!

Marci horgászni ment a tóhoz. A kifogott halak közül 8-at visszadobott. 5 hallal tért haza. Hány hal akadt Marci horgára?

$8 + 5 = \boxed{}$

$8 - 5 = \boxed{}$

$\boxed{} - 8 = 5$

$\boxed{} - 5 = 8$

$\boxed{} + 5 = 8$

Az 1., 3. és 4. nyitott mondat is indokolható modellje a szöveges feladatnak.

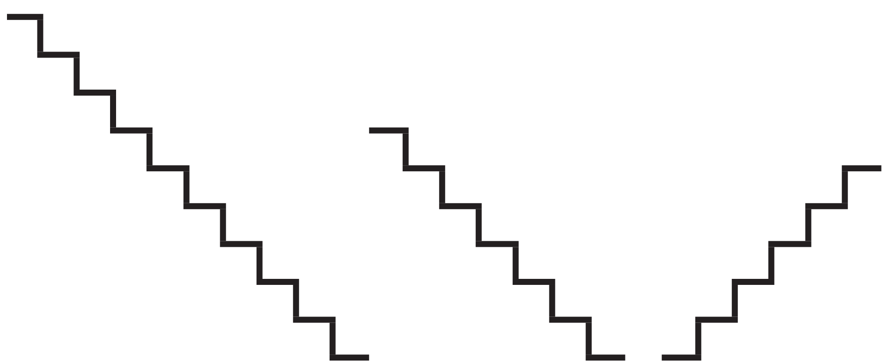
A feladatok szövege és a feladatmegoldáshoz kapcsolódó műveletkijelölés közötti kétirányú kapcsolatok felismerését és megalkotását segítik elő azok a feladatok, amelyek szöveg és számfeladat vagy nyitott mondat párosítását igénylik, és tartalmaznak olyan matematikai modellt, amelyik egyetlen szöveges feladathoz sem illik. Ekkor kérhetjük a kimaradt számfeladatról vagy nyitott mondatról szöveg alkotását. Várhatjuk és igényelhetjük, hogy a szóban megfogalmazott szöveges feladatok valóságos adatokat tartalmazzanak, kapcsolódjanak a gyerekek mindennapjaihoz vagy átélt élményeihez.

A fenti tevékenységek előkészítik a szöveges feladatok megoldási lépéseinek tudatosítását. A köznyelven megfogalmazott szöveges feladatok információiból a jól kigyűjtött és lejegyzett adatok, a köztük lévő kapcsolatok ábrázolása vagy megjelenítése tevékenységgel, a kérdésre adható válasz helyes becslése jelzi a megoldáshoz vezető matematikai modellt. A modell megalkotása a problémamegoldás legnehezebb lépése. A modellen belüli megoldást követi a megtalált megoldás vonatkoztatása az eredeti problémára. Azáltal, hogy a gyerekek a talált megoldást összevetik a szövegben talált adatokkal, az előzetes becsléssel és a valósággal, megítélik a megoldás realitását is.

Kisiskolás korban a gyerekek a számokkal valóságos problémafelvetések során ismerkednek. Megfigyeléseket, összehasonlításokat és méréseket végeznek. Felismerik tárgyak, személyek, dolgok érzékelhető tulajdonságait, válogatják azokat közös és eltérő tulajdonságaik alapján. Tevékenységeik közben tapasztalatokat szereznek a számok tulajdonságairól, kapcsolataikról.

Például, lépcsőjárás közben szerzett tapasztalataik alapján válnak képessé az alábbi probléma megoldására:

Melyik lépcsősort tudnád bejárni úgy, hogy mindig két lépcsőt lépsz egyszerre? Karikázd be a lépcsőfokok számát, ha kettesével lépkedve be lehet járni, és ~~húzd át~~ a számot, ha nem!



9 *6* *5*

Az autentikus problémafelvetések a tanulókat valódi, életszerű problémahelyzet elé állítja. Ennek során olyan témák feldolgozására kerül sor, amelyekhez a tanulóknak személyes, a valóságban átélt élményeik fűződhetnek. Előidézünk olyan újszerű helyzeteket is, amelyek mások elmesélt történései alapján válnak a gyerekek számára hitelessé. A felvetett problémáknak gyakran – mint a valóságban – több lehetséges megoldásuk van. A megoldás többnyire függ attól, hogy milyen feltételek befolyásolják a történést, és ezek közül adott szituációban melyik érvényesül. Kisiskolás korban gyakran még nem várhatjuk el a feltételek mindegyikének számbavételét és a lehetséges helyzetek teljes átlátását. Megelégszünk a konkrét probléma egy lehetséges megoldásának bemutatásával.

Marci és kistestvére Zsófi este 8 órakor lefekszenek aludni. Reggel 6 órakor kell kelniük, mert messze van tőlük az iskola. Hány órát alhatnak a gyerekek?

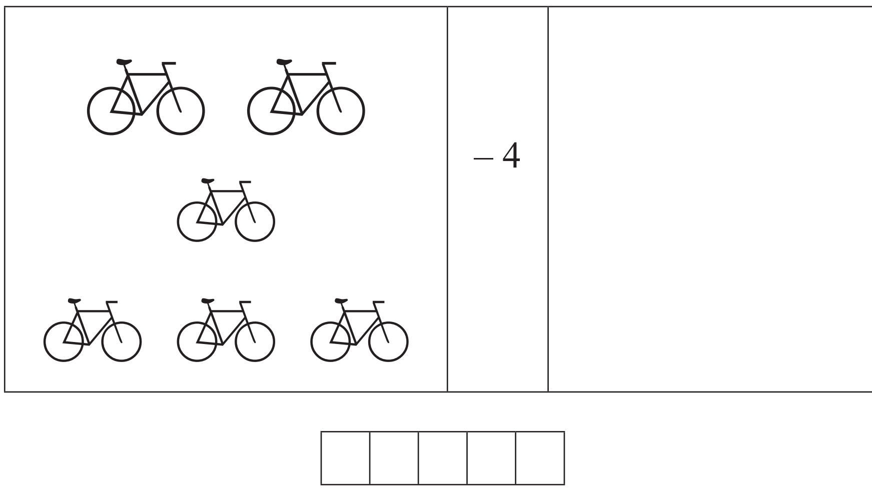
A feladat megoldását segíthetjük, ha bemutatunk egy faliórát, amelyről tudjuk, hogy minden egész órakor egyet üt. Állítsuk az órát 8 órára, a gyerekek hunyják le a szemüket. Közben telik az idő (most felgyorsítva), az óra jár. Akkor nyissák ki a szemüket, amikor az óra 6 órát jelez. A tanító egyenletes időközönként kongat egyet-egyet. Az eljátszás során a gyerekek új helyzetben, az időt felgyorsítva átélik azt, ami velük is megtörténik nap mint nap. Példát látnak arra, hogy a hosszan lezajló eseményeket mi módon lehet eljátszani, akár többször ismétlődővé tenni. Saját tapasztalataik alapján juthatnak el annak megfogalmazásához, hogy a történet szereplői legfeljebb 10 órát alhatnak.

Nagyobb képzelőerőre van szükség, amikor a probléma szemléltetéséhez nem valósághű tárgyakat, hanem azokat szimbolizáló, de még tapintható, mozgatható tárgyakat használunk. Fontos, hogy ezeket a tárgyakat kezdetben a gyerekek választhassák meg, esetleg a tanító kínáljon fel erre többféle lehetőséget. Az autentikusság egyik ismérve ugyanis, hogy *a tanuló számára valódi* problémahelyzet szimulációja történjék a feladat kitűzésével és megoldásával.

A tárgyakkal végzett szemléltetést követhetik a képekkel, rajzokkal illusztrált feladatok. Kezdetben a személyesen is átélt élményekről készített fotókhoz kapcsolhatunk szöveges feladatokat. A fényképek alapján a gyerekek felidézik a valóságos eseményeket, megfogalmazzák élményeiket, elmondják az átélt történéseket, beszélnek megfigyeléseikről. Emlékeik alapján adatokkal egészíthetik ki a tanító által megfogalmazott történetet, vagy maguk is kérdéseket vethetnek fel. Ezek a beszélgetések hozzájárulnak ahhoz, hogy később egy képről önállóan tudjanak történetet alkotni.

Például:

Készítsd el a második képet! Mondd el, mi történhetett! Írd le számtannyelven!



Ez a kép felidézheti azoknak a gyerekeknek az élményeit, akik szoktak a szüleikkel, testvéreikkel kerékpározni. Lehet, hogy szövegalkotásukban éppen vágyaik fejeződnek ki, ha nincs kerékpárjuk. Láthattak utcán kerékpározókat, vagy járhattak kerékpárokat árusító üzletben. Történeteikre várhatóan hatással lesznek a valóságban szerzett tapasztalataik.

Például ilyen történetet mondhatnak: Egy hattagú családban mindenkinek van biciklije. A hétvégén négyen elmentek kerékpártúrára. Hány bicikli maradt otthon?

Sokban segítheti a probléma megoldását, ha azt valóban a tanuló saját tapasztalatához kötjük. Ha a feladatot kiegészítjük olyan kérdéssel, amely magáról a tanulóról szól, a probléma konkréttá és valóságossá válik. Miután a kisgyerek megoldotta az önmagáról szóló feladatot, könnyebben el tud képzelni más személyhez kapcsolódó szituációt. Így válik számára valódivá, életszerűvé a felvetett probléma.

Marci a kisautókat, Évi a plüss játékfigurákat gyűjti. Még egyikük se gyűjtött össze 20-at. Kinek mennyi lehet, ha Évinek 5-tel több plüssjátéka van, mint ahány autója van Marcinak?
Neked hány autód van? És hány plüssjátékod? Miből van több, és mennyivel?

Ennek a feladatnak a megoldását kezdjük az otthonról hozott adatok összegyűjtésével. Ekkor tapasztalják a gyerekek, hogy sokféle számpár lehet válasz a kérdésre, és talán lesz olyan gyerek az osztályban, akinek 5-tel több plüssjátéka van, mint ahány autója. A táblázatba gyűjtött számpárok egyben mintát mutatnak az eredeti probléma célszerű megoldási módjára.

A következő feladatban nem a műveleti tulajdonság tapasztalásához választottuk a szöveges feladatot, hanem a probléma megoldása során láthatják a gyerekek a kétféle számolási lehetőséget.

Elfogyasztasz-e 4 liter tejet 1 hét alatt?

A probléma megoldását saját adatgyűjtéssel kezdik a gyerekek. Minden tanuló megtudhatja, hogy a saját otthoni bögréje hány deciliteres, amiből tejet, kakaót vagy egyéb tejből készült folyadékot szokott inni. Alkalom nyílik annak megbeszélésére, hogy mi minden készül tejből, és beszámolhatnak a gyerekek arról, hogy mi mást szoktak reggelire, illetve vacsorára fogyasztani. Rábízhatjuk a gyerekekre, hogy maguk döntsék el a számolás módját. A megbeszélés során világossá válhat, hogy a napi körülbelüli tejfogyasztásból lehet következtetni a heti tejfogyasztásra, vagy a reggelikre elfogyasztott tejhez adhatjuk hozzá az esténként elfogyasztott tej mennyiségét. Valóságos probléma teszi szükségessé a mértékegységek váltását is.

A gyerekek napi tevékenysége, a környezetük és a természet bőven kínál lehetőséget autentikus szöveges feladatok felvetésére a kisiskolások számára. Gyűjthetnek adatokat a napi tevékenységeikről (például: mikor kelnek?, mikor fekszenek?, járnak-e különórákra?, mennyit sportolnak?...), rendezhetik az összegyűjtött adatokat, összehasonlíthatják, kérdéseket fogalmazhatnak meg, és megválaszolhatják azokat. Mi is felvethetünk olyan kérdéseket, amelyek megválaszolása adatkiegészítést igényel. A pótolható adat beszerzését rábízhatjuk a tanulókra, de felkínálhatunk lehetőségeket, tehetünk ezekre javaslatokat.

A megfigyelések, tapasztalatok alapján vagy mérésekkel nem pótolható adatok tanulói kreativitást igényelnek. A hiányzó adat előhozhatja a becslést, illetve a feltétel szerinti feladatmegoldás lehetőségét. Kezdetben megelégedhetünk azzal, hogy a gyerekek így fogalmaznak: „Szerintem…”. Később találhatnak több, általuk elfogadható megoldást: „Lehet, hogy…”, „az is lehet, hogy…”. A csoportban vagy frontálisan összegyűjtött elképzelések akár megadhatják a feladat minden lehetséges megoldását is.

A tanulókat önálló munkában csak arra biztathatjuk, hogy keressenek több megoldást, vagy egy-egy feltétel megadásával kérhetjük a feltételtől függő adat meghatározását.

Az ebédlőben 3 nyolcszemélyes asztalnál összesen 16-an ülnek. Melyik asztalnál hányan ebédelhetnek? Keress több lehetséges megoldást!

1. asztalnál	8		2	6					
2. asztalnál	6	8			4		0		
3. asztalnál		2	6			7			

Relációk, függvények

Ahogyan a többi matematikai tartalmi területnél is, a relációk és függvények területén is a realisztikusság kritériuma egy feladat esetében, hogy a tanuló számára elképzelhető (legtöbbször a hétköznapi tapasztalatokban gyökerező) legyen a feladat tartalma. A Relációk, függvények cím (186. oldal) alatt említett követelmény- és feladattípusok esetében a matematikai és más szimbólumok felől a hétköznapi tárgyak és relációk felé mozdulva fogalmazhatunk meg realisztikus szöveges feladatokat.

Alapvető jellemzője a témakör realisztikus feladatainak, hogy a gondolkodási képességek közül elsősorban az induktív és korrelatív gondolkodás működését mozdítják elő. A hétköznapokban megfigyelt vagy a fantáziavilágban működő összefüggések véges sok eset alapján születnek meg, majd az indukált szabály vagy összefüggés elvileg a jelenségvilág végtelenül széles körére érvényes. Az autentikus feladathoz képest a különbség abban ragadható meg, hogy a feladat irányítja az összefüggés- és szabálykeresést, és nem várjuk el, hogy a tanuló kezdeményezze azt.

A sorozatokkal kapcsolatos realisztikus feladatokban a feladat formai jellemzői megmaradnak, a tartalom viszont úgy módosul, hogy a horizontális matematizálásban a valóságos tapasztalatok vagy a belső gondolatvilág jelenségeiből indul a gondolkodás, és a tanuló ezekhez keres megfelelő matematikai modellt. A sorozatok esetében például a következő tartalmú feladatok tekinthetők realisztikusnak a legtöbb tanuló számára:

Folytasd a megkezdett sorozatot két taggal! Mi lehet a szabály?

(A) hétfő szerda péntek vasárnap kedd __ __

(B) január 1-je március 3-a május 5-e július 7-e __ __

(C) Anna Ágnes Beáta Antal Ábel Barnabás Anita Ágota Bernadett Attila __ __

A témakör másik nagyobb részterületén, az adatpárok közötti összefüggésekben is megfigyelhető, hogy változatlan feladatformátum mellett, a feladat tartalmának alakításával válik lehetővé a mentális matematikai modellek építése. A következő feladatok megoldásához arra van szükség, hogy a tanuló elképzelje a bennük szereplő dolgokat, és kialakítson egy matematikai modellt, amely a konkrét feladat esetében használható. A rokonsági viszonyok esetén a családfarajz vagy bármilyen fa-gráf szolgálhat matematikai modellként. Az állatok lakóhelyének vizuális képzeteit analógiás kapcsolat szöveges megfogalmazása révén tudjuk fölhasználni a megoldásban.

Folytasd a táblázat kitöltését!

apa	öcsi	dédnagypapa	nagypapa	
anya	hugi	dédnagymama		nagynéni

madár	kutya	ember	mókus	
fészek	kutyaól	ház		istálló

Az autentikus feladatok legfontosabb általános jellemzője, hogy olyan feladathelyzet valósul meg, amely a tanulói tevékenységekhez kapcsolódik, és amelyben a tanuló kezdeményezőként léphet föl. Számos esetben egyfajta „fordított feladatkitűzés" valósulhat meg, vagyis a feladat lényege az, hogy egy adott problématérben a tanulónak magának kell megalkotnia egy feladatot, vagy elemeznie kell, hogy milyen feltételek mellett jön létre egy matematikai értelemben vett feladat.

A sorozatok esetében az alapelv az lehet, hogy valamilyen problématérben (fogalomrendszerben) a tanulók vegyenek észre mintázatokat, szabályszerűségeket, és fogalmazzák meg az összefüggést. Keressenek példákat és ellenpéldákat! Ilyen módon a relációk és függvények terület autentikus feladatai az induktív és korrelatív gondolkodás mellett a rendszerzési képesség fejlesztésének kiváló eszközét jelentik.

A sajátos nevelési igényű tanulók számára az autentikus feladathelyzetekben explicit irányítás szükséges, mert e nélkül a feladat kontextusa és gyakori intranszparenciája nehézzé teszi számukra a jelenségek matematikai jellemzőire való összpontosítást.

A sorozatok esetében az autentikus feladatban egy körülhatárolt problématérben arra biztatjuk a tanulókat, hogy ők maguk keressenek valamilyen szempont szerint fölépülő sorozatokat. Két ilyen példában először a tanulók neve, majd a százas számkör természetes számai szerepelnek kiinduló halmazként.

Írjátok föl a táblára az osztályban előforduló utóneveket! Hogyan lehetne sorba rendezni ezeket? Írjátok le a sorba rendezett neveket!

A megoldás nagyon sokféle lehet. Kézenfekvőnek tűnik az ábécésorrend, de elképzelhető a név hosszúsága mint szempont vagy akár olyan kifinomult ötlet is, mint a nevek tulajdonosainak születési dátum szerinti sorrendje. Valamennyi esetben előfordulhat, hogy nem lesz szigorú értelemben monoton a nevek sorrendje. Ilyenkor célszerű az egyébként várhatóan monoton sorrendbe rendezett neveknél az egyenlőségrelációt az egymás alá írás módszerével jelölni.

Hogyan lehetne sorba rendezni a 12 hónapot? Találjatok ki minél többféle sorrendet!

Az adatpárok közötti kapcsolatok esetében is követhető eljárás, hogy felvázolunk egy kétdimenziós adatsokaságot, és a tanulók elsődleges feladata megtalálni néhány szempontot, amely alapján egyes dolgok összetartoznak. Fontos, hogy olyan kiinduló problématerünk legyen, amely természetes és releváns a tanulók számára. Ilyen problématerek például: iskolai órarend, étkezéssel kapcsolatos fogalmak, rokoni kapcsolatok, öltözködés, ünnepek.

Milyen szabály szerint töltöttük ki a táblázatot? Folytasd a táblázat kitöltését a szabály szerint!

matematika	olvasás	ének		testnevelés
4	4	2	2	

Lehetséges, hogy a heti óraszám szerepel a táblázatban, de lehetséges, hogy valakinek az osztályzatai vagy éppen az, hogy mennyire szereti ezeket a tantárgyakat.

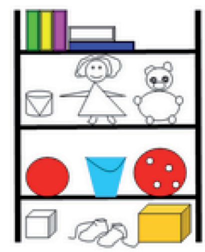
Geometria

A geometria területe – a témakör jellemzőinél fogva – kiválóan alkalmas a hétköznapi életből ismert jelenségek matematikai modellezésére. A geometria elsősorban a vizuálisan is megjeleníthető alakzatok matematikai jellemzőivel foglalkozik, és ebből adódóan kiválóan alkalmas a vizuális képzetek és a matematikai fogalomrendszer koherens összekapcsolására. A négy részterület közül most elsőként a tájékozódás területével foglalkozunk, jelezve ezzel azt is, hogy mennyi kézenfekvő lehetőséget jelent ez a terület realisztikus szöveges alkalmazására.

Tájékozódás

Az első évfolyam feladata a tér- és síkbeli tájékozódóképesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével, irányok, irányváltoztatások követése mozgással, a helymeghatározásra tanult kifejezések (pl. alatt, fölött, mellett, között, jobb, bal) értése, használata. Második évfolyamon elvárás a saját mozgást leíró információk megfogalmazása, útvonalak valódi és terepasztalon való bejárása, tudatosítása, bejárt útvonal elmondása, megadott helyek elérése, útvonalak fordított irányú bejárása, az irányváltoztatás hatása. Az első évfolyam elvárásaihoz képest egy jelentős nehezítés a síkban két adattal jellemzett helyek megkeresése (irány, távolság, szomszédosság).

A képen látható polc Nóri szobájában van. Elmesélte, hogy miket tart a polcán. Írd be a hiányzó szavakat!



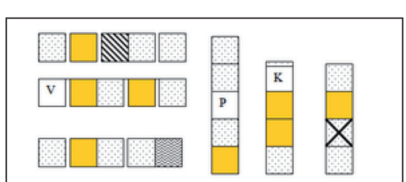
A cipő a vödör ....van.
A kisvödör két labda ....van.
A nagyobbik doboz .... van a pöttyös labda.
A baba .... oldalán van a játékmaci.
A baba .... kezénél a dob van.
A baba ....polcon mesekönyvek vannak.

Útvonal bejárása szavakkal leírt útvonal követésével, adott pontok érintésével.

A rajz egy város térképének részlete. X jelöli az indulási helyedet. Jelöld az útvonaladat!

Keresd meg azt a házat, amelyikben nagyi lakik!

- *Kilépsz az X-szel jelölt házból.*
- *Első utad a Könyvtárba vezet.*
- *Ezután a rövidebbik úton a Pék utcájába mész.*
- *A Péknél veszel 5 kiflit.*
- *A Péktől kilépve jobbra fordulsz, és elgyalogolsz az utca végéig.*
- *Megkerülöd azt a házat, amelynek a teteje egyszínű.*
- *Abba az utcába fordulsz be, ahol a sarkon a hullámos tetejű ház áll.*
- *Elmész a Virágüzletbe, veszel egy csokor tulipánt.*
- *A Virágüzlet házát megkerülve már abban az utcában vagy, ahol nagyi lakik.*
- *Nagyi háza a csíkos tetejű ház mellett van. De a teteje nem egyszínű.*



Valós szituációt, a tanulók számára is releváns helyzetet tükröz az olyan feladat, amelyben szóbeli vagy írásos információ megértése, irányok és irányváltoztatások követése a feladat. A megoldás lehet manipulatív vagy képi szintű. Papír-ceruza és számítógépes tesztelés esetén is nyilvánvalóan a képi szintű feladatkitűzés lehetséges.

A tanteremben elrejtettünk egy kincses dobozkát. Megtalálod, csak kövesd az utasításokat!

- *A tanterem ajtajától indulj.*
- *Állj szemben az ablakkal.*
- *Lépj előre 3 lépést.*
- *Fordulj balra.*
- *Lépj 2 lépést.*
- *Fordulj jobbra.*
- *Lépj 2 lépést előre.*
- *A bal lábadnál van a kincses dobozka!*

Párban dolgozzatok! Mondd el a párodnak azt az útvonalat, ami otthonról az iskolába vezet. Készíts térképvázlatot! Rajzolj a térképre néhány nevezetes helyet! Párod jelölje a térképen az általad elmondott útvonalat! Ellenőrizd a munkáját!

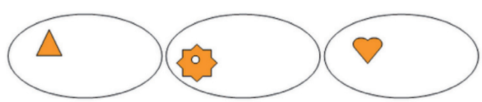
Konstruálások

1. évfolyamon megkezdődik, majd 2. évfolyamon folytatódik az alakzatok összehasonlítása (azonosítás, megkülönböztetés, formafelismerés összkép és egy-egy kiemelt geometriai tulajdonság alapján) a megfigyelési képesség fejlesztésére; a rész és egész felismerése, a megfigyelések kifejezése válogatással, megfogalmazása saját kifejezésekkel, megkezdett válogatás folytatása szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat értelmezése alapján. A tanulók képessé válnak a szavakkal kifejezett tulajdonság, kapcsolat értelmezésére a válogatás folytatásával. Követelmény a sík- és térbeli alakzatok szétválogatása tulajdonságok alapján, és azok osztályba sorolása – manipulatív és képi szinten, szöveges magyarázattal kísérve.

A tanulók képesek geometriai testeket építeni először szabadon, majd modell alapján. Képesek síkidomok előállítására tevékenységgel: mozaikkal, papírhajtogatással, szívószálak fűzésével, szabadkézi rajzolással, később a második évfolyamon ennek folytatásaként derékszög, téglalap, négyzet hajtogatása papírból, másolás átlátszó papírral, rajzolás négyzethálón, egyéb hálókon. Itt már elvárás a megadott egyszerű feltétel szerinti alkotás, illetve az alkotások összegyűjtése, azonosítása, megkülönböztetése (sokszögek néhány tulajdonságának megismerése, megnevezése: csúcsok, oldalak száma; oldalak egyenlősége; konvexség). Mindezek a tevékenységek és követelmények alkalmasak az alkotóképesség, kreativitás, a rendszerezés és a kombinativitás fejlesztésére. Az adott tulajdonságú építmények, síkbeli alkotások létrehozása, a tulajdonság ellenőrzése segíti a deduktív és az induktív következtetés fejlesztését.

Példafeladat síkbeli alakzatok tevékenységgel történő szétválogatására, osztályba sorolására a megfigyelt geometria tulajdonságok alapján:

A cukrászdában tálcákra rakják az elkészült süteményeket.
Így kezdték



el a kirakást:
Hová kerül a többi sütemény?
Rajzold a süteményeket arra a tálcára, amelyikre valók!

Testek felismerése kép alapján, alaprajz készítése:

Lali kis fehér kockákból készített házat.
Írd bele az alaprajzba, hogyan épített!
Hány kis kockát használt fel a házhoz?

Transzformációk

Már óvodáskorban megkezdődik a tapasztalatszerzés síktükörrel, a síkidomok, testek szimmetriájának felfedezése, majd folytatásként a 1-2. évfolyamon tükrös alakzatok és egyszerű tükörkép előállítása mozgással, kirakással, nyírással, másolópapír segítségével, átfordítással, illetve tengelyes tükrösség ellenőrzése összehajtással és a síktükör használatával. A témakörben ismét előtérbe kerül a megfigyelés (azonosítás, megkülönböztetés). Fontos az eljárás követése, újrafogalmazása.

A tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összkép alapján.

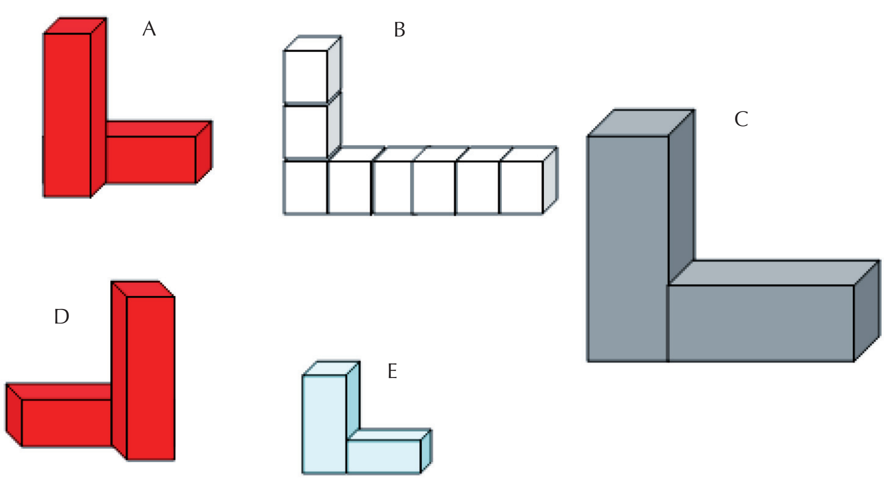
Miklós egyforma építőkockákból ilyen házakat készített. Nézd meg a képet! Válaszolj a kérdésekre! A kérdés után írd a ház betűjelét!

Melyik a legmagasabb ház?........

Melyik házhoz használta a legtöbb építőkockát? …….

Melyik háznak a tükörképe az A jelű ház?........

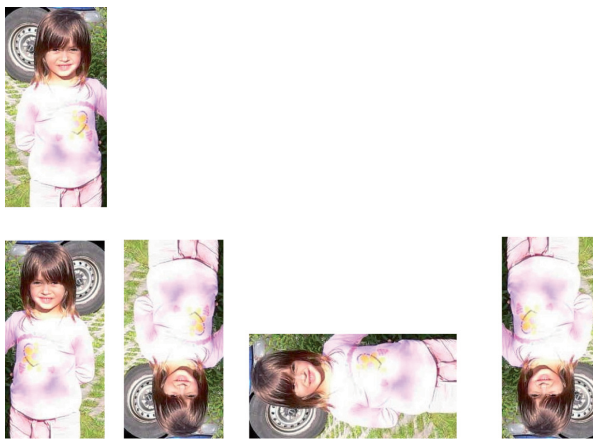
Melyik két ház formája egyforma?



A tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összkép alapján.

Emma kapott egy új pulóvert. Nagyon tetszett neki.
Felvette, és elment sétálni. Megnézte magát minden kirakatban és minden pocsolyában.

A második sor képei közül melyik képet láthatta Emma a kirakat üvegében?



Gyakorlati, játékos tevékenységre épülő feladatként az alábbi példát ajánljuk:

Építs olyan házat az építőelemekből, amelynek ajtaja van!!
Minden háznak építsd meg a tükörképét is!
Használhatsz segítségül tükröt.

Mérés

Az 1–2. évfolyamon a számfogalom alakításához kapcsolva jelennek meg a mérések. Ennek kapcsán az összehasonlító, megkülönböztető képesség, a becslés, az összefüggések megfigyelése, felismerése, rendezése kap főszerepet: 1. osztálytól a különféle mennyiségek összehasonlítása, összemérése, kapcsolódó gyakorlati problémák megoldása. Ezt követően a 2. évfolyamon szabványegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl, óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati megismerése, elnevezésük és jelük használata válik követelménnyé.

A tanulóknak meg kell figyelniük a kapcsolatokat mennyiségek, mértékegységek és mérőszámok között. A mérési tapasztalataikat felhasználják becslésekben, megfogalmazzák saját szavaikkal.

Apu és anyu új szőnyeget vásároltak a nappaliba. Apu és a kis Gabi kézen fogva végiglépkedtek a finom, puha szőnyegen. Szerinted apu vagy Gabi lépett többet?

A realisztikus feladatok részhalmazát jelentő autentikus feladatok geometriai megvalósításának egyik kiváló lehetősége az aktív, tudatos tanulói tevékenységre alapozott csoportos és egyéni projektmunka. Az autentikus mérési feladatok egyik csoportjában becslést kell adniuk a tanulóknak olyan helyzetekben, amelyek számukra relevánsak. Ugyancsak ide tartoznak az alkalmi egységgel történő mérések, a standard mértékegységek felhasználása − feltéve, hogy a feladat a tanulók számára nemcsak realisztikus, hanem releváns is.

Becsüljétek meg, hány lépés hosszú és hány lépés széles a tantermetek! Válasszátok ki az osztályból a legalacsonyabb gyereket! Ő mérje meg a terem szélességét a lépéseivel! A terem hosszúságát a tanítótok lépéseivel mérjétek meg!
Mit tapasztaltatok?
Mérjétek meg a terem szélességét és hosszúságát a méterrúd segítségével! Most mit kaptatok? Magyarázzátok meg a mérési eredményeket!

Egy projektfeladat lehetőségét mutatja a következő leírás:

Kutassátok fel a környezetetekben található szimmetrikus díszítőelemeket (ruhaneműk, bútorok, hímes tojások, játékok, épületek, fák, virágok, lepkék, templomok, ereszeket díszítő mintázatok stb.), figyeljétek meg alaposan, elemezzétek részleteiben, rögzítsétek rajzosan, fényképezéssel, írjátok meg történetüket! A kutatás eredményeit mutassátok be előadással, kiállítással (pl posztereken), megépítéssel (pl. gyurmából, építőkockákból, gipsz segítségével), videós megjelenítéssel stb. Lehet egyéni és csoportosan szervezett bemutatás.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatív gondolkodás és a valószínűségi szemlélet alapozása az iskolában legtöbbször játékok vagy játékos kísérletek keretében történik. A gyerek a játék során szerzett tapasztalatait építheti be feladatmegoldásaiba.

Például három piros-kék koronggal játszanak. Minden dobás előtt meg kell tippelniük, hogy igaz vagy hamis lesz az állítás. Nyer, akinek a legtöbb jó tippje van.

a) Lesz legalább két piros.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

b) Lesz legalább két kék.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

c) Lesz legalább két egyforma szín.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

d) Lesz mindkét szín.

Tipp										
Dobás										

Jó tippek száma: …………..

Ebben a tevékenységben a gyerek legfontosabb érdeke a játék megnyerése, ezért igyekszik a tippek során a korábbi tapasztalatait felhasználni. A tanító a tippek módosulásából következtet a valószínűségi szemlélet alakulására. Például az, hogy lesz legalább két egyforma szín, biztos esemény. Ez azonban csak néhány tényleges dobás elvégzése után válik nyilvánvalóvá.

A kísérletező tevékenységgel tulajdonképpen arra vagyunk kíváncsiak, hogy a tevékenységek során megszerzett tapasztalatok mennyire épültek be a gyerekek gondolkodásába. Ezért a fenti tevékenység egy mérés során megfogalmazott változata a következő lehet:

Három koronggal dobtunk. Írj X-et a megfelelő helyre!

	Biztos	Lehetetlen	Valószínű	Lehetséges
Lesz legalább két piros.				
Lesz legalább két kék.				
Lesz legalább két egyforma szín.				
Lesz mindkét szín.				
Több piros lesz, mint kék				
Ugyanannyi piros lesz, mint kék				

Alsóbb évfolyamokon a kombinatív gondolkodás és a valószínűségi szemlélet alakítása során egy sor olyan problémát vethetünk fel, amely nem kizárólagosan e témakörbe tartozik. Tévedés lenne azt gondolni, hogy amennyiben a tanóra kiemelt célja a valószínűségi szemlélet fejlesztése, akkor egész órán kizárólag dobókockákat dobálunk, pénzérméket csörgetünk vagy egy zsákból színes golyókat húzunk. A tanórákon megvalósulhat a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy is, hogy olyan problémákat vetünk fel, amelyek a matematika más területeit is érintik vagy éppen azok a hangsúlyosak.

Egy 0-99 számtáblázatra kell bekötött szemmel bökni. A játék előtt tippelni kell, hogy a szám felírható-e két 10-nél kisebb szám szorzataként. (Az 1 most nem szerepelhet.)

Ez a játék például a szorzótáblák gyakorlásakor kerülhet elő. Mivel ezt megelőzően hosszú ideig tanulták a szorzótáblákat – 100 esetet különkülön – igen nagy eséllyel gondolhatják, hogy több olyan szám van a táblázatban, amely szerepel a kisegyszeregyben, mint ami nem.

Hogy számba tudják venni, melyek azok a számok, amelyek felírhatók két 10-nél kisebb szám szorzataként, például öntapadós lapokkal leragasztják a sárgával jelölt mezőket.

0	1	2	3	2 · 2	5	2 · 3	7	2 · 4	3 · 3
2 · 5	11	6 · 2	13	7 ·2	3· 5	4 · 4	17	3 · 6	19
10 · 2	3· 7	22	23	3· 8	5· 5	26	3· 9	4 · 7	29
10 · 3	31	4 · 8	33	34	7 · 5	6 · 6	37	38	39
4 · 10	41	6 · 7	43	44	9 · 5	46	47	6 · 8	7 · 7
5 · 10	51	52	53	9 · 6	55	7 · 8	57	58	59
6 · 10	61	62	9 · 7	8 · 8	65	66	67	68	69
7 · 10	71	9 · 8	73	74	75	76	77	78	79
8 · 10	9 · 9	82	83	84	85	86	87	88	89
9 · 10	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Meglepő lehet, hogy milyen kevés eset szerepel a kisegyszeregyben, ezért nem túl nagy az esélye, hogy a kívánt számra bökünk. (100-ból csak 36 esetben bökünk olyan számra, amelyet olyan szorzatként tudunk felírni, amelyben minkét szám nagyobb 1-nél)

Ebben a játékban a szorzás kommutativitásáról szerezhetnek tapasztalatot, és emellett kereshetik azokat a számokat, amelyeket többféleképpen is felírhatnak szorzatként. A valószínűségi szemléletük módosulhat abban a megfigyelésben, hogy ami többször, többféleképpen fordul elő, az valószínűbb.

Később ugyanezt a tevékenységet ismétlik, de most olyan számokat keresnek, amelyeket szorzatként fel tudnak írni (például 33 = 11·3). Így már jóval nagyobb lehet az esélye, hogy olyan számra bökünk, amelyet fel tudunk írni szorzatként. Egy ilyen játék keretén belül nyílhat az első lehetőség arra, hogy a prímszámokról is tapasztalatot szerezzenek. Nem a tanár veti fel a témát, hanem a gyerek erős késztetést kap arra, hogy a végére járjon a problémának. Az összetett számok módszeres keresése pedig a prímek kiszűrésére vonatkozó eljárások alapja lehet (például Eratoszthenész szitája).

Az iskolában a gyerekek azt játszották, hogy a 0-99 számtáblázatra bekötött szemmel böktek. Nyert, aki olyan számra bökött, amelyik fel-

írható két 10-nél kisebb, 1-nél nagyobb szám szorzataként. Színezd a nyerő mezőket!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Mit találsz esélyesebbnek egy ilyen játék során? Húzd alá a megfelelő választ!

A nyerés esélyesebb. *Esélyesebb, hogy nem nyerek.*

Válaszodat indokold! ....
....

Az indoklás alapján következtethetünk a gyerek valószínűségi szemléletének fejlettségére. A válasz alapján kiderül, hogy érzi-e azt a tényt, hogy ami többféleképpen fordulhat elő, az valószínűbb.

A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A matematikai gondolkodás fejlesztésének kiemelt területe a matematikai tudás gyakorlati alkalmazása. A matematikatanításnak az is feladata, hogy láttassa a tárgy más tudományágakban és a hétköznapokban betöltött nélkülözhetetlen szerepét. Más tantárgyak témáiból és a gyakorlati életből választott példák igazolják a gyerekek számára a matematika hasznosságát. Változatos problémafelvetésekkel kelthetjük fel a tanulók érdeklődését és kíváncsiságát a matematika iránt. Ezért a problémafelvetések témáinak megválasztása körültekintést igényel. A problémamegoldás nehézségét nemcsak a matematikai tartalom befolyásolja. Azonos matematikai tartalmú feladatok különböző nehézségűek lehetnek a gyerekek számára, ha más szövegkörnyezetben tárjuk azokat a gyerekek elé. Ezért a probléma megoldásának elemzésénél figyelmet kell fordítanunk arra is, hogy mi okozta a tanuló számára a nehézséget. A választott modell, a tanuló által készített rajz informálhat a megértésről, a szövegben megfogalmazott összefüggés felismeréséről vagy félreértéséről. A problémák megoldását segíthetjük vagy éppen nehezíthetjük azzal is, ha javaslatot teszünk vagy felszólítunk valamilyen modell használatára. Ekkor nemcsak a megértést, hanem a kiválasztott modellel való problémamegoldást is ellenőrizni kívánjuk. A sikeres problémamegoldást választható vagy adott modell alkalmazásával akkor várhatjuk el a tanulóktól, ha erre elegendő figyelmet fordítottunk a problémák változatos megoldásával, azok összehasonlításával, a választott megoldási mód előnyeinek vagy hátrányainak megbeszélésével.

Például:

A virágboltban egy szál nárcisz 60 Ft-ba, a tulipán szálanként 80 Ft-ba kerül. Mindkettőből ugyanannyit vettünk. 420 Ft-ot fizettünk. Hány szálat vettünk a virágokból?

A vizuális megjelenítés segíti a megértést, a kapcsolatok és az összefüggések feltárását, amelyek nélkülözhetetlenek a problémamegoldásnál. Ezért fontos feladat a tanulók modellalkotó képességének fejlesztése. Különféle modellek segíthetik az összefüggések felismerését, pl. tárgyi tevékenységgel való megjelenítés, reláció, rajzos modell, nyitott mondat, táblázat, szakaszokkal való ábrázolás, számegyenes lehet a támogató eszköz.

Az első feladat megoldása kézenfekvő játék pénzzel való kirakással. Például lerajzolnak a gyerekek egy nárciszt és egy tulipánt, és a rajzokra helyezik a megfelelő összeget. Ezt addig csinálják, amíg eljutnak a 420 Ft kirakásához.

Az absztrakcióra könnyebben képes gyerekek táblázattal is meg tudják oldani a feladatot. Például ilyen táblázatot készíthetnek:

A tulipánok és a nárciszok száma	1-1	2-2	3-3
A nárcisz ára	60 Ft	120 Ft	180 Ft
A tulipán ára	80 Ft	160 Ft	240 Ft
Fizetendő összeg	140 Ft	280 Ft	420 Ft

Az alkalmazott megoldási folyamatban két ismert adatból kiindulva, szisztematikus próbálkozással jutottunk el a feladatban adott összeghez, egyenletesen növelve a fizetendő összeget. Közben kiszámoltunk olyan adatokat is, amelyek az eredeti probléma megválaszolásához nem szükségesek. A kialakult táblázatban felismerhetők az egyenletesen növekvő sorozatok, amelyek folytatásával kiszámított adatok új információkat szolgáltatnak.

Például:

– Mire ad választ a táblázat 2. sorának 6. oszlopában található érték?
– Mit tudhatunk meg az utolsó sor 8. oszlopában található adatból?
– Mit jelent a 2. sor 3. oszlopában és a 3. sor 2. oszlopában található számok összege?

…

Az eredeti probléma megoldásához választhatnak a gyerekek nyitott mondatot is.

Így gondolkodhatnak: 1 szál nárcisz és 1 szál tulipán összesen 60 + 80 = 140 forintba kerül. Azt nem tudjuk, hogy hány szálat veszünk, ezért ezt jelöljük így: □

Annyiszor fizetünk 140 Ft-ot, ahány szál tulipánt és nárciszt kérünk, és ez 420 forintba kerül. Ezt így írhatjuk le művelettel: $140 \cdot \square = 420$

A nyitott mondat megoldását becsléssel, a becslés kipróbálásával, majd korrekciójával kereshetik, például ilyen lépésekben:

A 140 százasokra kerekített értéke 100, a 420-é 400. A 100-at 4-szer kell venni, hogy 400 legyen. A kipróbálás azt mutatja, hogy $140 \cdot 4 > 420$, ezért a 4-nél kisebb számmal kell próbálkoznunk. A 3-at kipróbálva, azt találjuk, hogy igaz az egyenlőség $140 \cdot 3 = 420$.

Ebben a megoldásban célirányosan a kérdés megválaszolására törekedtünk. Nem kaptunk más információt, nem tudunk új kérdéseket megfogalmazni, amelyekre a választ könnyedén megtalálhatnánk. Minden új kérdéshez új nyitott mondat felírására és megoldására van szükség.

Egy lakótelepen egyforma tízemeletes házak vannak. Minden házban szintenként a lépcsőháztól balra 6, jobbra 8 lakást alakítottak ki. A földszinten üzletek vannak. Ezen a lakótelepen összesen 420 lakást építettek. Hány ház van a lakótelepen?

A feladathoz jól illik a rajz és a számfeladat vagy a nyitott mondat. Természetesen egyszerűsített rajzot várunk a gyerekektől, a legszükségesebb adatok feltüntetésével. Például:

6 lakás		8 lakás

Többféleképpen gondolkodhatnak. Például: A 420 lakásból ebben a házban összesen 140 lakás van, a lépcsőház bal oldalán 60, a jobb oldalán 80. A többi lakás (420–140=280) a többi házban van. A második házban is 140 lakás van, a többi lakás a harmadik házban található: 280–140=140.

Ebben a megoldásban az ismert adatokból kiindulva haladtunk a megoldás felé. Az egyes lépésekben arra kaptunk választ, hogy hány lakás lenne a lakótelepen, ha 1-gyel illetve 2-vel kevesebb házat építettek volna.

Ugyancsak az összes lakásszámból kiindulva jutnak a megoldáshoz a következő lépéssorozatban: Ha mindegyik ház 10 emeletes, és minden szinten ugyanannyi lakás van, akkor egy szinten ennek tizedrésze, azaz: 420/10=42 lakás van. Mindegyik házban 6+8=14 lakás van egy szinten, ezért annyi ház van, ahányszor a 42-ben megvan a 14. A 42:14=3 jelenti a házak számát. Itt két számfeladattal jutottunk a megoldáshoz, és közben egyetlen plusz információt szerezhettünk, azt, hogy szintenként 42 lakás van a lakótelepen.

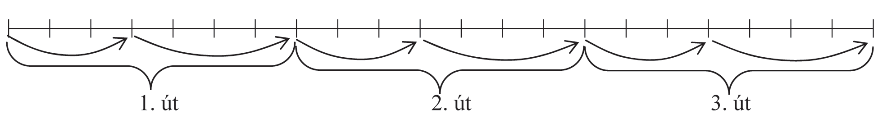
Ennek a feladatnak a megoldásánál is alkalmazhatják a gyerekek a nyitott mondatot: egy házban egy szinten 6+8 lakás, tíz szinten 10-szer annyi, azaz (6+8)·10=140 lakás van. Jelöljük a házak számát □-vel. □ házban □-szer 140, azaz 140·□ = 420 lakás van. A megoldás megkeresése az előző feladatban leírt módon történhet.

Egy buszvezető két város között közlekedik. X várostól Y városig 60 perc alatt teszi meg az utat, Y-ból X-be 80 perc alatt jut. Hányszor fordult a busz vezetője a két város között azon a napon, amelyiken 7 órát vezetett?

A harmadik feladat megismerését természetesen követi annak megbeszélése, hogy vajon az egyik irányban miért hosszabb az utazási idő, mint a másik irányban. A felvetett kérdésre a gyerekek tapasztalataik alapján kereshetnek választ. Például:

– Hosszabb úton megy a busz Y-ból X-be.
– Sok az emelkedő, amikor Y-ból X felé halad a busz.
– Egyik irányban gyorsjáratként közlekedik a busz, a másik irányban több helyen megáll.
– Egyik irányban autópályán halad, a másik irányban autóúton.

A történést egy időszalaggal lehet szemléletessé tenni, amelyen pl. 20 percenként látható a 7 óra beosztása. Ezen jelölhetik a gyerekek az eltelt időt. Például:



Ez az ábra is alkalmas új információk megadására. A gyerekek maguk is feltehetnek és megválaszolhatnak kérdéseket. Például ilyen kérdésekre számíthatunk:

– Hol volt a buszvezető 200 perc vezetés után?
– Hol volt a buszvezető, amikor ezt mondta: „Ma már 3 órát vezettem."
– Mennyi időt vezetett már, amikor az Y városból indult X városba?
– A nap folyamán mikor lehetett alkalma a buszvezetőnek pihenni?
…

A fenti ábra jól tükrözi azokat a matematikai modelleket, amelyek a valóságtartalmú probléma megoldásának segédeszközei lehetnek. A nyilakról egy váltakozó különbségű sorozat olvasható le: 60, 140, 200, 280, 340, 420…

A kapcsos zárójel két nyilat fog össze, és szemlélteti a két nyíl helyett egy nyíl típusú feladatok matematikai tartalmát. Ezek alapján egyenletesen növekvő sorozat tagjait olvashatjuk le: 140, 280, 420…

Ezeknek a számoknak az ad értelmet, hogy a feladatra vonatkoztatjuk őket, elmondjuk, hogy melyik szám miről informál bennünket.

Az időszalag jól tükrözi a folyamatosságot, segítségével adott időpontban a buszvezető tartózkodási helyéről is lehet közelítő képet alkotni.

A és B város 420 km-re van egymástól. A két városból egyszerre indul el a másik városba egy-egy autó. Az A városból induló 60 km-t, a B városból induló 80 km-t tesz meg óránként. Mikor és hol találkoznak?

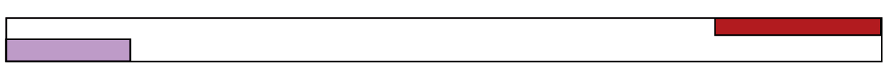
A feladathoz jól illik egy 42 cm-es papírcsík, és a színesrúd-készlet lila és bordó rúdjai.

Ezekkel az óránként megtett utakat jelölhetik a gyerekek.

Milyen információ leolvasására nyújt ez a kirakás lehetőséget?

Gondolatban követik a gyerekek az autók útját.

Elképzelik, hogy 1 óra elteltével melyik autó mekkora utat tett meg, éppen hová jutott, és jól látják, hogy még mekkora út van a két autó között. A 420–60–80 vagy a 420–(60+80) számfeladatok mindegyikére értelmes magyarázatot találhatnak.



Azt is könnyedén leolvashatják erről a képről, hogy a teljes útból melyik autónak mennyi van hátra. Akár arra a kérdésre is megtalálhatják a választ, hogy vajon hol jártak az autók félórával ezelőtt.

Ha az autókkal a teljes utat bejárják, ismét sok információhoz juthatnak.

Egyrészt láthatják, hogy találkozás után hogyan távolodnak az autók egymástól. Jól látszik, hogy A városból induló autó 7 óra alatt teszi meg a teljes utat, míg a B városból indulónak 5 óránál kicsivel kell csak több idő. Az ügyesebb gyerekek azt is kiszámolhatják, hogy pontosan mennyi idő alatt jut el az autó a B városból A-ba.

Az utolsó két feladat mennyiségi adatokat tartalmaz, ezek megoldása többnyire több nehézséget okoz a gyerekeknek. Ezért külön figyelmet fordítunk harmadik osztályban a mozgásos szöveges feladatok tárgyalására, amelyek modelljeként a színes rudak és a papírcsíkok mellett használhatunk szakaszos ábrázolást is.

A fent bemutatott megoldásokból kitűnik, hogy a kirakások, ábrázolások mindegyikéről leolvashatók a feladatok megoldása mellett további információk is, amelyeknek nagy előnye, hogy erősítik a matematika és a valóság kapcsolatának érzékelését.

A 3–4. osztályos tanulók számára gyakran tűzünk ki olyan feladatokat, amelyekkel a hétköznapi életük során valóságos szituációkban találkozhatnak. Ezek megoldásakor szükséges a már tanult matematikai ismereteik alkalmazása, sokféle képességük mozgósítása. A mindennapi történésekből merített problémafelvetéseket a gyerekek közel érezhetik magukhoz, hiszen úgy érezhetik, hogy a saját életük pillanatait, tevékenységeit keltik életre. Az ilyen történetek lehetővé teszik, hogy a gyerekek beleéljék magukat adott szituációkba, és a mindennapokban alkalmazható, könynyen aktivizálható ismereteket szerezzenek. A módszerekben változatos problémafelvetések alkalmat kínálnak az aktív tanulásra, az összefüggések felfedezésére; a tanulókat gondolkodásra késztetik.

A valóságos, a gyerekek életéből, környezetéből vett problémafelvetések lehetőséget teremtenek számukra, hogy megérezzék a matematika modellszerepét a gyakorlati élet, valamint a tudományok problémáinak megoldásában. Ehhez járulnak hozzá a mennyiségek mérését igénylő tevékenységek, valamint a vásárlásról szóló feladatok.

A gyerekeknek is lehet gyakori feladatuk a vásárlás. Ehhez a tevékenységhez sokféle probléma tartozhat. Nem maradhatnak ki a vásárolt áruk fizetésével járó problémák vagy az áruk szállítása, több áru tömegének becslése.

Például:

Egy nagyobb bevásárláskor sok mindent tettünk a bevásárlókocsiba.
A vásárolt áruk: és az áraik:

1 karton dobozos tej	1liter	93 Ft
másfél kg hús	1 kg	768 Ft
4 doboz tojás	1 db	12 Ft
40 dkg sajt	1 kg	720 Ft
2 darab 25 dkg-os gesztenyemassza	1 db	174 Ft
3 dl tejszín		105 Ft
3 kg mosópor		1300 Ft
4 kg alma	1 kg	150 Ft
2 kg mandarin	1 kg	280 Ft

a) A pénztár felé haladva azon gondolkodtunk, elég lesz-e a nálunk lévő 8000 Ft készpénz, vagy bankkártyával kell fizetnünk. Te mit gondolsz erről?
b) A tej, a mosópor az alma és a tojás kivételével mindent két szatyorba pakoltunk. Vajon hogyan tudtuk elosztani az árut két szatyorba, ha azok közel egyforma nehezek lettek? Te mit tennél az egyik, és mit a másik szatyorba?

A probléma megoldása sokféle képességet fejleszt. Egyrészt, szükség van valóság tartalmú adatok becslésére, szükség lehet mennyiségek mérésére is (pl. milyen nehéz 1 doboz tojás?). Néhány adat hiányos, illetve ismeretlen lehet a gyerekek előtt, ezeket az adatokat pótolniuk kell (például: hány liter tej van egy kartonban? hány tojás van egy dobozban? stb.). Az adatok pótlásakor tapasztalhatják a gyerekek, hogy nem egyértelmű a feladat megoldása, hiszen többféle csomagolásban kaphatunk tojást. Így a fizetendő összeg attól függ, hogy hány tojást vásárolunk. Ez viszont nem befolyásolja a szatyrok nehézségét, hiszen a tojásokat nem helyezzük szatyorba.

A mindennapokban gyakran kerülünk döntést igénylő helyzetbe. Általában többféle lehetőség adódik egy probléma megoldására, és a mi választásunkon múlik, hogyan oldjuk meg. Választásunkat sok tényező befolyásolhatja, a megoldás különféle feltételektől függhet. Ezért gyakran kell a matematikaórán is olyan helyzetbe hozni a gyerekeket, amelyeknél nekik kell meggondolni a lehetséges feltételeket, és többféle feltétel teljesülése esetén ők választhatják ki a leginkább reális megoldást.

A gyerekek mindennapjaihoz remélhetőleg hozzátartozik az olvasás. Olvasási élményeik megbeszélése mellett kínálkozik az is, hogy ötleteket találjanak technikai problémák megoldására. Ez vonatkozhat a könyvek rendezésére, adott könyvespolcon való elhelyezésükre, könyvtári kölcsönzésre vagy éppen egy könyv elolvasásának időbeli ütemezésére.

Például:

Andris nagyon szeret olvasni. Minden este elalvás előtt egy órát olvas. Egyik kedvenc könyve Fekete Istvántól a Kele. Ezt már harmadszor kölcsönözte ki a könyvtárból, de egy hét múlva vissza is kell vinnie.
a) A 270 oldalas könyvnek túl van már a felén, de még nem jutott el a kétharmadáig. Legalább hány oldalt olvasson el a könyvből naponta, hogy be tudja fejezni a könyv olvasását egy hét alatt?
b) Andris feljegyezte, hogy mely napokon, mikor van nyitva a könyvtár.

Hétfőn:	*10:00–12:00 és 15:00–16:30*
Kedden:	*14:30–18:30*
Szerdán:	*11:00–17:15*
Csütörtökön:	*9:30–11:30 és 15:15–18:00*
Pénteken:	*10:00–13:30*

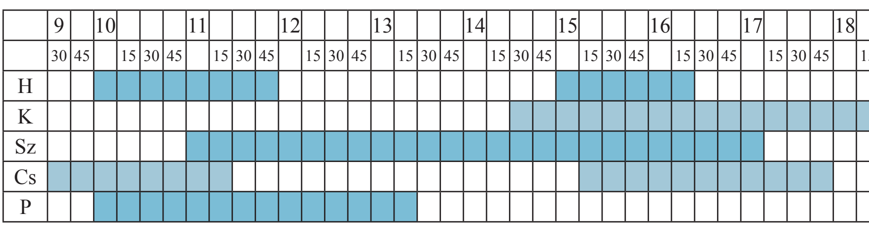
Andris általában kora délután, fél 2 és 2 óra között vagy este 5 óra után tud könyvtárba menni az iskolai elfoglaltságai és az edzései miatt. Mely napokon tudja visszavinni Andris a könyvet a könyvtárba?

A feladat első része arról informál bennünket, hogy a könyvből 135 oldalnál kevesebb, de több mint 90 oldal van hátra. Ha ezt adott idő alatt akarja valaki elolvasni, konkrétabb adatra van szükség. Így csak azt lehet meggondolni, hogy mennyit kell egy nap alatt elolvasni, ha 134, 133, …, 91 oldal van vissza a könyvből. Azt is meggondolhatjuk, hogy még sincs 44 megoldása a feladatnak, hiszen minden nap ugyanannyit olvas Andris, így ha 1 oldallal növekszik a naponta elolvasott oldalak száma, akkor 7 oldallal fog nőni az 1 hét alatt olvasott oldalak száma. Így a probléma lehetséges megoldásait érdemes táblázatba gyűjteni:

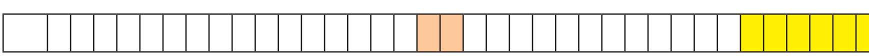
Az elolvasatlan oldalak száma	91	92–98	99–105	106–112	113–119	120–129	130–134
1 nap alatt célszerű ennyit olvasni	13	14	15	16	17	18	19

Az is meggondolható, hogy mely oldalszámok esetén kell valóban a hét minden napján ugyanannyit olvasnia Andrisnak, és mely esetekben marad az utolsó napra kevesebb oldal.

A feladatban felvetett második kérdés időintervallumok összevetését és közös részének meghatározását igényli. A gyerekek számára nagy segítséget jelent a könyvtár nyitva tartásának időszalagon való ábrázolása.



Azt is ábrázolhatjuk egy időszalagon, hogy Andris mikor tud menni könyvtárba, és ezt a csíkot kivághatjuk és végighúzhatjuk a táblázaton.



A csík mozgatásával könnyen leolvashatják a gyerekek a lehetséges megoldásokat.

A tárgyi eszközök megfelelő megválasztása, használata könnyíti a gyerekek számára a „matematizálás” tevékenységét. Annak a fejlesztése, hogy a gyerekek a köznyelven megfogalmazott problémákat le tudják fordítani a matematika nyelvére, fontos és nehéz feladat. A fordítást az eszközök és a jól választott képek támogatják. A tevékenységre javasolt eszközök szükség esetén tárgyhűek (pl. konkrét tárgyak mérése, számlálása, játékpénz használata), más esetben megjelennek képek, ábrák (pl. szakaszos ábrázolás), vagy az absztrakcióhoz vezető elvontabb modellek (pl. színes rudak, táblázatok). Nem szabad siettetni az eszközök elhagyását, fontos, hogy gyakran igényeljük az elgondolás szemléltetéssel való indoklását. Az algoritmusok alkalmazása előtt várjuk el a gyerekektől pl.

a műveletek előre becslését, így tudják ellenőrizni számolásuk megbízhatóságát, felismerhetik az elkövetett hibákat.

A természeti, földrajzi, éghajlati adatokat is tartalmazó vagy a kirándulással, utazással, sporttal, egészséges életmóddal kapcsolatos feladatok érzékeltetik, hogy a matematikai ismeretek más szakmák, az élet különböző területein felmerülő problémák megoldásának is hasznos eszközei.

A problémáknak olyan életszerű helyzeteket kell felvetniük, amelyekkel a gyerekek nap mint nap találkozhatnak, így könnyű lesz számukra a szituáció elképzelése. A témaválasztásnál nem matematikai problémákhoz keresünk valóság közeli szituációkat, hanem a hétköznapokban gyakran átélt valóságos problémákat fogalmazzuk meg, és ezek meggondoltatásával hozzájárulunk ahhoz, hogy a gyerekek könnyebben eligazodjanak a mindennapi életben.

Felvethetünk olyan problémákat, amelyekben a tanulóktól várjuk a szükséges adatok beszerzését.

Például:

Gyűjts magadról adatokat!

a) Mennyit ver a szíved 1 perc alatt?

b) Hányszor veszel levegőt 1 perc alatt? Számolj!

c) Mennyit ver a szíved 1 óra alatt?

d) Hányszor veszel levegőt 1 óra alatt?

Egyszerű, egylépéses következtetéssel megoldható feladattal találkoznak a gyerekek. A feladat megoldásai között nagy különbségek lehetnek, hiszen a gyűjtött adatok a gyerekek mérési eredményei alapján változhatnak. A megoldások összehasonlítása kiszűrheti a hibás mérési eredményeket, ily módon reális adatok használatához vezet.

A problémák megoldása önállóan, párban vagy csoportban lehetőséget ad a megszokottól eltérő feladatok és a valóságban előforduló helyzetek áttekintésére, megoldási módok megismerésére, ötletek, módszerek gyűjtésére, a problémamegoldáshoz nélkülözhetetlen kreativitás fejlődésére. A csoportos tevékenységek során a gyerekek természetes módon tanulják meg az együttélés szabályait, megtapasztalják a jó érzést, ha segítenek a rászorulóknak. Sokszor nyílik lehetőségük véleménynyilvánításra, elgondolásaik megismertetésére másokkal. Az elképzelések ütköztetése, megvitatása neveli őket mások véleményének tiszteletben tartására, a társaik iránti toleranciára. Megtanulják, hogyan lehet elfogadni a maguk és mások hibáit, esetleges korlátait. A hibajavítás, a véleményalkotás és mások meggyőzése a saját ötletek beválásáról indoklásokkal, ésszerű, elfogadható érvelésekkel történhet. Kérjük a tanulóktól a megoldás ellenőrzését és indokoltassuk is meg a választott módszert, hogy a gyerekek tényekkel alátámasztva vállalják saját munkájukért a felelősséget, és képesek legyenek tevékenységüket reálisan értékelni.

Relációk, függvények

Az 1-2. osztályban megfogalmazott követelményekre épülve hasonló típusú feladatok és követelmények támaszthatók a 3–4. osztály végére. A sorozatok esetében összetettebb szabályok felismerése a követelmény, a hétköznapi tárgyak és jelenségek matematikai jellemzőinek átkódolásában nagyobb jártasság feltételezhető. Például az idővel kapcsolatos jelenségek számokká alakítása rutinszerűvé válhat, mert például a hét napjainak neve és az, hogy a hét hányadik napjáról van szó, ebben az életkorban már általában ismeret jellegű tudáselemként van meg, és nem szükséges a hétfőtől indulva, a számlálás gyakorlatához hasonló stratégiát alkalmazni.

Rekurzív számsorozatokkal a tanulók az 1–2. évfolyamon is találkoznak (pl. olyan sorozattal, ahol a soron következő tag az előző két tag összege), azonban számos lehetőség van olyan hétköznapi problémák megfogalmazására, amelyekben rekurzív sorozatok kerülnek elő. Például: egy 2/4-es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal? Majd ezt követően: egy 3/4-es zenei ütem hányféleképpen tölthető ki negyed és nyolcad ritmusokkal?

A következő feladat a klasszikus Fibonacci-sorozat szöveges változata, a kevéssé valószerű nyúlszaporulat helyett egy lerajzolható, a mesevilágot idéző megszövegezéssel:

> *Amikor Tündérország legöregebb fáját elültették, a fának egy ága volt. Egy év múlva még mindig csak egy ága volt, de utána minden évben minden ágból kihajtott egy új ág. Hány ága volt a fának (a) két év múlva, (b) három év múlva, (c) négy év múlva, (d) nyolc év múlva?*

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Karikázd be annak az összefüggésnek a jelét, amelyik igaz a táblázatra, és húzd át annak a jelét, amelyik nem igaz!

△	búza	ház		kincs
☐	b	h	f	

a) ☐ = △ betűiből elhagyjuk azokat, amelyek nem kezdőbetűk
b) ☐ mássalhangzó
c) ☐ = △ kezdőbetűje
d) ☐ betű

Ebben a példában mind a négy opció igaz a táblázatra.
Az ilyen feladatok – bár kevéssé megszokottak – a gondolkodás magas szintű összetevőit mérik, amelyek kapcsolatosak a falszifikációs következtetési elvvel.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?

⊙	lent	mellett		mögött
☐	lefelé	mellé	alá	

A feladat tartalmi szempontból nyelvtani, azonban a nyelvtanban működő matematikai törvényszerűségeket illusztrálja. Ezáltal a matematikai modellalkotás és a hétköznapokban szerzett ismeretek közötti kapcsolat erősödik, és ez kifejezett célja az olyan matematikaoktatásnak, amely egyszerre kívánja szem előtt tartani a matematikai gondolkodás fejlesztését és a matematikai tudás transzferálhatóságát.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban?(Forrás: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve, 1981, 2. kiadás, 278. o.)

□	ló	medve	tehén	tyúk
✷	csikó	bocs	borjú	csirke

A megoldást fogalmazzuk meg nyitott mondattal is: A □ kicsinye a ✷.

A bináris relációk tudatosításának számtalan eszköze lehetséges. Számos tantárgyban bevett feladattípus az illesztéses zárt feladat, amikor két halmaz elemei között kell megtalálni a kapcsolatot, és előfordulhat, hogy az egyik halmaz valamely eleméhez a másik halmaz több eleme is hozzáilleszthető. A napirenddel, táplálkozással, öltözködéssel kapcsolatos kérdések lehetőséget nyújtanak adatpárok képzésére, ahol az elő- és utótag közötti kapcsolatban lényeges a sorrend is és a köztük fönnálló viszony is.

Az 1–2 osztályos követelmények és feladattípusok alkalmazásával, ám bővebb számkörben mozogva tudunk autentikus problémákat definiálni. Az adatpárok mellett adathármasokban felismert összefüggések is elvárhatók.

A rendszerezési képesség fejlesztésére alkalmas feladatok között szerepelnek a két szempontú szelektálást igénylő feladatok. Dolgok adott sokaságát két szempont egymásra vetítésével rendszerezni már 3–4. osztályban is lehetséges, elsősorban manipulatív és képi szintű feladatokkal, amelyek tartalma a mindennapi életből ismerős a tanulók számára. A két szempontú osztályozás egyúttal a korrelatív gondolkodás fejlesztésének eszköze is, hiszen a két szempont egymásra vetítésével előálló kétdimenziós rendszerben a két szempont közötti esetleges összefüggés is nyilvánvalóvá válik.

Oktatás-módszertani szempontból a hasonló feladatoknál javasolható a tanulók képességszint szerint heterogén csoportokban történő együttműködése, amelynek során a tanulók megismerik egymás ötleteit. Különösen fontos ez az olyan autentikus feladatoknál, amelyeknek nincs egyetlen, jól definiált megoldása, hanem a megoldás sokszor maga a gondolkodási folyamat, amelynek során matematikai modellek alakulnak és változnak.

A fordított arányosság elve is megjelenik 3–4. osztályban, és elsősorban a tanulói tapasztalatokra, próbálgatásra épülő feladatokban.

Az osztálykiránduláson a gyerekek egy pónilóval húzott kis hintóval szerettek volna utazni. A póni gazdája azt mondta, 1200 Ft-ot kell fizetni egy negyedórás menetért, függetlenül az utasok számától.
Milyen kérdéseket tettek még föl a tanulók, mielőtt kibérelték a hintót?
Írjátok föl az alábbi táblázatba, hogy mennyibe kerül egy menet a hintó-

val tanulónként, ha egyedül, vagy ketten, vagy hárman, illetve négyen együtt utaznak!

résztvevők száma	1 tanuló	2 tanuló	3 tanuló	4 tanuló
1 tanuló részvételi díja	1200			

A fordított arányosság megjelenésének másik lehetséges terepe a területszámítással kapcsolatos. (Természetesen nem képlettel felírt területszámításra gondolunk.)

Anna 24 egyforma papírdobozt szeretne szépen elrendezni a szobájában. Ha egymás tetejére pakolja őket, akkor magas lesz az oszlop, ha pedig mindet egymás mellé rakja, akkor sok helyet foglalnak el a szőnyegen. Milyen elrendezést javasolnál? Hány doboz kerüljön egymás mellé, és milyen magasra pakolja Anna a dobozokat? Készíts rajzot, majd készíts táblázatot!

egymás melletti dobozok száma	1	24	2		
egymás fölötti dobozok száma	24	1			

A korrelatív gondolkodás fejlesztésére alkalmasak az olyan feladatok, ahol két számszerűsíthető tulajdonság nem determinisztikusan függ össze, hanem egy tendencia rajzolódik ki. A következő feladatban akár a tanulók saját adatait is fölhasználhatják.

A védőnők megmérték az osztály tanulóinak testmagasságát és testsúlyát. Néhány adatot a következő táblázatban láthatunk. Két adatot azonban valaki véletlenül kiradírozott. Milyen adatok szerepelhettek az üres helyeken?

testmagasság (cm)	135	142	127		140
testsúly (kg)	31	36	28	40	

A konkrét adatok egy viszonylag tág intervallumból kerülhetnek ki, de ennél jóval fontosabb az adatsorok közötti összefüggés explicit megfogalmazása, amely a pozitív korreláció gyermeknyelvi leírása lehet. Még ennél is lényegesebb azonban annak tudatosítása, hogy a konkrét értéket nem tudjuk az összefüggés alapján meghatározni.

Geometria

Konstruálások

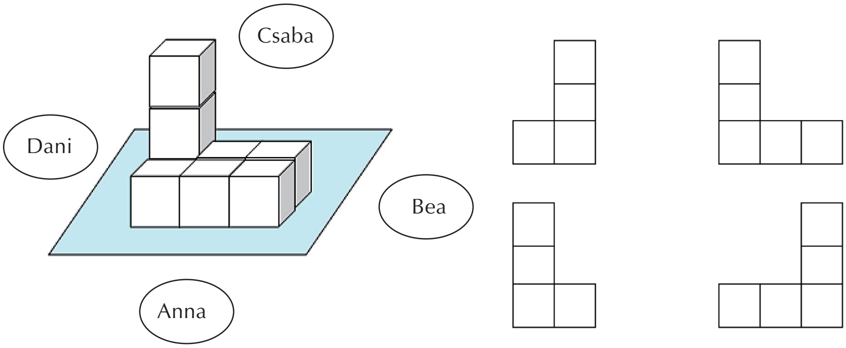
A 3. évfolyamon a képességfejlesztési feladatok közül előtérbe kerül az alkotó gondolkodás, a formalátás, a térlátás fejlesztése. Az alkotások létrehozása közben fejlődik a szövegértés a tulajdonságok kifejezésével, a megfigyelőképesség, az emlékezőképesség. A konkrét alakzatok tulajdonságainak megfigyelésével, kifejezésével fejlődik az absztrahálóképesség.

A 4. évfolyam végére az alkotások létrehozása a megadott feltételek figyelembevételével, ezek ellenőrzésével egészül ki. Fontossá válik a rész és egész viszonyának megértése, a megfigyelések elemzése, megfogalmazása, a tanult matematikai szaknyelv elemi használata. Az alkotások létrehozása fejleszti a kombinatív gondolkodást. A teljességre törekvés a cél, s a megalkotott alakzatok rendszerének felépítése.

A felső tagozat fejlesztési feltételeként a kezdő szakasz végére szükséges testek építése modellről és adott feltételek szerint, illetve síkidomok előállítása tevékenységgel megadott feltételek szerint. Geometriai tulajdonságok felismerése, alakzatok kiválasztása, szétválogatása a felismert tulajdonságok alapján. Élek, csúcsok, lapok felismerése, számbavétele egyszerű testeknél, oldalak, csúcsok felismerése, számbavétele egyszerű sokszögeknél. Téglatest, kocka, téglalap, négyzet felismerés összkép alapján a testek, síkidomok különféle helyzetében. Téglalap, négyzet, téglatest, kocka tanult tulajdonságainak felsorolása, bemutatása modell segítségével.

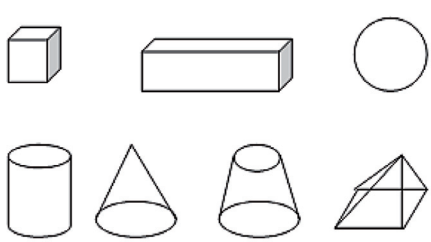
Példa a térszemlélet fejlesztésére, a rész és az egész viszonyának megfigyelésére:

Négy gyerek fehér kiskockákból épített egy testet. Körbeülték, és négy különböző oldalról nézve lerajzolták, hogy mit látnak. Szerinted melyik gyerek mit láthatott? Írd a nevüket a megfelelő helyre!



Példa formafelismerésre, alakzatok tulajdonságainak felismerésére, állítások igazságértékének meghatározására:

Párban játsszatok!
Válogassatok ki olyan testeket, amilyeneket a képen láttok! 10 kártyából felváltva húzzatok! A kártyán lévő állítást úgy egészítsétek ki, hogy felmutattok egy testet, amelyre igaz. (A játékot játszhatjátok más szabállyal is. Pl.: Úgy egészítsétek ki az állításokat, hogy ne legyenek igazak!)



Készíts kártyákat az alábbi mondatokkal! Egy-egy kártyán egy mondat legyen!

Minden lapja ugyanolyan alakú és ugyanakkora.
Minden lapja négyzet.
Minden lapja téglalap.

12 éle van.
Csúcsainak száma 5.
Oldallapjai négyszögek.
Van kör alakú lapja.
Csak görbe felülete van.
Sík és görbe felülete is van.
Van háromszög alakú lapja.

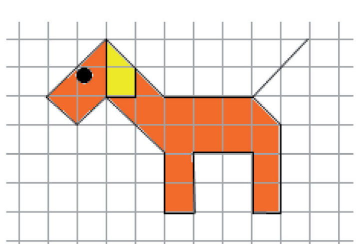
Transzformációk

A 3–4. évfolyamon az alakazonosítás mellett a változás és változatlanság felismerésével, tudatosításával alapozódik az általánosítás a transzformációk területén. A ritmus, a periodikusság felismerése, a szimmetriák megfigyelése és követése a megfigyelőképesség fejlesztését célozza. Fontos a megfigyelt alakzatokról állítások önálló megfogalmazása, illetve adott állítások igazságának megítélése.

A továbbhaladáshoz szükséges fejlesztései feltételek között fontos a „hasonló" és az „egybevágó" kapcsolat felismerése, a hasonlóság és az egybevágóság képi fogalmának alapozottsága, síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, elforgatás) végrehajtása másolópapír segítségével, a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetése összetettebb alakzatok esetén is.

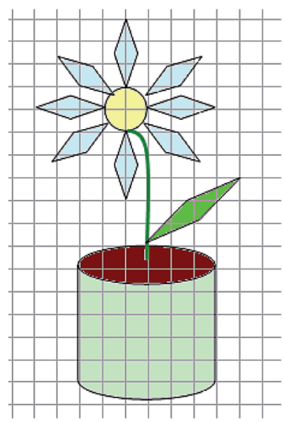
Példa a hasonlóságra, nagyított kép előállítására:

Nagymama egy kutyust hímez Danika takarójára. Talált egy mintát az „Ügyes kezek" újságban, de a mérete túl apró a takaróhoz képest. Másold át a mintát a füzetedbe! Nagyítsd fel úgy, hogy minden irányban kétszeresre változtasd a hosszméreteket!



A témakör fejlesztési feladatainak fontos eleme a „hasonló” és „egybevágó” kapcsolat felismerése mellett a síkbeli egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükörkép megalkotása másolópapír segítségével, illetve nagyított kép előállítása négyzetrács felhasználásával.

Anyák napjára szép ajándékot készíthetsz.
Keress egy erős papírdobozt!
A rajzot nagyítsd fel kétszeresére, és ragaszd a dobozka tetejére!
A doboz jó lesz varródoboznak.



Tájékozódás

A kezdő szakaszban képességfejlesztési feladat a térbeli tájékozódás továbbfejlesztése, információk megértése, információközlés szavakkal, jelekkel, a helymeghatározás képességének fejlesztése. Irányra, méretre, szomszédosságra való emlékezés.

A további fejlesztéshez szükséges, hogy a tanulók saját környezetükben képesek legyenek eligazodni (utca, házszám, emelet, ajtó, irány, távolság), egyszerű térképvázlatokat értelmezni, illetve készíteni az irány és méretek közelítő, valamint a szomszédosság pontos megjelölésével. Tudjanak tájékozódni vonalon, síkban, térben egy, két, illetve három adat segítségével.

Autentikus tevékenységre építő feladatként a következő példát adjuk:

Párban dolgozzatok! Készítsetek térképvázlatot iskolátok környezetéről! Jelöljétek be az iskola, a boltok, a lakásotok helyét! Ha van a környéken parkoló, vasútállomás, sportpálya, könyvtár, mozi, színház…, akkor azt is jelöljétek meg! Adj meg egy útvonalleírást, amelyet a párodnak követnie kell! Az ő dolga, hogy megmondja, hová jutott. Azután ő adjon neked egy leírást, és te kövesd azt! Hová jutottál?

Mérés

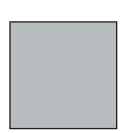
A 3–4. évfolyamon folytatódik a tapasztalatgyűjtés a mennyiségi jellemzők felismerése, megkülönböztetése, a különbségek észrevétele terén. Fejlesztési feladat a becslőképesség alakítása, a pontosság mértékének kifejezése gyakorlati mérésekben, egyszerű mennyiségi következtetések végzése. Fontos a matematika és a valóság kapcsolatának építése. A gyakorlati mérések segítik a tájékozódást a világ mennyiségi vonatkozásaiban.

A tanulóknak a további évek fejlesztésének érdekében biztonsággal kell mérniük alkalmi és szabványegységekkel. Gyakorlatban végrehajtott mérések alapján a mértékegység és mérőszám kapcsolatát képesek átlátni, a tanult szomszédos mértékegységekkel gyakorlati mérésekhez kapcsolva, illetve ilyenek felidézése nyomán át- és beváltásokat végezni, a téglalap (négyzet) kerületének és területének megállapítását méréssel és számítással meghatározni.

Példa téglalap alkotására, területének meghatározására:

János bácsi négyzet alakú kőlapokkal rakta ki a járdát. A maradék 36 darabbal a kutyaház előtti részt akarja téglalap alakban lekövezni. Papíron próbálgatja, hogy milyen legyen a kirakás.
Rajzold le, hányféle megoldást találhat!

A négyzet alakú kőlapok egy oldala a valóságban 1 dm hosszúságú:



Hány négyzetdeciméteres területet tudott lefedni a maradék lapokkal?

További ötlet olyan feladatokra, amelyek tevékenységközpontúak és közvetlenül kapcsolódnak a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz:

A szél becsapta az ablakot, és sajnos összetört egy ablaküveg. A gondnok megmérte: 1253 mm hosszú és 1245 mm magas üveget kell a keretbe bevágni.

a) Mérjetek ki és vágjatok ki papírból egy ilyen méretet! (Több darabból is összeragaszthatjátok!)

b) Adjátok meg a méreteket centiméter-pontossággal!

c) Hány centiméter az üveglapot keretező szegélylécek hosszúsága összesen?

d) Hány darab 1 cm oldalhosszúságú négyzettel tudnátok lefedni az üveglapot?

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A 3–4. évfolyamon az adatok lejegyzésének, illetve leolvasásának egyre tudatosabb volta válik hangsúlyossá. 4. osztály végére a gyerekek tudnak adatokat elrendezni sorozatba, táblázatba, ábrázolni tudják azokat grafikonon, sorozatból, táblázatból, grafikonról adatokat visszaolvasnak, találnak az egész adategyüttest jellemző adatokat (pl. a nagyság szerinti középsőt; a legnagyobb, legkisebb adatokat, ezek távolságát; a leggyakoribb adatot). Ki tudják számítani az adatok átlagát. Ez a téma rengeteg lehetőséget nyújt realisztikus feladatok megoldására, ha figyelemmel vagyunk az adatok megválasztására.

Realisztikus problémák kitűzését és megoldását gyakran a táblázatok elemzésének képességével vizsgáljuk.

Például:

Gabi, Béla, Pista és Jutka nagyon jó barátok. Szeretnek kártyázni, ezért havonta legalább egyszer játszanak. Egy olyan játékot szoktak játszani, amelyben minden partiban van első, második, harmadik és negyedik helyezett. Minden parti után felírják az eredményeket, és év végén győztest hirdetnek. Az idei kártyacsaták eredményét ez a táblázat mutatja.

	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely
Gabi	12	24	23	17
Jutka	18	22	21	15
Béla	24	13	13	26
Pista	22	17	19	18

A táblázat értelmezése során felvetődhetnek a következő kérdések: Hány partit játszottak az idén? Hogyan lehet megszámolni? Körülbelül hány partit játszanak alkalmanként? Ki nyerte a legtöbbször a játékot?...

További feladat lehet, hogy amennyiben más-más szempont alapján jelöljük ki a győztest, más lesz a győztes versenyző. A tanulók képesek ésszerű szempontot keresni, amely alapján eldönthető, hogy ki tekinthető győztesnek. A tanulói magyarázat, vita kezdi sejtetni, hogy egy statisztikai adathalmazt többféleképpen lehet értelmezni és magyarázni, hiszen

– Béla szerint ő a győztes, mert ő nyerte a legtöbb játékot.
– Jutka azzal érvel, hogy ő ugyan nem nyert túl sokat, de nagyon kevés utolsó helyezése van.
– Gabi szerint ugyan ő maga nagyon keveset nyert, de nagyon sokszor lett második, és azt sem könnyű elérni. Utolsó helye pedig kevesebb, mint a fiúknak.
– Pista úgy érzi, hogy legalábbis Bélánál jobb, mert ugyan kevesebb első helyezése van, de kevesebb utolsó is.

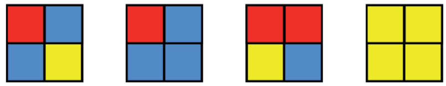
A probléma megoldása lehet az, hogy például 4 pontot adnak minden győzelemért, hármat a második helyezésért, kettőt a harmadikért, egyet a negyedikért. Elképzelhető, hogy úgy gondolkodnak, hogy a győzelemért több pont is járhat. Például 5 a győzelemért három a második helyezésért, egy a harmadikért, a negyedikért pedig nem jár semmi. Vajon mindkét számolási mód alkalmazása ugyanazt a győztest hozza? A táblázaton való eligazodás mellett a tevékenység fontos hozadéka a számolási készség fejlesztése.

A fenti probléma egy kissé leegyszerűsített felvetése lehet:
Az iskolai focibajnokság lezajlott. A győzelemért 2 pont, a döntetlenért 1 pont jár. A meccsek eredményeit beírták a következő táblázatba:

	3.a	3.b	3.c	4.a	4.b
3.a		3:0	2:1	1:3	1:1
3.b			0:0	0:2	2:1
3.c				4:3	1:3
4.a					2:2
4.b					

Állapítsd meg, hogy hány pontot gyűjtöttek a csapatok!
3.a: .... pont
3.b:....... pont
4.a:.......pont
Melyik mérkőzésen született a legtöbb gól?
Hány meccs végződött döntetlennel?

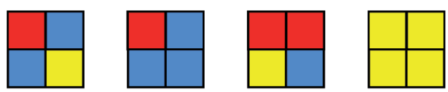
A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanulása során rengeteg autentikus problémával találkoznak a gyerekek. A hétköznapi tapasztalataikra építve számos olyan feladat tűzhető ki, amely számukra praktikus, releváns, és a problémamegoldás folyamata szempontjából intranszparens. Jó alkalom erre például egy játékkészlet közös, csoportmunkában való megalkotása.



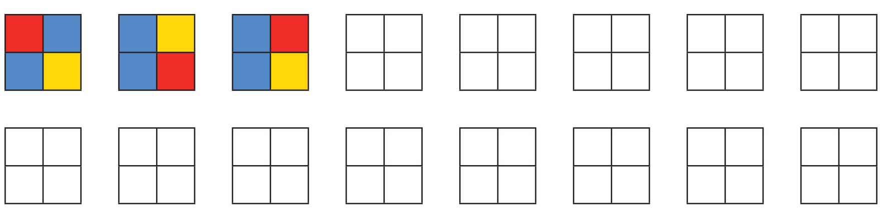
A négyzetlapok középvonalait megrajzoljuk, majd kifestjük piros, sárga és kék színeket használva. A gyerekek közös feladata az összes különböző elem megalkotása. Mivel a papírlapok forgathatók, megegyezhetünk abban, hogy azonosnak tekintjük a négyzet középpontja körüli forgatással egymásba vihető lapokat. Ebben az esetben a munka szervezése és megosztása egyaránt kombinatorikus problémát vet fel. Az elkészült készletet sajátjuknak érzik, mely autentikussá teszi a tevékenységet.

A fent leírt tevékenység értékelés során megfogalmazott változata a következő lehet:

Négyzetlapokból színezéssel ilyen kirakós játékot készítettünk. Három színt használtunk.

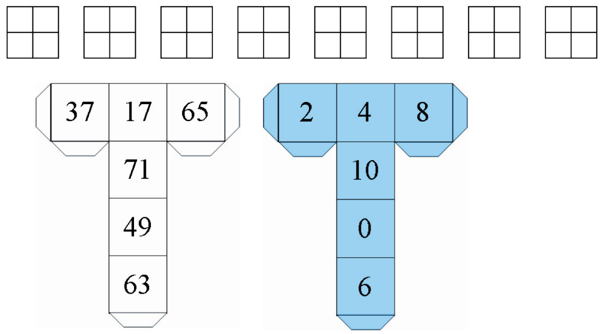


Ezután külön csoportba gyűjtöttük azokat a négyzetlapokat, amelyekben mindhárom szín szerepelt. Milyen elemek vannak még ebben a csoportban? Színezz!



A valószínűségi szemlélet fejlesztési céljai között szerepel, hogy 5-6. osztályban az adatok lejegyzése, megfigyelése és feldolgozása egyre önállóbbá váljék. Ez segíti a rendszerezőképesség fejlődését, lehetővé teszi a gyakoriságok megfigyelését is. A statisztikai megfigyelések rengeteg lehetőséget kínálnak autentikus feladatok beiktatására.

Egy másik alkalommal egyszerre dobnak az alábbi ábrán látható két kockával. A kísérlet megkezdése előtt megfogalmaznak néhány sejtést (pl. hogy páros vagy páratlan összeg jön-e ki gyakrabban), és néhány eset lejegyzése után összevetik tapasztalataikat a megfogalmazott sejtésekkel.



A biztos és lehetetlen események elkülönítésére vonatkozó kérdéseknek a mérés során továbbra is nagy jelentősége van. A fenti kockák feldobására vonatkozóan a következőket kérdezhetjük:

Ezekkel a számozott kockákkal dobtam. Ezután állításokat mondtam a dobott számok szorzatáról. Írd az állítás mellé, hogy szerinted igaz (I), hamis (H) vagy igaz lehet, de nem biztos, hogy igaz (L)!

a) 4-re végződik…
b) 6-nál kisebb…
c) Páratlan…
d) 491…
e) 711-nél kisebb…

Autentikus feladatokra jó lehetőség adódik olyan helyzetek leírásakor, amikor a gyerekeknek maguknak kell megtervezni egy játék szabályát.

Például:

Jancsi és Péter elhatározza, hogy ötször egymás után dobnak egy hagyományos dobókockával. Megegyeznek abban, hogy Jancsi akkor kap egy pontot, ha a dobás eredménye 2, 3, 4, 5 vagy 6. Ha nem ez történik, Péter kap néhány pontot. Az öt dobás után az a nyertes, aki több pontot gyűjtött. Ha azt szeretnénk, hogy a játék igazságos legyen, hány pontot kell kapnia Péternek, amikor a kocka 1-et mutat?

Várható megoldásként a tanulók 5 vagy 6 pontot fognak javasolni az 1-es érték dobásánál. A tanítónak nem szükséges állást foglalnia egy végső, helyes megoldás mellett. A feladat az úgynevezett probléma alapú tanulás eszméjét követi, vagyis a tanulók matematikai tevékenységet végeznek egy intranszparens problémán, a pedagógus pedig a matematikai igazságok birtokosa és osztója szerepéből a gondolkodás facilitátorává és moderátorává válhat.

Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

A korábbi évfolyamokhoz képest a realisztikus szöveges feladatok több téren újdonságot hozhatnak a tanulói tudás értékelésében. A kibővült számkörben a közvetlen gyakorlati tapasztalathoz nem köthető, de a médiából vagy az iskolai tananyagból ismert mennyiségek (pl. történelmi évszámok, földrajzi mennyiségek) jelenhetnek meg a feladatokban. Ezenfelül a többlépéses feladatok egyre nagyobb teret nyernek. A több lépést nem feltétlenül a több, egymás után elvégzendő számtani művelet jelenti (noha ez is jelentős nehézséget okoz), hanem a feladatmegoldás különböző fázisaiban megjelenő tudatos döntések egymásutánja. A Relációk, függvények cím (281. oldal) alatt részben elemeztük a szöveges feladatok megoldásának szokásos lépéseit 5–6. osztályban. A realisztikus feladatokban egyes lépések különösen fontossá válnak. A feladat szövegének megértése és a megfelelő matematikai modell kiválasztása általában nagyobb jelentőségű, mint a gyakorlófeladatokban. Ugyancsak kiemelt fontosságú általában a megoldás értelmezésének, ellenőrzésének lépése, amely itt korántsem azt jelenti, hogy az elvégzett matematikai műveleteket újra vagy esetleg inverzükkel kiszámoljuk, hanem a feladat szövegéhez illeszkedést, a valóságnak megfelelést vizsgáljuk.

„A matematikai tudás alkalmazásai” című bevezető fejezetünkben több példát is bemutattunk, amelyek a realisztikus aritmetikai szöveges feladatok közé tartoznak. Ezekből a feladatokból mint prototípusokból további realisztikus szöveges feladatok generálhatók.

Jancsi bácsi almáskertjében 8 sorban vannak a gyümölcsfák, és mindegyik sorban 12 almafa található. Fia javaslatára a kert szélén lévő fák törzsét vegyszerrel kezeli, hogy távol tartsa a kóborló őzeket. Hány gyümölcsfát nem fog vegyszerrel kezelni?

A feladat megoldásához egy megfelelő vázlatrajzot érdemes készíteni, vagyis a feladat szövegében szereplő dolgokat egy geometriai modellhez kapcsoljuk.

A mozijegyen azt olvassuk, hogy „BAL, 17. sor, 15. szék". Vajon hány szék lehet a moziteremben?

Ez a nyílt végű probléma az intranszparencia szempontjából akár az autentikus feladatok között is helyet kaphatna. Azért nem ott szerepeltetjük, mert a feladat maga nem egy életszerű problémahelyzetet vázol. Ha ott vagyunk a moziteremben, akkor aligha a jegyen található számok alapján fogunk becslést adni. Megoldásként többféle becslés adható, amelyet matematikai jelekkel, egyenlőtlenségként is megfogalmazhatunk.

Az iskola 280 tanulóját 44 fős buszokkal szállítják a gyermeknapi ünnepségre. Hány buszt rendeljen az igazgató?

Nemzetközi tapasztalatok halmozódtak föl az olyan típusú feladatokról, amelyekben valami „trükk" van. Várhatóan a többség helyesen el tudja végezni a maradékos osztást, amelynek eredménye 6, a maradék pedig 16. Azonban sokan válaszként 6-ot írnak vagy előfordul, hogy „6, maradt a 16" alakban fogalmazzák meg a választ. A realisztikus válasz itt 7 lesz, amihez még azt az implicit információt használjuk föl, hogy nyilván a lehető legkevesebb buszt fogják rendelni.

A feladat szövegében nem szereplő adat vagy jellemzően nem matematikainak tekintett tényezők miatt a tanulók sokszor becsapva érzik magukat, amikor olyan feladatokat oldanak meg, mint például:

Jancsi legjobb időeredménye a 100 méteres futásban 17 másodperc. Mennyi idő alatt fog ő lefutni 1 km-t?

Javaslatunk az, hogy az ilyen típusú, „trükkös” feladatok helyet kaphatnak a tanórákon, különösen a megszokott feladatmegoldó stratégiák túlautomatizálódásának elkerülése végett, azonban diagnosztikus értékelési célra kevéssé használhatók, mert csak további, finom vizsgálatok derítik ki, hogy valaki tájékozatlanság vagy pl. a bátorság hiánya miatt írja válaszként a fenti feladatra, hogy 170 másodperc.

Fontos lépés a szöveges feladatok jobb megértése felé, ha ebben a korosztályban már gyakran várjuk el a tanulóktól, hogy egy adott matematikai struktúrához ők maguk találjanak ki szöveges feladatot. Ez rendkívül nehéz feladat. Láttuk a szöveges gyakorlófeladatok között, hogy még egyetlen alapművelethez is küzdelmes vállalkozás lehet szöveget alkotni. Azonban éppen a szöveges gyakorlófeladatok és a realisztikus feladatok egymás mellé helyezésére és összehasonlítására nyújt lehetőséget, ha a tanulók alkotnak feladatszövegeket.

Ha például 20 liter vizet 8 edénybe kell egyenlően elosztani, akkor szöveges gyakorlófeladatként kitűzve ezt, a 2,5 liter egyszerűen adódik végeredményként. Megkérdezhetjük a tanulókat, milyen más dologgal helyettesíthetjük a feladatelemeket úgy, hogy a számok változatlanok maradjanak. A csokoládé törése még megoldható, de az ötletek között felbukkanhat például az, hogy a 20 fős osztály az osztálykiránduláson olyan szobákban aludt, ahol négy-négy emeletes ágy volt. Hány szobát kellett bérelni?… És az osztályfőnök hol alszik? A sokféle ötlet között várhatóan lesznek olyanok, amelyekben a változatlan számadatok és a változatlan osztás művelet mellett az osztás eredményének egészrésze, az egészrésznél eggyel nagyobb szám vagy éppen az osztási maradék lesz a feladat megoldása.

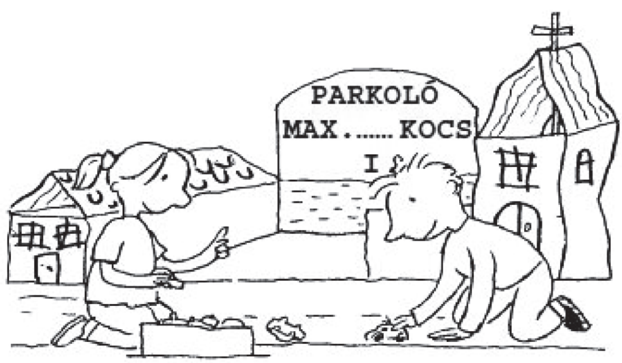
Érdekes típusát jelentik a realisztikus szöveges feladatoknak az olyan problémák, amelyek alapvetően nem számtani művelet elvégzésével oldhatók meg, hanem logikai következtetésekkel (nyilván szerepet kapnak egy-egy lépésben számtani műveletek is).

Éváék háza előtt van a buszmegálló, ahonnan 10 percenként megy reggel 6 és 9 óra között a busz az iskola felé. Az út 15 percig tart. Évának 7:45-kor az iskolában kell lennie. Mikorra érjen a buszmegállóba, hogy biztosan ne késsen az iskolából?

A nemzetközi szakirodalomból ismertek olyan feladatok, amelyek az autentikus kategóriába sorolhatók, és amelyek az 5–6. évfolyamos korosztály számára megfelelőek. 10-12 éves tanulókkal végzett kísérletekben több olyan feladat szerepelt, amelyek alkalmasak arra, hogy a tanulói tevékenységre, gyakran kooperatív matematikai munkára építve a valóságos szituációt leíró feladathoz egy megfelelő matematikai modell megtalálásra ösztönözzenek.

Az egyik ismert flamand fejlesztő programban Verschaffel és munkatársai[1] alkalmazták például a következő feladatot:

Péter és Anna egy város modelljét építik meg kartonpapírból. A templom és a városháza közötti tér tűnik a legmegfelelőbb helynek egy parkoló kialakításához. A kínálkozó hely egy 50 cm-es oldalú négyzet, az utcai oldal kivételével falak veszik körül. Péter már kivágta a megfelelő méretű papírnégyzetet. Hány autó fog maximálisan elférni a parkolóban?



1. Egészítsd ki a feliratot: pótold, hány autó fér el a parkolóban!
2. Tüntesd fel a kartonpapír négyzeten, hogyan lehet legjobban felosztani a parkolót parkolóhelyekre!
3. Magyarázd meg, hogyan jutottál el ehhez a felosztási módhoz!

1 De Corte, E. (2001): Az iskolai tanulás: A legfrissebb eredmények és a legfontosabb tennivalók. *Magyar Pedagógia.* **4**. 425.

Az elméleti bevezető fejezetünkben felsorolt jellemzők közül, amelyek általában jellemzik az autentikus feladatokat, valamennyi teljesül ebben a feladatban:

– A feladathelyzet részletes bemutatásához hozzátartozik a kép. Emellett egy narratív történet rajzolódik ki előttünk, amely a képpel együtt hozzájárul ahhoz, hogy a gyerekek a problémát sajátjuknak érezzék, vagyis összevessék azt a saját korábbi élményeikkel.
– A leírt helyzet valódi matematikai modellezésére van szükség. A rajz és a megadott (vagy megbecsült) adatok alapján várhatóan többféle geometriai modell készül.
– A tanulóknak meg kell szerezniük további hiányzó adatokat. Mekkora méretű egy átlagos játék autó? Mennyi hely szükséges egy parkoló kialakításához? A hiányzó adatokat akár helyszíni méréssel (például néhány játék autó adatainak mérésével), akár beszélgetés közben megvitatással összegyűjthetik.
– Több részfeladatra bomlik maga a teljes feladat: az egyes részfeladatok kitűzése, a részcélok elérésének ellenőrzése a tanulók feladata.

Egy másik nagyon híres fejlesztő kísérletben Kramarski és Mevarech megalkották az elhíresült „pizza-feladat”-ot. Ebben az autentikus feladatban három pizzéria árai szerepelnek: a pizza átmérője centiméterben van megadva (a kör területének figyelembevétele miatt ez inkább 7. osztálytól alkalmazható feladat), a különféle rendelhető feltétek ára pedig egészen változatos. A tanulók feladata a legjobb vételt megtalálni, amely szintén a fentebb leírt jellemzőket igazolja a feladatról: valós szituáció szóbeli emulációja, modellkészítés, el kell dönteni, mely számadatok jelentősek és melyek nem, a feladat részfeladatokra, a megoldási folyamat részcélokra bontható.

Az előző részben szerepelt feladat, amelyben az iskolába tartó busszal kapcsolatos időintervallumokat számoltunk, azáltal alakítható autentikus feladattá, hogy a gyerekek a saját, valóságos, megtapasztalt utazási szokásaikhoz keresik meg a megfelelő matematikai leírást.

A matematikai tudás értékelésében az autentikus feladatok sajátos szerepet töltenek be. Láttuk, hogy a realisztikus feladatoknál sem csak arról van szó, hogy „kijön-e a helyes végeredmény”. Olyan értelemben az autentikus feladatoknak nincs is végeredménye, mint a szöveges gyakorló-feladatoknak. Van viszont egy megoldási folyamat, amely szövegértésen, kooperatív tanuláson, matematikai modellalkotáson alapul, az adatok hiányának vagy redundanciájának eldöntése pedig döntési helyzetek elé állítja a tanulókat. Az alsó tagozatos kor végére gyakran meggyökeresedő matematikai meggyőződések (pl. hogy minden feladatnak van egy helyes megoldása) helyett a problémaérzékenység, a problémamegoldó folyamat fázisainak tudatos ismerete és kontrollja fejlődhet.

A szöveges gyakorlófeladatokhoz és az általánosságban vett realisztikus feladatokhoz hasonlóan az autentikus szöveges feladatok is lehetőséget nyújtanak egy „fordított" feladatmegoldó stratégia alkalmazására: problémahelyzet és szöveg megalkotása adott matematikai struktúrához. Fejlesztő kísérletben már 4. osztályosoknál sikerrel alkalmaztuk például azt a feladatot, amelyben a 100:8 osztáshoz kellett olyan módon feladatszöveget alkotni, hogy egyszer a maradék nélküli osztás, másszor a maradékos osztás, harmadszor a maradék, negyedszer pedig a maradékos osztásnál kapott egészrésznél eggyel nagyobb egész szám legyen a feladat megoldása. Egy ilyen feladatkitűzéssel nyilvánvalóan a kreativitást és a matematikához kevéssé szorosan köthető verbális képességeket is mérjük. Ez azonban nem kifogásolható, amennyiben világossá tesszük, hogy a matematikai tudás autentikus problémahelyzetben történő alkalmazásának diagnosztizálását végezzük.

Relációk, függvények

A realisztikus feladatok típusának legfőbb jellemzője, hogy a feladatmegoldás folyamatában releváns szerephez jutnak a hétköznapi életből merített tapasztalatok, esetenként konkrét ismeretek. Bizonyos feladatok esetében azonban valószínűsíthető, hogy a megfelelő megoldáshoz legalább a feladatmegoldás egy pontján (tervezés, végrehajtás vagy ellenőrzés fázisában) szükséges a hétköznapi ismeretek és tapasztalatok aktív felhasználása. Mindez nem jelenti azt, hogy a feladat a tanuló számára mindennapi helyzetet ír le, számára kissé idegen, a „felnőtt" világ körébe tartozó, de számára is ismert szituáció is lehet. Ilyenek például a háztartással, sütéssel-főzéssel, utazással, vásárlással, takarékossággal kapcsolatos esetek, helyzetek.

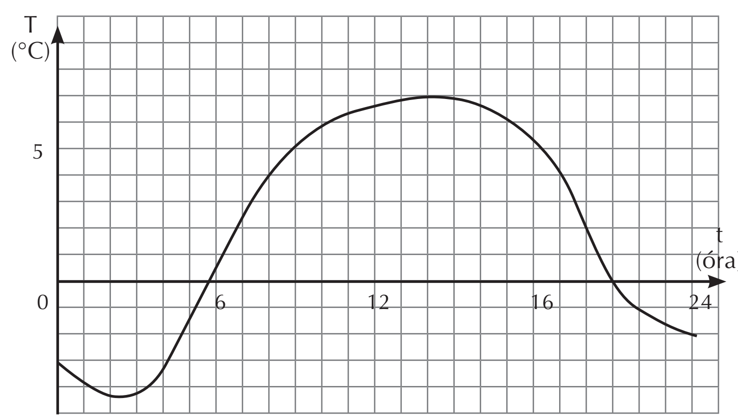
Mit jelent a tejesdobozon látható 1,5%-os, 2,8%-os, 3,6%-os felirat?

A túrós pogácsába szükséges margarin és túrómennyiség aránya 4:5. Mennyi túrót kell felhasználnunk, ha 20 dkg margarint teszünk a tésztába? Van-e egyenes vagy fordított arányosság az alábbi mennyiségpárok között?

– a négyzet oldalának hossza és kerülete,
– a növekedő búza hossza és a növekedés időtartama,
– a 120 cm^2 oldalú négyzet oldalai,
– adott út megtételéhez szükséges idő,
– a vásárolt gyümölcs tömege és ára.

Egy 24 cm magas gyertya egyenletesen égve 4 óra alatt ég le tövig. A gyertya meggyújtása után hány perc múlva lesz a gyertyacsonk 16 cm?

Egy téli napon mért hőmérsékleti értékeket mutatja az alábbi grafikon.



Mikor volt a leghidegebb? Mennyi volt a legmagasabb érték? Mely időszakban csökkent a hőmérséklet?

Csaba kirándult. Az első 3 órán át egyenletesen haladt 4 km/h sebességgel, majd pihent egy félórát. A pihenő után 2 órát ment 3 km/h sebességgel, akkor célba ért. Pihent másfél órát, majd 3 km/h sebességgel pihenés nélkül hazament.

Ábrázold Csaba mozgását derékszögű koordináta-rendszerben! Az ábra alapján válaszolj: Hány kilométert tett meg Csaba? Mennyi ideig volt kirándulni? Hány kilométerre volt az elindulási helyétől az elindulástól számított 9. óra végén?

A vonatkozó elméleti fejezetben ismertetettek szerint azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papírceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészletek, táblázatok, stb. a feladatszöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző lehet, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Mindenképpen szükséges, hogy a tanuló a problémát lefordítsa a saját nyelvére, valamilyen ponton sajátjának érezze, bele tudja magát élni, képzelni az adott szituációba. Gyakran a feladat matematikai tartalma ezáltal leegyszerűsödik, a probléma megoldásának kulcsa éppen ennek a transzformációnak az elvégzése, a megfelelő megoldási modell megtalálása.

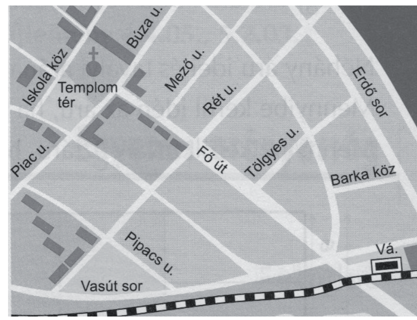
Az emberi test tömegének kb. 65%-a víz. Hány kg vizet tartalmaz egy 80 kg tömegű ember szervezete? És a te szervezeted?

Valóban igaz, hogy a kedvezmény a fagylaltra több mint 25%?

Az osztályban a fiúk és a lányok külön csoportban akadályversenyen vettek részt. A fiúk másfél óra alatt tettek meg két kilométert, a lányok *pedig 2 óra alatt hetet. Melyik csapat nyerte a gyorsasági versenyt a 18 km-es távon?*

Szülői értekezleten édesanyád éppen a te helyeden szeretne ülni. Készíts számára olyan leírást, „térképet”, hogy biztosan megtalálja a helyedet!

Az ábrán egy térkép részlete látható. Ami a térképen 1 cm, az a valóságban 20 000-szer akkora. Milyen távolságban van a templom a vasútállomástól?



Az összetettebb, szokatlanabb feladatokban a tanulók gondolkodását részkérdésekkel, részfeladatokkal irányíthatjuk. A fejlesztés során ez a mód szolgál az egyes problémák részletesebb elemzésére, az összefüggések, kapcsolatok felismerésére, a többféle megoldás megtalálására. Az értékelés során viszont a divergens megoldások gondot okozhatnak, ezért érdemes valamennyire kijelölni a gondolkodás útját.

Egy telefontársaságnál 80 Ft-ért két percig telefonálhatunk. Ha a beszélgetés tovább tart, újabb 80 Ft-ot számláznak ki, és így tovább, minden megkezdett 2 perc után. Hogyan függ a beszélgetés díja a beszélgetés időtartamától? Készíts táblázatot, majd ábrázold a percenkénti költséget diagramon!

Számítsd ki, mennyibe kerül egy 7 perces beszélgetés! És egy 12 perces? Készítsd el a beszélgetés teljes költségét bemutató táblázatot és diagramot!

Egy másik társaság másodperc alapú számlázást végez. Ekkor egy beszélgetés során minden eltelt másodperc után fizetünk 1 forintot. Ennél a társaságnál külön számítanak díjat a hívásokért is, egyenként 30 forintot.
Melyik társaság szolgáltatását érdemes igénybe venni?

Geometria

Konstruálások

A témakör tananyagtartalma: ismerkedés a térelemekkel, azok kölcsönös helyzetével, a párhuzamosság, merőlegesség fogalmával, a téglalap (négyzet), a téglatest (kocka) tulajdonságaival, hálózatával, a sokszögek szemléletes fogalmával, tulajdonságaival, háromszögek, négyszögek tulajdonságaival, osztályozásukkal.

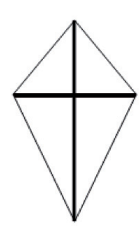
Megismerik a távolság, a szög fogalmát és mérését. Adott tulajdonságú pontok keresése hozza elő a szakaszfelező merőleges, a kör és a gömb fogalmát, szerkesztési feladatok megoldását.

Négyszögek tulajdonságai

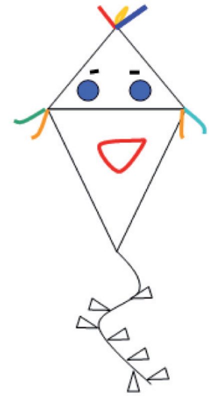
Robi bácsi a gyerekek homokozója mellett egy 3,4 méter x 3,6 méteres oldalhosszúságú, paralelogramma alakú területet falapokkal szeretne beborítani. Erre a célra egybevágó szimmetrikus trapéz alakú hulladék falapokat kapott az utcabeli asztalostól. A trapéz szárai 6 cm hosszúak, a rövidebb alapja 14 cm-es, a hosszabb alapja 6 cm-rel nagyobb. Sikerül-e neki a trapézlapokkal lefedni a paralelogramma alakú részt? Hány ilyen falapra van szüksége?

Az autentikus feladatok ebben a témakörben olyan tevékenységformákat követelnek, amelyekben hangsúlyt kap a tervezés, a folyamat nyomon követése és tudatos ellenőrzése, diszkussziója.

Készíts deltoid alakú papírsárkányt! Szimmetriaátlója 60 cm, a másik átlója 40 cm. Tervezd meg a sárkányodat! Mérd meg, mennyi lécre, mennyi papírra van szükséged! (Az elkészítéshez szükséged lesz ragasztóra, a röptetéshez madzagra is.)



Kifestheted, díszítheted is a kész sárkányt!



Mérések

A hosszúság- és területmérés alapozása az alsó tagozat feladata. Az 5. évfolyamon ismételünk és az eddig szerzett ismereteket kiegészítjük a téglalap és négyzet területképletének, illetve a téglatest és a kocka térfogatképletének megfogalmazásával.

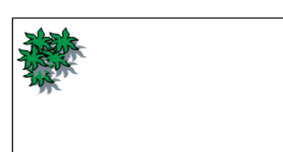
A hosszúság mérésével kapcsolatos feladatok között a realisztikus feladatok a tanulók saját tapasztalatait, esetleg alkalmi mérőeszközöket felhasználó gondolatmeneteket kérnek.

TÉGLALAP KERÜLETE, TERÜLETE

Nagymama a téglalap alakú konyhakert felébe sárgarépát, ¼ részébe retket, a maradék területre spenótot veteményez. A konyhakert egyik oldala 5 m, a másik oldala 8 m.

Számítsd ki, hány m^2 területet foglal el a spenót a konyhakertből!

Buksi kutya miatt a konyhakertet körbe kell keríteni alacsony kis kerítéssel.
Hány méter hosszú kerítés kell?



TÉGLATEST TÉRFOGATA, MÉRTÉKVÁLTÁS

A teraszunkon 6 téglatest alakú virágláda van.
Méretük: 100 cm x 30 cm x 40 cm.

Hány m^3 virágföldre van szükségünk, ha minden ládát színültig töltünk?

A virágföldet erős műanyag zsákokban árulják. Mi 50 literes zsákokban vettünk földet.
Hány zsákra van szükségünk a ládák megtöltéséhez?

Térfogatszámítás, mértékegységváltás

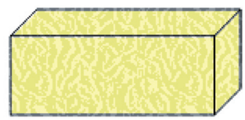
2010. április 20-án felrobbant egy brit tengeri olajfúró állomás kitermelő kútja a Mexikói-öbölben. Egy hét alatt 795 ezer liter nyersolaj ömlött a tengerbe. A szétterülő olaj kb. 5000 km^2 felületet borított be. Ez a baleset súlyosan károsítja a környezetet.

Számold ki, hogy milyen vastagságú az olajfolt, ha a beborított területet téglalap alakúnak képzeljük?

A gyermekek mindennapi élethelyzeteihez kapcsolódó feladatokban itt elsősorban téglatestekkel, téglalapokkal kapcsolatos, aktív tanulói tevékenységet feltételező feladatok jelennek meg.

Az iskolában minden gyereknek van egy cipősdoboza, abban tárolja a rajzórára, matematikaórára szükséges eszközöket (festéket, ecseteket, tálkákat, törlőrongyokat, vonalzót, körzőt). A dobozokat egymásra kell rakni, hogy elférjenek a polcon. Klári kitalálta, hogy mindenki ragasszsza be a dobozát tapétával, mert úgy sokkal szebbben mutatnak a polcon. Attila vállalta, hogy megvásárolja a szükséges anyagot. A tapétát 10,05 méteres tekercsben árulják, szélessége 0,53 m.

A számítás előtt becsüld meg, hogy elég lesz-e minden dobozra ennyi tapéta, ha az osztályba 24 gyerek jár?
Egy cipősdoboz mérete: 10 cm x 20 cm x 30 cm.



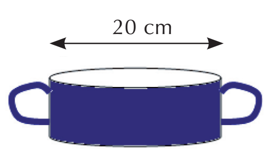
Az iskolai mosdóban elromlott egy csap. A gyerekek megmérték, hogy 1 perc alatt mennyi víz megy kárba. 60 csepp vizet gyűjtöttek egy mérőedénybe 1 perc alatt. A kicsöpögött víz űrtartalma 13 ml volt.

Számítsd ki, hány liter víz csöpög el 1 óra alatt, 1 nap alatt, 30 nap alatt! Becsüld meg, hányszor lehetne annyi vízzel zuhanyozni, amennyi 30 nap alatt kárba vész! Számítsd is ki! (Egy zuhanyozással kb. 75 l vizet fogyasztunk el.)

A feladat által diagnosztizálható tudás- és készségelemek: egyenes arányosság, mértékváltások (idő, űrtartalom egységei), számolási készség (szorzás, osztás), becslőképesség.

Keverj szét 1 milliliternyi étolajban egy kis pirospaprikát! Tölts tele vízzel egy 20 cm átmérőjű lábast! Öntsd a megfestett olajat a víz tetejére, és figyeld az olajfolt terjedését! (A 20 cm átmérőjű lábas vízfelülete kb. 314 cm^2.)

Számítsd ki, hogy milyen vastag rétegben fedi be a víz tetejét az 1 ml olaj!



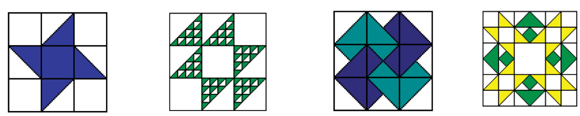
Transzformációk

Az egybevágósági transzformációk közül a tengelyes tükrözést és a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat (háromszögek, négyszögek) és szerkesztésüket kell a tanulóknak ismerniük.

Feladatokban előkerül a nagyítás, kicsinyítés, illetve konkrét feladatokban a hasonlóság aránya.

Tengelyes szimmetria

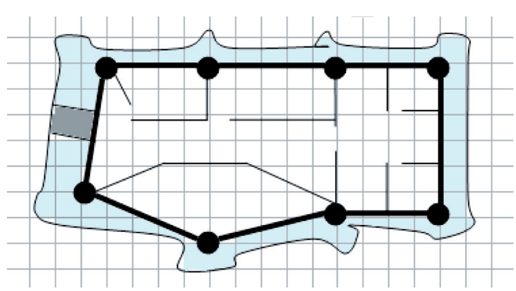
Zsóka néni kedvenc hobbija a foltvarrás. Karácsonyra mindenkinek készített egy párnát, amit foltvarrással díszített. Válaszd ki a tengelyesen szimmetrikus mintákat! Rajzold be a szimmetriatengelyeket!



Kicsinyítés, arány, terület

A rajz egy vizesárokkal körülvett középkori vár kicsinyített alaprajzát mutatja. Egy négyzetoldal a valóságban 10 méternek felel meg.

Hány négyzetméter alapterületű lehetett körülbelül a vár? Számítsd ki!



Tervezz négyzetrácsos papírra tengelyesen szimmetrikus és tengelyesen nem szimmetrikus mintákat!

Hasonlóság, nagyítás, kicsinyítés, arány
Az interneten olvastam, hogy Jakabszálláson fel akarják építeni Magyarország kicsinyített mását. Magyarkertnek fogják elnevezni, és 93 ezer négyzetmétert foglal el. Ez nagyjából 13 focipályányi földterület.

Nézz utána, hogy mennyi Magyarország területe!
Számítsd ki, hogy hányszor kisebb Magyarkert területe Magyarország területénél!

Az 1–4. évfolyamokon még külön geometriai részterületként szereplő tájékozódás területet itt sem emeljük ki. Egy olyan mintafeladatot mutatunk, amely ugyan egyrészről az alsó tagozatos, tájékozódással kapcsolatos értékelési követelmények kiterjesztéseként is fölfogható, másrészről viszont a függvények, relációk témakörben az adatpárok autentikus fölhasználásának követelményéhez is sorolható.

Számozzátok meg az osztályteremben a sorokat és az oszlopokat! Így minden székhez tartozik egy számpár, amelyben az első szám a sort, a második az oszlopot jelöli.
Te hol ülsz?
Hol ül a padszomszédod?
Ki ül a (4; 4) széken?
Írd le a fiúk jelzőszámait!
Írd le a második oszlopban ülő lányok jelzőszámait!
Írd le a barna hajú gyerekek jelzőszámait!
Írd le a kék szemű gyerekek jelzőszámait!

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

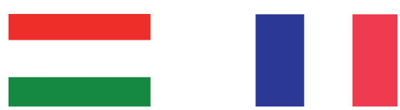
A realisztikus feladatok típusának legfőbb jellemzője, hogy a feladatmegoldás folyamatában releváns szerephez jutnak a hétköznapi életből merített tapasztalatok, esetenként konkrét ismeretek, amelyekkel az egyébként adathiányos feladat kiegészítendő. Ahogyan a bevezető elméleti fejezetben kifejtettük, egy feladat önmagában nem tekinthető sem realisztikusnak, sem pedig nem realisztikusnak; a hétköznapi tapasztalat felhasználásának jellege ugyanis egyénektől és adott történelmi-kulturális kontextustól is függ. Bizonyos feladatok esetében azonban valószínűsíthető, hogy a megfelelő megoldáshoz legalább a feladatmegoldás egy pontján (tervezés, végrehajtás vagy ellenőrzés fázisában) szükséges a hétköznapi ismeretek és tapasztalatok aktív felhasználása. Megszokott rutinfeladatokból kiindulva például úgy juthatunk realisztikus feladatokhoz, ha a szereplőkhöz, tevékenységekhez olyan jellemzőket kapcsolunk, amelyek hatással vannak a megoldás során figyelembe veendő lehetőségekre.

A tantárgyi tudás követelményei között bemutatott tipikus rutinfeladat például a következő módon alakítható át realisztikus feladattá:

Anna, Béla és Cili testvérek. Szüleik mindennap kétféle házimunkát bíznak rájuk: levinni a szemetest és meglocsolni a virágokat. Készíts egy tervet, amely a három testvér között igazságosan megosztaná a házimunkát! Hány nap múlva kerülne sorra ismét ugyanaz a két testvér, ugyanazzal a házimunkával?

Megszokott típusfeladat a kombinatorika körében a zászlók és térképek lehetséges színezéseinek összeszámlálását kérő feladatok.

Trikolórnak nevezzük az olyan zászlót, amely három, különböző színű sávból áll, mint például a magyar vagy a francia zászló.



A sávok lehetnek vízszintesek vagy függőlegesek. A piros, fehér és kék színek felhasználásával hányféle trikolórt készíthetünk? Melyek ezek közül valódi nemzeti lobogók?

A realisztikus feladatok között egy jellegzetes osztályt képeznek a skatulyaelv alkalmazásával megoldható problémák. Ebben a korosztályban a tanulóktól nem várjuk el általánosságban a skatulyaelv ismeretét, ugyanakkor ismerős, egyszerűen modellezhető dolgok esetén elvárható a sikeres feladatmegoldás. Az alapelv intuitív kialakításánál a kisebb számosságok felől haladhatunk a milliós számkörökig.

Az osztályban hét fiú van, és sorban egymás után mindegyikük dobott egyet a dobókockával. Igaz-e, hogy lesznek legalább ketten közöttük, akik ugyanazt a számot dobták?

Az egyik osztályban 20 tanuló van. Honnan tudjuk biztosan, hogy vannak köztük olyanok, akik ugyanabban a hónapban születtek?

A kislabdadobás eredményeit méterre kerekítve írja föl a testnevelő tanár. Miért lehetünk biztosak abban, hogy az iskola 200 felső tagozatos tanulója között vannak, akiknek egyforma eredményük született a kislabdadobásban?

A leíró statisztika témaköréhez kapcsolódóan is számtalan lehetőségünk van a tanulók hétköznapi tapasztalataihoz köthető matematikai modell keresésére.

Az autenticitás értelmezésében a bevezető fejezetben ismertetett elvi állásfoglalást követjük: azt a matematikai (szöveges) feladatot tekintjük autentikusnak, amely a tanuló számára valódinak tekinthető, életszerű feladathelyzetet ír le. A feladathelyzet valódiságának szemléltetése gyakran azt kívánja, hogy az egyéni, papír-ceruza alapú értékelési metodológián túli feladatkontextus jöjjön létre: hétköznapi tárgyak, szövegrészletek, táblázatok stb. a feladatszöveg mellékletének tekinthetők, és gyakran csoportmunkában történik a feladatmegoldás. A papír-ceruza értékelési módszer vagy akár az egyénre szabott on-line diagnosztikus értékelési módszer alkalmazása esetén az autentikus feladatok külsődleges jellemzője a hosszabb, tipográfiailag gyakran változatos vagy újszerű feladatszöveg, belső, problémamegoldási szempontból pedig gyakori jellemző az intranszparencia, vagyis az azonnal alkalmazható és megoldáshoz vezető eljárás hiánya. A feladat autentikus jellege egy adott történelmi-társadalmi környezetben, egy adott életkori kohorszba tartozó tanulók többségét szem előtt tartva határozható meg. Elképzelhető, hogy egyes tanulók számára (vagy éppen más történelmi-kulturális helyzetben) egy autentikus feladat rutinfeladattá válik, sőt az is előfordulhat, hogy egyes tanulók vagy valamely történelmi-társadalmi kontextus szempontjából egy autentikus feladat nem minősülne matematikai feladatnak, hanem pl. a kritikai gondolkodás vagy valamilyen műveltségeszmény értékeléséhez kapcsolódna.

Az autentikus feladatok esetében egy praktikus jellemző, hogy a feladat megoldása tanulói kezdeményezést, tanulói problémafelvetést feltételez. Úgy is fogalmazhatunk, hogy gyakran a tanuló feladata az, hogy létrehozzon egy olyan matematikai feladatot az adott problématérben, amely a matematikai tudás alacsonyabb szintű alkalmazását igényli.

A kombinatorika területén az autentikus feladatok annak felismerését várják a tanulótól, hogy egy adott hétköznapi probléma a lehetséges esetek összeszámlálása révén oldható meg. Jellegzetes kérdéstípus lehet a „Hányféleképpen választhatok?” kezdetű problémasereg.

A korábban bemutatott egyik realisztikus feladat autentikus változata a következőképpen nézhet ki:

Anna, Béla és Cili testvérek. Szüleik minden nap kétféle házimunkát bíznak rájuk: levinni a szemetest és meglocsolni a virágokat. Készíts egy tervet, amely a három testvér között igazságosan megosztaná a házimunkát! Milyen további adatokat gyűjtenél össze a testvérekre és a házimunkákra vonatkozóan, amely alapján a legmegfelelőbb munkabeosztás készíthető? (Pl. életkor, a házimunka nehézsége vagy időtartama.)

A valószínűségszámítás területén az autentikus feladatok a tanulók hétköznapi élményeihez köthető tevékenységek leírását tartalmazzák: sorsolás, pénzfeldobás, sportjátékok, kártyajátékok. Jellegzetes autentikusfeladat-típus lehet a „Mikor van nagyobb esélyem?” kérdésfeltevésre épülő problémasereg. A valószínűségszámításhoz köthető autentikus feladatoknál gyakran nyelvi-logikai vagy játékelméleti megfontolások vezetnek el a megoldáshoz.

Karcsi és Peti olyan céltáblára dobálják a gumilabdát, amelynek a közepén egy 20 centiméter oldalú négyzet van. Ez a négyzet éppen a közepén van egy másik, 30 centiméter oldalú négyzetnek, aminek a belső négyzeten kívül eső része a céltábla külső részének számít. Készíts rajzot erről a különös céltábláról! Az egyik versenyzőnek a céltábla belső négyzetét, a másiknak a céltábla külső részét kell eltalálnia. Karcsi választhat, hogy a céltábla melyik része az övé.
Mit javasolsz neki?

A tanulói válasznak tartalmaznia kell az eseményekhez tartozó területszámítási adatokat (ezek szerint a külső rész a nagyobb). A feladat autenticitása megengedi ugyanakkor, hogy további kérdéseket tegyenek föl: hogyan történik a találatok összeszámlálása – jár-e pontlevonás, ha rossz területrészen landol a labda? Igaz-e, hogy ha valaki megpróbál eltalálni egy bizonyos pontot, akkor a dobásai várhatóan a ponthoz közelebb gyakrabban fordulnak majd elő, mint a ponttól távolabb?

A statisztika területén az autentikus feladatok azt várják el a tanulóktól, hogy képesek legyenek megtervezni és kivitelezni valamilyen adatgyűjtési folyamatot. Legyenek képesek kérdéseket megfogalmazni valamilyen tulajdonság adatairól, ábrázolni az adatokat megfelelő ábrázolási módszerrel: oszlop-, kör- vagy pontdiagramon.

Az amerikai NCTM standardok ötlete alapján fontoljuk meg a következő feladatot:

Hasonlítsd össze, hogy melyik papírrepülő repül messzebbre: az, amelyiket puha fénymásolópapírból készítesz, vagy az, amelyiket ugyanolyan méretű kemény kartonpapírból! Mindkét repülőt ugyanazzal a hajtogatási technikával készítsd!

Ez a feladat az adatgyűjtési folyamat megtervezését igényli. Hány dobást végezzünk, hogy megalapozott eredményhez jussunk? Hol végezzük a kísérletet? Milyen mérőeszközzel és milyen pontossággal mérjük a távolságokat? Hogyan ábrázoljuk az adatokat? Mi alapján hozzunk döntést és adjunk választ a kérdésre?
Látható, hogy az autentikus feladatok jellemzői közül (önálló feladatkitűzés, hétköznapi tevékenységben gyökerező matematikai modellalkotás, több lehetséges kimenet, kooperatív matematikai tevékenység) lényegében mindet felöleli az iménti feladat. Megjegyzendő, hogy az ilyen feladatok időigényesek, átlagos körülmények között a fél tanítási órát igénybe vehetik. Ugyanakkor sok jel mutat arra, hogy amit a vámon vesztünk, azt a réven megnyerhetjük: az időigényes autentikus feladatok elsősorban a drill ízű gyakorlófeladatoktól vehetik el az erőforrásokat.

A matematikatudás tartalmi területei a diagnosztikus értékelés szempontjából

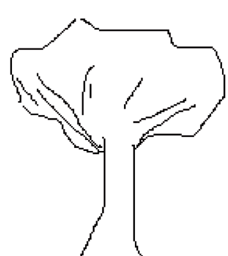
Az 1–2. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Számok

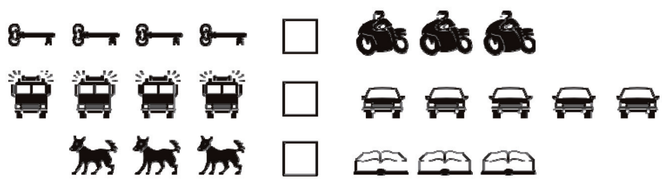
A számfogalom kialakulása szoros kapcsolatban áll az „ugyanannyi” relációval. Elsősorban a párosítással kapcsolatos változatos tevékenységek – illeszkedve tárgyakhoz, képekhez, rajzokhoz, szavakhoz − segítik a több, kevesebb, ugyanannyi fogalmak értését és a megfelelő szimbólumok (<; >; =) meg- és felismerését, helyes tartalommal való feltöltését. A sokféle tevékenység kapcsán fokozatosan meggyőződnek a diákok arról, ha két csoportban, halmazban ugyanannyi elem van, akkor azok számossága megegyezik, azaz – ugyanaz a szám jellemzi őket, ugyanaz a szám kapcsolódik hozzájuk – a bennük szereplő tárgyak, dolgok, élőlények, stb. *száma ugyanannyi darab.* Ezen kapcsolat, összetartozás biztos értése, tudása a helyes számfogalom kialakulásának feltétele.

Rajzolj a fa alá 3 almát és 2 körtét!



A következő feladatban a darabszámok összehasonlítása van a középpontban. A tárgyakat megszámlálhatja, párba rendezheti, csoportosíthatja a tanuló. Fontos a sok-sok konkrét tapasztalat biztosítása, a számjelek képekhez való kapcsolása, a számkártyák használata. A számok (számszimbólumok) írása később kezdődhet.

Feladat: A kis négyzetek melyik oldalán látsz több tárgyat? Ha döntöttél, írd a négyzetekbe a megfelelő jelet (<; >;=)!



Feladat: Melyik szám a nagyobb? Tedd ki a < vagy > jelet a számok közé!

a) 8 – 2 9 – 1

b) 8 – 1 5 + 0

A számfogalom kialakítását a mérőszámokkal való tapasztalati ismerkedés is segíti. Az első-második évfolyamon – folytatva az óvodai előkészítést − okosan megtervezett és irányított játékok sokaságának (pl. kockákkal való térkitöltés, kancsó vízzel, homokkal, babbal, búzával, borsóval való kitöltése pohár segítségével, összeöntögetések) eredménye, hogy képessé válnak a tanulók viszonyításokra (például több, kevesebb, hányszor akkora), és a darabszám mellett a mérőszám helyes használatára. Olyan tapasztalatok tudatosulnak, mint például: (1) ugyanazon kancsó megtöltéséhez kisebb pohárral többször, nagyobb pohárral kevesebbszer kell tölteni; (2) ugyanazt a hosszúságot nagyobb egységből kevesebb darabbal, kisebb egységből több darabbal tudom kirakni; (3) ugyanazon egységeket használva a mérlegen a nehezebb tárgyakat több, a könnyebb tárgyakat kevesebb egységgel tudom kiegyensúlyozni. Ezen mérésekhez az egységet szabadon választhatjuk, és a hivatalos mértékegységeket is választhatjuk anélkül, hogy ismeretüket megkövetelnénk.

A konkrét tömegek összehasonlítása során alkalmazzuk a hagyományos kétkarú mérleget, mely az egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket kitűnően szemlélteti. (Ez a tapasztalat olyan élményeket, emlékeket hagy a gyerekekben, melyre később, a mérlegelv tanítása során is építhetünk.)

A méréseknél a változatos egységválasztás (pl. a színes rudak használata) segíti a számfogalom általánosabb, biztosabb alapjának kialakítását.

A sokféle mérési tapasztalat hozzájárul az arányos változások gondolatának előkészítéséhez.

A gyerekek gyakran rendezik sorba játékaikat. A figurák sorrendje, sorszáma változhat. Ez a mozzanat magában hordozza annak a tudatosulását, hogy a sorszám nem rögzül egy adott figurához, hanem attól függ, hogy a figurákat hogyan sorakoztatjuk fel, és honnan kezdjük a megszámozásukat. Megtapasztaljuk, hogy a figurák száma attól nem változik, hogy milyen sorrendbe állítjuk vagy melyik irányból kezdjük megszámlálni azokat. Adott számú figura sokféle konkrét sorrendezése, a figurák helyének változtatása, az első, második, harmadik… kifejezések gyakori ismétlése hozzájárul a sorszám fogalmának helyes kialakulásához, valamint a szám, sorszám fogalmak különbözőségének megértéséhez, támogatja a számegyenes fogalmának előkészítését is (pl. sorszámok növekedésének, csökkenésének iránya, számszomszédok megkeresése).

A számfogalom fejlettségének értékelése külső szakemberek által megfigyelhető jellemzők, tulajdonságok tesztelésével történik. A fejlesztő értékelés alapfeltétele, hogy ismerjük a megfelelő szintű tudás kialakulásának, és ebből következően a fejlődési nehézségek diagnosztizálásának lehetőségeit, folyamatát.

Az első évfolyam végéig legalább 20-ig, a második évfolyam végéig legalább 100-ig meg kell ismerni a diákoknak a természetes számokat. Ez azt jelenti, hogy ebben a számkörben ki kell alakítani a biztos számfogalmat, meg kell ismerni, és jól kell alkalmazni az olvasás-írás folyamán a számszimbólumokat. A követelmények sora folytatódik: számszomszédok, páros vagy páratlan a szám, nagyság szerinti rendezés, egymáshoz viszonyított helyzetük (számegyenes), bontásuk többféleképpen (pl. tízesek és egyesek összegére), kerekítés tízesekre (készpénzes vásárláskor a forint alapú fizetés során 5-re vagy 10-re).

Néhány példafeladat a számfogalom fejlettségének diagnosztikus értékelésére:

Húzd át az ábrán a számjegyeket!

6 Z 9 F
4 12
M 3
7 ?

Húzd át az ábrán a számjegyeket!

6 Z 9 F

\+ p 12

= M B 3

A negatív számok (találkozás irányított mennyiségekkel, pl. melegebb-hidegebb; 8 óra előtt, után, tőlem jobbra, balra; stb.), a törtszámok (egész egyenlő részekre darabolása, hajtogatása, stb.) tapasztalati megközelítésére vonatkozó tevékenységek is szerepelnek már ezen a két évfolyamon.

A nulla nemcsak mint szimbólum jelent nehézséget a kisiskolásoknak, hanem a nullának mint számnak a kezelése is nagy feladat. A nulla számjegy és számnév kitüntetett jelentőségének illusztrálására szolgálnak a következő mintafeladatok:

a) Melyik szám a nagyobb? Karikázd be!

9 – 2 5 + 1

b) Melyik szám a nagyobb? Karikázd be!

9 – 2 6 + 0

E két évfolyamon a különböző tárgyak, és az apróbb-nagyobb rajzos figurák csoportosításával, mely leggyakrabban tízesével történik, a tízes-százas átlépések tudatosításával már elkezdjük a számrendszer és helyiértékrendszer fogalmi előkészítését is. Elvárás az elemi tájékozottság (konkrét számok esetében) a tízes számrendszerben, az egyes és tízes fogalmának ismerete.

Műveletek

A zárójel összekapcsoló szerepét, értelmezését, használatát is konkrét feladatok (egyszerű szöveges feladatok, összeg, különbség elvétele, illetve szorzása) alapján tapasztalják meg a tanulók.

Az első évfolyamon a szóbeli számolási eljárásokat, az összeadás és kivonás elvégzését készségszinten várjuk el a 20-as számkörben, az eredmények ellenőrzésével együtt. A tanult számok két szám összegére való bontása, pótlások, és három tag összeadásának ismerete elsőben a gyakorlottság szintjén elvárás, a második évfolyamon már a 100-as számkörben olyan alapelvárás, mely kiegészül a „kis egyszeregy" biztonságos ismeretével. A „kis egyszeregy" a szorzás és bennfoglalás táblázatát jelenti a százas számkörben.

Míg az első évfolyamon egyfajta gyakorlottságot szereznek a gyerekek a hiányos műveletek, nyitott mondatok kiegészítése, állítások igazságának ellenőrzése területén, addig a második évfolyamon mindezt kiegészítve, már nemcsak igazzá, hanem „nem igazzá" is tesznek akár kétváltozós nyitott mondatokat is. Állításokat fogalmaznak meg, s döntenek azok igazságáról.

Algebra

Az első két évfolyamon bevezetésre kerülő szimbólumokat, azok szóbeli kifejezését és írásbeli jelölését a különböző összefüggésekben, kapcsolatokban (pl. nyitott mondatok) az algebra előkészítését szolgáló elemi szereplőknek foghatjuk fel. Erre mutat példát a következő feladat is.

Válaszd ki a 20-nál kisebb természetes számok közül azokat, melyek igazzá teszik az alábbi nyitott mondatokat!

$13 + \square = 18$	Megoldás: $\square = 5$
$30 + \triangle + \triangle < 40$	Megoldás: $\triangle = 0, 1, 2, 3, 4$

Az ilyen feladatokban ugyanazok a szimbólumok ugyanazokat a számokat jelölik, de különböző szimbólumok nemcsak különböző számokat jelölhetnek.

Például: $\triangle + \square = 6$ *nyitott mondatnak a* $\square = 3$, $\triangle = 3$ *számpár is megoldása.*

Az algebrai szimbólumok iskolai alkalmazásának jelentős terepét jelentik az olyan szöveges feladatok, amelyek egy vagy két számtani művelet elvégzésével megoldhatók, és amelyeknél a feladat megértését elsősorban a felírt nyitott mondat igazolja.

Az első évfolyamon az egyszerűbb szöveges feladatok két adat összeadásával vagy kivonásával megoldhatók. Az ilyen típusú feladatoknál nem fontos az ismeretlenre szimbólumot bevezetni. A szimbólum bevezetésének akkor van jelentősége, ha a feladatban az összeg valamelyik tagja, illetve a kisebbítendő vagy a kivonandó valamelyike az ismeretlen. A szimbólumok jelentéstartalmát már ezen egyszerű feladatoknál is rögzíteni kell szóban vagy írásban.

Már ebben a korban is adhatunk olyan egyszerű szöveges feladatot, melynek körültekintő értelmezésével sok felesleges munkától szabadul meg a diák. Például a következő feladat is ilyen.

Melyik az a szám, amely 17-nél nagyobb, de 13-nál kisebb?

Megoldás: *Nincs ilyen szám.* (Ha a számegyenesen bejelöltetjük a részmegoldásokat, világosan látszik, hogy nincs a két feltételnek egyszerre megfelelő szám.)

Az ilyen típusú feladatok elősegítik, hogy az azonnali műveletkijelölésre vagy válaszadásra törekvés helyett először a feladat megértésére kerüljön sor.

A tanult számjelek, műveleti jelek, relációs jelek, ismeretlent jelölő jelek, majd később a zárójelek segítségével történő lejegyzés, modellalkotás komoly absztrakció a kisdiák számára. A tanulók által felfedezett összefüggéseknek – és azok közlési módszereinek – megvitatása sokrétű gondolkodási folyamatokat segít elő. Egy konkrét képet, szöveget, látványt sok irányból közelíthetünk meg, sokféle gondolatot válthat ki belőlünk, s a gondolataink lenyomata, rögzítése is sokféleképpen lehet jó.

Luci anyák napjára egy csokor mezei virágot adott a mamájának. 15 pitypang virág, és ennél 10-zel több pipacs virág volt benne. Hány virágból állt ez a csokor?

Megoldás: $15 + (15 + 10) = \triangle$, $\triangle = 40$; *A csokorban 40 virág volt.*

(A zárójel itt az összetartozást jelenti, de el is hagyható.)

Fogalmazd meg szavakkal a következő számfeladatot! Írj egy szöveges feladatot is hozzá!

$4 \times (65\ Ft + 35\ Ft) = \triangle\ Ft$

Megoldás például: *A 4 tagú családunk reggelije fejenként egy 65 Ft-os joghurt és egy 35 Ft-os sajttal szórt pogácsa. Mennyibe kerül nálunk egy családi reggeli?*

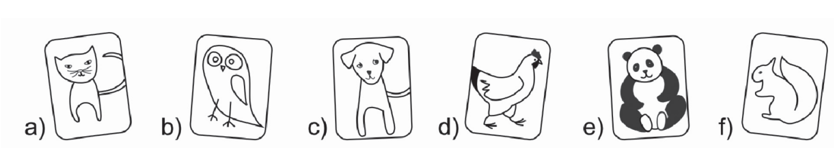
A szöveges feladatok szimbolikus lejegyzése, a különböző konkrét lejegyzésekhez kapcsolódó szövegalkotás, azaz az „oda-vissza út” sokszori és konkrét bejárása mélyíti a fogalmak tartalmának megértését, képessé teszi a tanulókat egyszerű szöveges feladatok matematikai nyelven való megfogalmazására, illetve a matematikai szimbólumokhoz való adekvát, egyszerű szöveg alkotására.

A szöveges feladatok egy jelentős része a nyitott mondatokhoz kapcsolódik. Adott szöveg alapján a nyitott mondat szóbeli megfogalmazása, írásbeli lejegyzése, a benne szereplő ismeretlen(ek) konkretizálása, azaz konkrét elemekkel történő behelyettesítése igazzá vagy hamissá tehetik az így keletkezett állítást. A nyitott mondatok többségének értelmezési tartománya a tanult számhalmaz elemeire korlátozódik, de számos más területről, mondjuk a növény- vagy állatvilágból, mesevilágból is megválaszthatók az alaphalmaz elemei.

A következő feladatban többféle állat képét tartalmazó kártyákat rakunk az asztalra. A kártyákon egy háziállat vagy egy vadállat képe van. A megoldás során a kiválasztott kártyákat tevőlegesen a keretbe kell helyezni, s ezután dönteni kell az állítás igaz voltáról. Ez előrevetíti annak szükségességét, hogy az alaphalmaz minden eleméről el kell dönteni, megoldás-e vagy sem.

Az alábbi kártyák közül válaszd ki azokat, melyek igazzá teszik az állítást!

A   -be tett kártyán háziállat látható.



A számfeladatok megoldása során a zárójel felesleges használatáról, illetve az elhelyezésének az eredményt befolyásoló szerepéről gyűjthetnek tapasztalatot a tanulók. A zárójelek alkalmazásának indokoltságát a szöveges feladatokhoz kapcsolódóan is be kell mutatnunk.

Juli néni mindennap vesz 1 liter tejet 140 Ft-ért és 1 kg kenyeret 160 Ft-ért. Egy hét alatt mennyit költ tejre és kenyérre együtt?

Megoldás: *7×(140 + 160) Ft = 2100 Ft. Juli néni 2100 Ft-ot költ egy hét alatt tejre és kenyérre.*

Kati két éven keresztül egy-egy tábla csokit vett a négy fiú unokatestvérének és a három barátnőjének a születésnapjukra. Ez alatt az idő alatt hány tábla csokit vett, ha csak ezeknek a gyerekeknek vett tábla csokit?

Karikázd be az alábbiak közül a helyes megoldást adó műveletsor betűjelét!
a) 2+4+3 b) 2×(4+3) c) 2×4+3 d) 2×4+2×3 e) (3+4)×2
Megoldás: *b), d), e).*

A válaszok helyességét a műveletsorok végeredményének kiszámításával és az eredmény „kipróbálgatásával” fogják ellenőrizni a gyerekek. Lesznek, akik következtetéssel számolják ki az eredményt, s megkeresik ezen eredményt adó műveletsor(oka)t, és lesznek – valószínűleg kevesebben − a végeredmény ismerete nélkül is a jó megoldást adó műveletsorokat kiválasztó gyerekek.

Az első két évfolyamon váljanak képessé a tanulók állítások megfogalmazására egyszerű tevékenységhez, képhez, rajzhoz kapcsolódóan, tudjanak dönteni azok igazságtartalmáról, legyenek képesek nyitott mondatokat kiegészítéssel igazzá tenni, behelyettesítéssel lezárni.

A feladatmegoldó stratégiák fejlesztéséhez fontos, hogy kétirányú kapcsolat alakuljon ki a feladatban szereplő dolgok és viszonyok, valamint a megoldáshoz vezető matematikai lépések között. Emiatt már 1–2. osztályban képesnek kell lenniük a tanulóknak arra, hogy adott matematikai struktúrához megtalálják a megfelelő szöveges (vagy rajzos) feladatot. E két évfolyam végére tudjanak számfeladatokat, nyitott mondatokat közösen is és önállóan is megfogalmazni sokféle tevékenység és egyszerű szövegek alapján. Mint fentebb láttuk, adott megoldási lehetőségek közül tudják kiválasztani a szöveghez illő(ke)t, és fordítva is, számfeladathoz, nyitott mondathoz tudják a megadott szövegekből a helyeset kiválasztani, illetve egyszerű, világosan fogalmazott szövegeket alkotni.

Válaszd ki a megadott szövegek közül az alábbi nyitott mondathoz illőket!

$$3 + 37 + 28 + \square + \square = 100$$

a) A tanyán élő Bori néni összesen 100 baromfit nevel. Van három kakasa, 37 tyúkja és 28 kacsája és ugyanannyi libája, mint pulykája. Hány libája van Bori néninek?

b) Évike a diófájuk alatt gyűjtögette a termést. Hétfőn 3 szem diót, kedden 37 szem diót, szerdán 28 szem diót, csütörtökön és pénteken ugyanannyi szem diót, szombaton egész nap 100 szem diót gyűjtött. Vasárnap nem dolgozott, csak megszámolta a szemeket. Hány szem diót gyűjtött a héten?

c) Kati néni az unokája szülinapi bulijára ötféle süteményt sütött. Zserbót, hókiflit, csokis golyókat, meggyes pitét és almás rétest. Mindenből 50 darabot vagy 50 szeletet vitt a bulira. A buli végén megszámolta a maradék süteményeket, és így szólt: Éppen 100 sütemény maradt. Úgy látom a csokis golyónak volt a legnagyobb sikere, csak 3 darab maradt belőle. Egyformán fogyott a pite és a rétes. Legkevésbé a hókiflit szerették, 37 darabot hagytak meg belőle, és 28 szeletet nem ettek meg a zserbóból sem. Hány szelet meggyes pite maradt meg?

Megoldás: *A b) szöveg nincs összhangban a nyitott mondattal.*

A 2. osztály végére a tanulók tudják, hogy a szöveges feladatok megoldásának az első és legfontosabb lépése a megértés. A megértést elősegíti a lejátszás, megjelenítés, ábrázolás, szükség esetén az értelmes átfogalmazás; a megértést követi a lejegyzés számfeladattal vagy nyitott mondattal, sorozattal, táblázattal, ezután jöhet a számolás, szabálykeresés, majd az ellenőrzés, az eredeti problémára való vonatkoztatás, majd az összevetés az adatokkal, valósággal, előzetes becsléssel, végül a válasz megfogalmazása, lejegyzése. Az értékelés során a szöveges feladatok megoldásának lépéseit önállóan értékelhető feladategységekre bontjuk, ezzel lehetővé tesszük, hogy esetleges számolási hibák ne tegyék értéktelenné a feladatmegoldás további, elvileg helyes lépéseit.

Relációk, függvények

1–2. osztályos korban a következő fejlesztési feladatok és értékelési követelmények jelentkeznek a témakör fogalmi bázisával kapcsolatban: sorozatok folytatása és szabálykeresés tárgyakból, rajzos jelekből álló sorozatok esetén. A tanulóknak képesnek kell lenniük adott szabály alapján sorozatokat generálni. A sorozatokat meghatározó szabályszerűséget tudniuk kell szóban is megfogalmazni.

Adatpárok és adathármasok közötti összefüggések területén 1–2. osztály végére a következő követelmények fogalmazhatók meg. A tanulók legyenek képesek két halmaz összetartozó tagjai között a kapcsolatot felismerni, és a felismert szabály alapján a hozzárendelést megvalósítani. A környezetükből ismert tárgyak, személyek, szavak és számok egyaránt szerepelhetnek a kapcsolatba hozandó halmazok elemei között. Legyenek képesek a számok és mennyiségek közötti kapcsolatokat nyíllal jelölni. Legyenek képesek az összetartozó számpárokat táblázatba rendezni, a táblázatba rendezett számpárok esetén pedig („gépjáték”) a szabályt felismerni és folytatni. Ebben a korosztályban a számpárok közötti összefüggéseket jelölő szabály egyszerű, lineáris összefüggést kifejező szabály lehet, vagy pedig a számjegyek összegével, a számok alaki tulajdonságaival kapcsolatos. Legyenek képesek az összetartozó adatpárral megadott konkrét pontok ábrázolására a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

A számhármasok közötti összefüggések legtipikusabb eseteiben alapműveleti számolásban szereplő számokról és a műveletvégzés eredményéről van szó. Például egy elvégzett kivonás műveletben három számadat szerepel, amelyek helye a műveleti jelekhez képest nem felcserélhető. Az így összetartozó számhármasokat gépjátékszerű táblázatba rendezhetjük.

A relációk és függvények témakör jellemző feladattípusai között találjuk 1–2. osztályban a sorozatok folytatását, kiegészítését, amelyhez a szabály megállapítása társul.

A sorozatok elemei lehetnek

– egyszerű geometriai alakzatok, pl. □◆❍□◆❍□◆…

– számok, pl. 1 3 5 7 …

– különböző tartalmi területekről származó szimbólumok,

pl. a á b …

Második osztály végére a tanulóknak képesnek kell lenniük felismerni a hányadossorozat szabályát is a 100-as számkör szorzótábláján belül.

Az adatpárok közötti összefüggésekre épülő feladatok jellemző formája a táblázatos elrendezés, ahol a szabály felismerését követően a táblázat folytatását várjuk el. Hasonlóan a sorozatokhoz, az adatpárok is lehetnek matematikai tartalmúak vagy más szimbólumrendszerekhez kötöttek, a matematikai tartalmon belül pedig jellemzően geometriai és számtani jelenségek fordulnak elő. Megjegyezzük, hogy a szövegesfeladat-jelleg itt is elsősorban abból adódik, hogy a feladatokban megfigyelhető szabályok megfogalmazása szóbeli körülírást igényel.

Folytasd a táblázat kitöltését!

□	❍	◇	▢	
■	●	◆		◗

5	11	3	4	14
3	9	1		

g	t		c	
gy	ty	ly	cs	zs

Az adatpárok táblázatos elrendezésében 2. osztály végére meg kell jelennie olyan szimbólumoknak, amelyek egy-egy adatsort jeleznek (pl. az egyik adatsor jele △, a másiké pedig □), és a szabályt az absztrakt jelek segítségével kell megfogalmazni.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Mit kell tennünk a △ sorában lévő számokkal, hogy megkapjuk a □ sorában az alattuk lévő számot?

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A △ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a □ sorában lévő számot.” Vagy: „A △ sorában lévő szám kétszeresét veszem, majd ehhez 2-t hozzáadva megkapom a □ sorában lévő számot.”

Geometria

Az 1–2. évfolyamon a geometria tanításának legfőbb eszköze a cselekvő tevékenység. A változatos tevékenységek során megszerzett tapasztalatok, ismeretek megalapozzák az alsó tagozat, de a későbbi évek fogalmi építkezését is. Ebben az életkorban nyilvánvaló a térbeli alakzatokkal való tevékenykedés elsőbbsége, hiszen a kézbefogás, megtapogatás, egyáltalán a kézzel történő érzékelés a környező világgal való ismerkedés első élményei közé tartozik. Ennek okán a geometriai követelmények egyik pillérét képező konstruálások a háromdimenziós (térbeli) formákkal kezdődnek. Az óvodáskorú gyermek a játékai közül már ki tudja választani azt, amelyre rákérdezünk az általa sokszor hallott és megszokott szavakkal (pl. Add ide nekem a piros kockát!). A szavak, nevek ilyenkor még a konkrét tárgyhoz szorosan kötődő asszociációként működnek; a kocka fogalma mint absztrahált fogalom csak tudatos iskolai fejlesztés eredményeként jön létre. A fejlesztés lényege – különösen az alsó tagozaton – az aktív és tudatos tevékenykedés, a konkrét cselekvésekhez kötődő felfedeztetés, a fogalmak (és szavak) következetes használata. Az óvodából érkező gyermekek jogos igénye, elvárása a játék. Az életkori sajátosságokat, a pszichológiai fejlődést, a mentális fejlődést figyelembe vevő tankönyvek mindegyike kínál olyan játékos tevékenységeket, apróbb versenyeket, humoros feladványokat, amelyek az egészséges fejlesztéshez elengedhetetlenek.

A geometriához kapcsolódó követelményeket lényegében négy nagy csoportba rendezhetjük: konstruálások, transzformációk, tájékozódás és mérés.

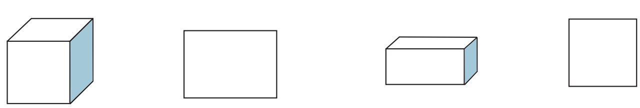
Konstruálások

A geometria e részterületének középpontjában térbeli, síkbeli alkotások, s ezek tulajdonságainak vizsgálata áll.

Elsősorban a szabadon, majd bizonyos feltételekhez kötődő alkotások, alakzatok formai tulajdonságait vizsgáljuk, megalapozzuk az erre épülő fogalmak kialakulását. A változatos, manipulatív szintű cselekvő tevékenységek sorozata − vágások, hajtogatások, ragasztások, áttetsző papírra történő másolások, színezések, kirakások, rajzolások, kockákból való építés újabb kockák hozzátevéssel, elvételével − az elkészült alakzatok tulajdonságainak meg- és felismerése. Azonosságokat és különbözőségeket vesznek észre, ezeket a gyermeki szókinccsel szavakba öntik. A tanulók képessé válnak alakzatok azonosítására, megkülönböztetésére az alakzatok képe, illetve geometriai tulajdonságai alapján; képesek az alakzatok szétválogatására − egyszerű, konkrét feltételt megadva − a geometriai tulajdonságok alapján.

Felismerik összkép alapján a kockát, téglatestet, négyzetet, téglalapot. Fokozatosan fejlődik a geometriai szimbólumrendszer tartalommal való megtöltése, az összefüggések megértése.

Nevezd meg a képeken látható alakzatokat!



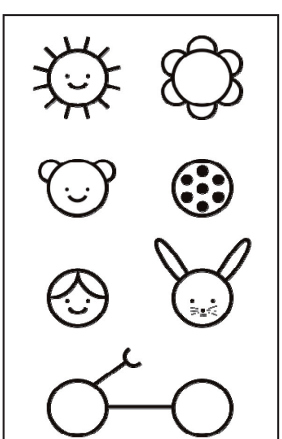
……………………………………………………………………………

Általában a második évfolyamon kerül sor a testek és síkidomok (itt kiemeltebb szerep jut a négyzeteknek, téglalapoknak) jellemzőinek alaposabb vizsgálatára, ahol a görbe vonal, egyenes vonal, bezáródó (zárt) vonal, csúcs, lap és él fogalmak értő használata, sőt adott esetben számszerű meghatározása segít az alakzatok jellemzésében. Az alakzatok alapos megfigyelését követően, egyszerűbb esetekben, megadott alaprajzokra különböző testeket építhetünk, s a jól készített árnyképekből (vetületekből) megpróbálhatunk alakzatokat rekonstruálni.

1. Tegyétek külön csoportba az előttetek lévő kártyák közül azokat, amelyeken kört láttok!
2. Rakjátok külön csoportba a betűkártyák közül azokat, melyeken a betűk csak egyenes vonalakból állnak!
3. Vegyétek elő a színes rudakat tartalmazó dobozt. Tegyétek a padon középre a piros rudat, alája a nála kisebbeket! (Mivel a doboz minden színből több rudat tartalmazhat, adhatunk még egy utasítást: „Elég egy színből csak egy darab rudat kirakni.")
4. Építsetek a színes rudak felhasználásával díszes kerítést! Egy négytornyú várat! Stb.
5. Építsétek meg ti is az asztalon látható testet színes rudakból! (Kocka, téglatest vagy ezekből épített egyszerű alakzatokat rakjunk ki először.)

Válasszunk olyan feladatokat is, melyek vidám, játékos hangulatot teremthetnek, de sokféle fejlesztést szolgálnak.

1. A lapon látható nagy kört egészítsétek ki szabadon úgy, hogy egy nyuszifejet lássunk! Színezzétek is ki! (A szemmel történő ellenőrzést követően megdicsérjük az ötleteket.)
2. A kört csak háromszögekkel egészíthetitek ki úgy, hogy a végén egy cicafejet lássunk.
3. Az előttetek lévő lapon köröket láttok. Egészítsétek ki a körök mindegyikét szabadon!



A munka végén tűzzük a nagy táblára a rajzokat, és beszéljünk azokról:

– Mi a közös, mi a különböző a rajzokon?
– Hány képen van állatfigura?
– Ki mit rajzolt az első sor második körére? És a harmadik sor első körére?
– Tegyenek fel kérdéseket a kis kiállítással kapcsolatban.
– Mondjanak igaz és hamis állításokat, véleményt a rajzokról.
– Melyek tetszenek a legjobban? Miért?
– Próbálják kitalálni, hogy melyik rajz mit ábrázol.

A fentihez hasonló tevékenységek, konstruálások, megfigyelések képessé teszik a tanulókat arra, hogy ők is megfogalmazzanak rövid szöveges feladatokat, értelmes kérdéseket. Akár ugyanazt a geometriai tartalmat többféle „szövegruhába” is öltöztethetik.

Jól szervezett munkával egyszerre több területen is fejlődnek a gyerekek. Előfordulhat azonban, hogy nincs párhuzamban az értelmi és verbális képességük fejlődése. Azt gondolhatjuk, azért nem válaszol a gyermek, mert nem tudja a választ, pedig csak nem elég gyors a fogalmazásban, nem elég bő a szókincse, nem találja a megfelelő szavakat a válaszhoz. A matematika és ezen belül a geometria szöveges feladatai – legyenek azok akár csak néhány szóval kifejezhető gondolatok – hatékony eszközei az értő, értelmező olvasás, a szövegértés, szövegalkotás fejlesztésének.

A megfelelő önbizalom és a fejlesztő nyelvi környezet kialakításával képessé válnak a gyerekek a matematikai szókincs helyes alkalmazására, a pontos és választékos szóbeli megfogalmazásokra.

Készítsd el az alábbi két építményt a színesrúd-készlet fehér kiskockáiból vagy akár kockacukrokból! Alaprajzukat itt láthatod.

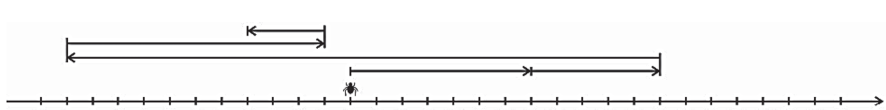
3	2	1
2	2	1
1	1	1

1	2	3
	2	3
		3

A számok azt mutatják, hogy hány kiskockát kell egymás tetejére tenni.

A következő feladathoz szükséges eszköz: egy számegyenes, melyen 0-tól 30-ig jelölve vannak az egészek.

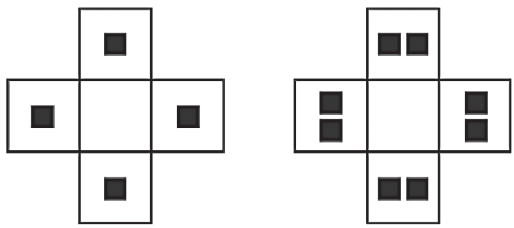
Egy bolha a számegyenes 12-vel jelölt pontján pihen. Majd hirtelen ugrálni kezd. Először jobbra ugrik 7 egységet, majd tovább jobbra 5 egységet, innen balra 23 egységet, majd ismét jobbra 10 egységet, végül balra 3 egységet. Hány egységnyire van az indulás helyétől?



Csoportos feladat lehet az alábbi:

Négy gyerek az asztal négy oldalára ül. Az asztalon kiterített csomagolópapíron egy közös építményt konstruálnak a csomagolópapíron megadott feltételek szerint. Az építés kockacukrokból, fehér rudakból történhet.

Csomagolópapírra öt nagy és egybevágó négyzetből keresztformát rajzolunk. A középső négyzet üres marad, a négy „kilógó” négyzetre egyszerű elrendezésben kisebb, egybevágó négyzetlapokat rajzolunk, például az alábbi ábrák szerint.



Megalkotható-e olyan építmény, amelyet négy különböző irányból nézve éppen a kis fekete négyzetek által mutatott ábrát láthatjuk?

Megoldás:

1. *Ahol csak egy-egy kis fekete négyzet van a négy nagyobb négyzet mindegyikére rajzolva, ott az építmény egyetlen kocka, középen jól elhelyezve.*
2. *Ahol mind a négy vetület két négyzet egymás mellett, ott már többféle alakzat megépítése is jó megoldást ad. A két kocka átlós elhelyezésétől a 3 vagy 4 kocka jó elhelyezése is megoldás.*

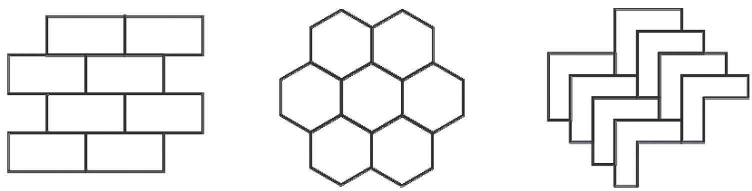
A gyerekek általában négy kockát tesznek középre, ilyenkor javasoljuk, hogy próbáljanak elvenni azokból úgy, hogy oldalnézetük ne változzon.

Már ebben a korban is adható olyan feladat, melynek több jó megoldása van, és a tanulóknak képessé kell válniuk az összes jó megoldás megkeresésére. Itt mindig az életkornak megfelelő, egyszerű feladatokra gondolunk.

A második évfolyamon a geometriai tevékenység kiterjed a különböző síkbeli alakzatok cérnával, zsinórral való körbekerítésére, síklapok különböző egységekkel való teljes (hézagmentes és egyrétű) lefedésére.

Ezek a tevékenységek a kerület, terület fogalmának tapasztalati előkészítését szolgálják.

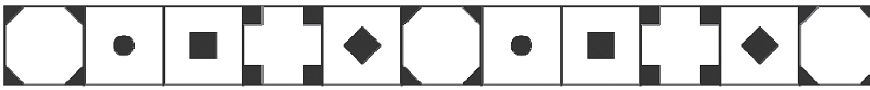
Ilyen lefedések az alábbiak is:



Transzformációk
A transzformációk közé a különböző alakzatok mozgatásához (tükrözés, eltolás, forgatás) és ezek irányának a tudatosításához kapcsolódó tevékenységek tartoznak.

A két- és háromdimenziós alakzatok mozgatása, különböző rácsokon történő elmozdítás során megfigyeljük, hogy megváltoznak-e egymáshoz képest az eredeti és az újonnan keletkezett alakzat tulajdonságai? Vannak-e öröklődő formai vagy méretbeli tulajdonságok? Például egy négyzetrácson két oldalszomszédos négyzetet körberajzolunk, ezt átmásoljuk egy másik papírra, precízen kivágjuk, és a kapott téglalapot mozgatjuk úgy, hogy kijelölünk egy irányt két rácspont irányított összekötésével, s ebben az irányban toljuk el a kivágott téglalapot valamennyivel. Vagy szívószálhoz ragasztjuk a téglalapot, és kijelölünk egy rácspontot, amely körül elforgatjuk a téglalapot, vagy két rácspontot összekötő egyenes mentén meghajtjuk a lapot, és bejelöljük a téglalap tükörképének a helyét.

A geometriai transzformációs feladatok fejlesztik az alkotó fantáziát, a kreativitást, az ötletességet, esztétikai érzéket. Tükrözésekkel, eltolással gyönyörű sormintákat tudunk előállítani. A tanulók ebben az életkorban már képesek a tükörkép és az eltolt kép megkülönböztetésére az összkép alapján. Igen egyszerű a kisméretű fehér papírszalvéták pontos összehajtogatását követő bevagdosásokkal, kivágásokkal szép mintákat alkotni. Például kétszeri összehajtás után az egyik sarkát vágjuk le, nyissuk ki, hogy lássák a gyerekek a kapott mintát. Biztassuk őket különféle mintázatok előállítására. Ha több, együtt meghajtott szalvétát vágunk meg, akkor ezekből periodikusan változó (pl. a periódus 5 elemű) sorozatokat tűzhetünk fel a táblára, és számtalan kérdést tehetünk fel, sok kis szöveges feladatot fogalmazhatunk meg a szép látvánnyal kapcsolatban. (A fekete színű rész a hiányzó papírt jelöli.)



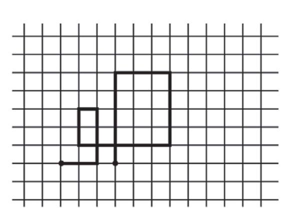
1. Melyik minta esetén hiányzik a legtöbb papír az eredeti papírszalvétából?
2. Hány lyuk van az 5. papírszalvétán?
3. Azonos vagy különböző mintázatú a 3. és a 7. szalvéta? És a 3. és a 8. szalvéta?
4. Ha ugyanúgy folytatnánk a mintákat és a kirakást, a 20., 30. és a 100. helyen milyen mintájú szalvéta állna?

Tájékozódás

A helyzetviszonyok kifejezésével, irányok megmutatásával, adatokkal jellemzett helyek megkeresésével jelentősen hozzájárulunk a tanulók térszemléletének fejlesztéséhez, a térben és a síkban való helyes eligazodási képesség fejlesztéséhez. A számegyenes, majd a később megjelenő koordináta-rendszer fogalmának elemi tapasztalati szintű előkészítését (elhelyezkedések viszonyításával, kezdve az előre, hátra, alatt, fölött, mellett, mögött, messzebb, közelebb, a kettő között, tőle kettővel jobbra, hárommal balra, aztán csak számokkal kifejezve a viszonyokat stb.) e témához kapcsolódó tevékenységek sora segíti.

Az alábbi példában mindenkinél van kockás papír, melyen a rácsvonalak irányában jelölve van a négy égtáj:

Egy négyzetrácsos lap valamelyik rácspontjából kelet felé indulok. Mindig rácsvonalon haladok, s rácspontnál fordulok. A fordulás mindig balra történik. Egy négyzetoldal a hosszegység. A megtett útszakaszok hossza sorrendben a következő: 2, 3, 1, 2, 5, 4, 3, 5.
Rajzold le az utamat!
Az út kezdő- s végpontja hány egységnyi távolságra van egymástól?



Megoldás: 3 egységnyi távolságra van egymástól az út kezdő- és végpontja.

Mérések

A mérések részterületen a mérhető geometriai tulajdonságok vizsgálatára vonatkozó tevékenységekről, követelményekről van szó.

A térbeli és síkbeli alakzatok jellemzői közé – a formai tulajdonságok mellé – bekerülnek a számszerűsíthető, mennyiségi jellemzők is. Ez a tevékenység- és követelménycsoport a matematika más területeihez is köthető, például hozzájárul a szám- és műveletfogalom kialakításához, megerősítéséhez. A hosszúság, kerület, terület, tömeg, űrtartalom, idő mérése sokféle alkalmilag választott és néhány szabvány egységgel (pl. méter, kilogramm, liter), az időtartam az óra, nap, hét helyes alkalmazásával történjen sokféle szituációba ágyazva. A jól megtervezett tevékenységek során szerzett tapasztalások lehetővé teszik az egység, mennyiség, mérőszám kapcsolatának felfedezését, az arányos változások tapasztalati előkészítését. *Az 1–2. évfolyam végére elvárható hogy a tanuló jártas legyen az alkalmi mértékegységekkel történő gyakorlati mérésekben, a tanult szabványmértékegységek ismeretében, gyakorlati használatában.*

Írd be a hiányzó számokat a pontozott helyre!

1 dm = ... cm	*6 cm + 2 dm = ... cm*
3 cm + 1 dm = ... cm	*2 dm − 15 cm = ... cm*
2 dm − 7 cm = ... cm	*.... cm + 1 dm = 12 cm*

A fenti négy téma tanítása rendkívül eszközigényes. A követelmények teljesülésének vizsgálata során is szükség van az írásos tesztelési módszereken túllépő manipulatív és mozgásos feladatok alkalmazására, gyakorlati megoldásuk, kivitelezésük értékelésére.

A geometriai fogalmak kialakítására és alkalmazására számos lehetőség kínálkozik a tanórákon kívül is. Ezek olyan apróbb feladatok, kis projektek, melyek hosszabb-rövidebb határidők mellett akár családi, baráti együttműködéssel is megvalósíthatók, és amelyek a geometriai tudás gyarapítása mellett lehetőséget biztosítanak az egymás közti munkamegosztásnak, a közös siker élményének, a szociális kompetencia egyéb komponensei fejlesztésének.

A mérések területén fontos fejlesztéseket végezhetünk azzal, hogy a gyerekek kezébe adjuk a méterrudat, a mérőszalagot, az űrmértékeket, a kétkarú mérleget a megfelelő súlyokkal, és sok mérést végeztetünk velük.

Készíthetünk például zacskókat, melybe majd homokot, kavicsot, babot, kukoricát, búzát, apró gyümölcsöket, az uzsonnát is beletehetjük, hogy összehasonlítsuk, megmérjük a tömegüket. Az egység sok minden lehet. Mérjük meg az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt is. A körlapos, 1-től 12-ig számokkal és jól megkülönböztethető mutatókkal ellátott óra használatát javasoljuk.

Elvárás a szabványmértékegységek (m, dm, cm, kg, dkg; l, dl; óra, perc, nap, hét, hónap, év) gyakorlati ismerete, használata konkrét feladatokban. Ez nem zárja ki az alkalmi mértékegységek használatát.

Példafeladatok:

1. *A karácsonyi ajándékok csomagolásához vásárolt szalagokat Kati megmérte. Aranyszínűből 15 méter, ezüstszínűből 100 deciméter, zöld színűből 250 centiméter volt. Kati még vett piros szalagot, így éppen meglett a csomagoláshoz szükséges 35 méternyi szalag. Hány deciméter hosszú a piros szalag?*
2. *Az erdei tisztásra érve a mama egy nagy flakon gyümölcslevet vett elő. Mind az öten ittak két teli pohárral belőle, és ezzel kiürült a flakon. Csak ezután vették észre, hogy Daninak a poharába kétszer annyi gyümölcslé fért, mint a többi négy családtag kisebb, egyforma méretű poharába. Hány kisebb pohár gyümölcslé volt a flakonban?*
3. *Mérjétek meg a két fa távolságát többféle hosszegységgel! Jegyezzétek le a mérőszámot és a mértékegységet. A tapasztaltak alapján tegyétek igazzá a következő nyitott mondatot: Minél kisebb egységgel mérem meg ugyanazt a távolságot, annál nagyobb lesz a ....*
4. *Több azonos méretű műanyag dobozt rakjunk tele különböző anyagokkal. Az egyikben homok, a másikban kavics, szögek, lencse, liszt stb. lehet. Egy kétkarú mérleg segítségével hasonlítsuk össze a tömegüket, és rakjuk tömegük szerint növekvő sorrendbe a dobozokat. Lejegyezve a sorrendet, szabvány mértékegységekkel történő mérésekkel ellenőrizzük azok helyességét!*

A mérések során sokszor kérdezzük meg: Mit mértetek? Mivel mértetek? Meg tudnád mutatni a két kezeddel, hogy milyen hosszú lehet az 1 méter? A 3 deciméter? És az 5 cm? Tennél a papír-tányéromra egy fél kilónyi kavicsot? És erre 30 dekagramm homokot? Stb. És együtt ellenőrizzünk le minden becslést méréssel, beszéljük meg a tapasztaltakat. Ezzel elérhető, hogy a tanulók becslőképessége fejlődjön, képessé váljanak a különböző nagyságú mértékek kapcsolatának felismerésére.

A mérés lényege az összehasonlítás. Hogy mikor, mit és mivel hasonlítunk össze, az eleinte szinte mindegy. Például hosszúság méréséhez használhatunk egy darab madzagot, egy lécet, a tanulók lépéshosszát, kifeszített tenyerünk két ujjhegyének távolságát, stb. Térfogatmérésnél egy bögrényi vagy papírpohárnyi vizet, homokot, babot stb. Ezeket az úgynevezett alkalmi mértékegységeket a tanulókkal együtt válasszuk meg, s az adott feladatban következetesen használjuk.

Szervezzünk 5-10 mérésből álló versenyt. A mérést megelőzően becsüljük meg a várható eredményt. Az előre elkészített lapokon a négyoszlopos táblázat első oszlopában legyen a mérési feladat, mellette a becsült eredmény, melyet rendre beírnak a gyerekek, majd a harmadik oszlopba a konkrétan mért érték, a 4. oszlopba a becsült és mért érték különbsége kerüljön. Minél többször csinálunk ilyen feladatot, annál nagyobb a valószínűsége, hogy kicsik lesznek az eltérések a becsült és mért eredmény között.

1. Válaszd ki az oda nem illőt!

a) cm m kg dm

b) perc év hónap dm óra

2. Barkochbázzunk!
Például: A gyerekek előtt ott vannak a logikai lapok vagy különböző alakzatokat ábrázoló kártyák, és egyvalaki gondol az egyikre, a többiek a tulajdonságokkal (pl. lyukas, nem háromszög, piros, nem kicsi, van csúcsa) kérdeznek; a válasz csak igen vagy nem lehet. Egy-egy válasz után mindenki maga „szűri meg” a lapjait, azaz csak azokat a lapokat tartja meg, melyek még megoldásként szóba jöhetnek. Győz, aki elsőként eltalálja a megfelelő alakzatot.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztése során általában a következő fokozatokat tartják szem előtt a tanítók:

a) Adott feltételnek megfelelő egy vagy néhány eset előállítása.
b) Minél több eset előállítása az adott feltétel szerint.
c) Az összes eset keresése, a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok pótlása.
d) Adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése.

A felsorolt négy követelmény közül az *a)* és *b)* jelű az induktív gondolkodás fejlesztésének eszköze lehet. A diszciplináris értelemben vett matematikai tudás értékelése során elsősorban *c)* és *d)* típusú követelményeket fogalmazhatunk meg.

Matematikai tesztek tipikus feladata a következő:

Hány kétjegyű számot tudsz alkotni ezekből a számkártyákból? Állítsd elő az összeset!

$\boxed{3}\quad \boxed{4}\quad \boxed{6}\quad \boxed{2}$

Nyilvánvaló, hogy egyik számkártyán szereplő szám sem tölti be azt a szerepet, mint amit a hagyományos szöveges feladatoknál megszoktunk, hiszen itt a 3, 4, 6, 2 számokkal nem kell semmilyen számtani műveletet végezniük, mégis eljuthatnak a megoldáshoz.
A feladat egy ekvivalens megfogalmazása:

Hány monogramot lehet alkotni ezekből a betűkártyákból?

$\boxed{A}\quad \boxed{B}\quad \boxed{C}\quad \boxed{D}$

A szöveges feladatok megoldásához is segítséget kell adnunk tanítványainknak, hogy megtalálják a feladatot jól leíró modellt.

A kombinatorika témaköréhez kapcsolódó, ám a rendszerezési képességet mérő feladatra a következő példát adjuk:

Tréfás Ferkó összekeverte a mágneses betűket a „2. a osztály" feliratban.
Ez lett belőle: $\boxed{\textit{2. o asztály}}$
Hány betű van rossz helyen?

A következő feladat kapcsán megmutatjuk, hogy különféle megoldási stratégiák egyaránt elvezethetnek a megoldáshoz. A manipulatív, képi és fogalmi szintű megoldási lehetőségek egymással egyenértékű felhasználása erősíti a kapcsolatot a hétköznapi jelenségek és a matematikai fogalmak között.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?

Egy lehetséges megoldása a feladatnak, hogy a tanító kihív 3 gyereket az osztály elé. A helyükön ülő gyerekek irányítják a kinn állókat. Megállapítják a lehetséges sorrendeket. Mivel nehéz fejben tartani a már számba vett eseteket, természetesen adódik, hogy a problémát modellezniük kell. Például úgy, hogy felírják a neveket cédulákra (egy nevet több cédulára is), és ezek rakosgatásával oldják meg a feladatukat. Nyilvánvalóan ilyen tevékenységet nem végezhetnek írásbeli teszteken.

Az értékelés során megfogalmazott feladatoknál is ügyelni kell arra, hogy megmutassunk egy jó modellt, melynek segítségével a feladat érthetőbbé válik. Lehetséges, hogy elkezdjük az esetek felírását, majd ezt a gyerekeknek folytatni kell. Ezáltal a feladat tulajdonképpen az esetek közül minél több felírására korlátozódik, melyben a szemponttartás válik hangsúlyossá.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?
Folytasd a lehetőségek felírását!

A,B,C;   A,C,B;   B,A,C;   _____;   _____;   _____;

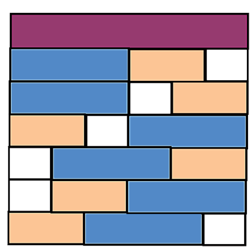
A másik lehetőség, hogy megadunk egy rendszert (például egy táblázatot), melynek segítségével a feladat áttekinthetőbb.

Anna, Béla és Cili futóversenyt rendeztek. Egymástól különböző időpontokban értek célba. Hányféleképpen érhettek célba?
Folytasd a lehetőségek felírását!

1.	A					
2.	B					
3.	C					

Az adott feltételhez tartozó összes eset megkereséséhez vezető rendszer kiépítésére is tesznek előkészületeket már ebben a szakaszban is. Például 3 elem lehetséges sorba rendezéseit vizsgálva a tanórán már megfigyelték, hogy hányféleképpen színezhető a háromcsíkos zászló piros, fehér és zöld színeket használva. Újabb példák:

1. Hányféleképpen rakható ki a lila színes rúd, különböző rudakat használva?



2. Három hangból álló dallamokat készítettem. Mi hiányzik a sorból?

dó-mi-szó	**mi-dó-szó**	**szó-mi-dó**
dó-szó-mi	**mi-szó-dó**	

Nehezebbé akkor válik a feladat, ha növeljük az információs zajt.

3. *Mi lehet a „vers" utolsó sora?*

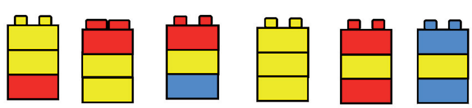
Tirim taram turum
Tirim turum taram
Taram turum tirim
Taram tirim turum
Turum tirim taram

....

A zászlószínezés és a fenti három feladat szerkezete azonos, de a tartalmuk nagyon különböző. A szerkezet azonban ebben az életkorban csak kevesek számára válik fontossá, ezért jelent új kihívást ugyanannak a problémának más megfogalmazása.

A valószínűség témakörében az alapozó években a biztos és a nem biztos elkülönítése válik fontossá. Sok-sok tapasztalat előzi meg a feladatlapon megfogalmazott feladatokat.

Piros, sárga és kék Lego-elemekből ezeket a tornyokat építettem. Egyet kiválasztottam, és állításokat mondtam a kiválasztott toronyról. Döntsd el, hogy biztosan igaz-e az állítás!

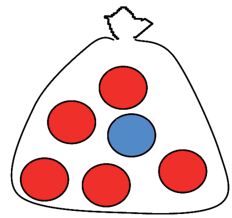


	Biztos igaz	Nem biztos, hogy igaz
Van benne piros elem		
A középső elem sárga		
Mindhárom szín szerepel benne		
Nincs benne kék		
Van két egyforma eleme		

Miután sok hétköznapi tapasztalatot szereztek lehetetlen eseményekről, kísérletet tehetünk arra is, hogy rákérdezzünk erre a nehéz fogalomra.

Egy zsákba beletettünk 5 piros és 1 kék golyót. Ezután kettőt kihúztunk, és állításokat mondtunk. Húzd alá azokat az állításokat, amelyek szerinted hamisak!

Mindegyik piros
Mindegyik kék
Van köztük kék
Nincs köztük piros
Van köztük kék



A 3–4. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Számok, számhalmazok

Harmadik osztályban 1000-ig, negyedik osztályban 10 000-ig bővítjük a számfogalmat a számok valóságtartalmára építve. A három-, illetve négyjegyű számok körében a pontos számlálás mellett egyre nagyobb szerepet szánunk a darabszám és mérőszám becslésének, a közelítéssel való számlálásnak, az alkalmi és szabvány egységgel és többszöröseivel való adott pontosságú mérésnek. A gyakorlati mérések során a gyerekek képessé válnak értelmezni a különböző egységekkel való mérésekben kifejeződő viszonyokat, megértik a mértékváltás gondolatát.

Különböző taneszközök használatával megismerkednek különböző számrendszerekkel, tapasztalatot szereznek a csoportosításról, a beváltásokról és felváltásokról. A tízes számrendszer lényegének és a helyiértékrendszernek a gyakorlati ismeretével tudatossá és biztonságossá válik számukra a számok írása és olvasása, felismerik a számnévképzésben megfigyelhető rendszert. Megbízhatóan használják a számjegyek alaki-, helyi és valódi értékeit. Megvizsgálják a számokat az ismert számtulajdonságok, illetve számkapcsolatok szerint (pl. párosság, számszomszédok), és megismerkednek újabb számtulajdonságokkal (pl. oszthatóság, számok tízesekre, százasokra, ezresekre kerekített értékei).

Karikázd be a felsorolt számok közül a páratlan számokat!

1 2 4 5 6 8

Karikázd be a következő számok közül a 2 számszomszédait!

0 1 2 3 4 5

Felismerik és ki tudják fejezni a számokat különféle alakjaikban, meg tudják ítélni számok nagyságát, képessé válnak megadott számokat nagyság szerint növekvő és csökkenő sorrendbe rendezni. El tudják helyezni a számokat számtáblázatokban, illetve különböző beosztású számegyeneseken.

Kétféle értelmezésben ismerkednek a gyerekek a negatív szám fogalmával. Egyrészt irányított mennyiségek mérőszámaként (hőmérséklet, elmozdulás, elfordulás, idő), másrészt hiányként értelmezik a negatív számokat. Ehhez adósság- és vagyonkártyákat használnak. A számokat konkrét tartalommal ellátva hasonlítják össze. Előállítják a számok többféle alakját. Tevékenységgel megtapasztalják, hogy a hozzátevés nem jár mindig értéknövekedéssel, és az elvétel eredményezhet növekedést.

A számolási készség értékelésében gyakran alkalmazunk szöveges feladatokat. Ezek az egy művelettel megoldható feladatok nem igényelnek adatgyűjtést, egyszerűen számfeladattal lejegyezhetők és megoldhatók.

Például:

750 forint volt a pénztárcámban. Elköltöttem 480 forintot. Mennyi pénzem maradt?

Egy buszjegy 320 forint. Mennyibe kerül öt buszjegy?

Harmadik osztályban az 1000-es, negyedik osztályban a 10 000-es számkörben gyakran közelítő értékekkel számolnak a gyerekek, a feladatokban megfogalmazott kérdések is ezt igénylik.

Például:

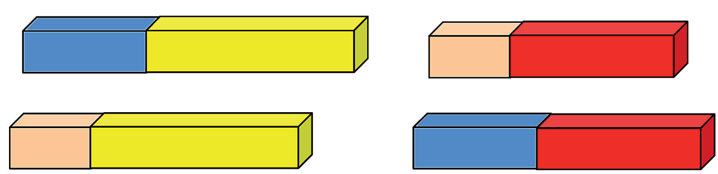
Kati egy 1000 forintossal fizetett az írószerboltban. A pénztárgép 578 Ft-ot mutatott. Mennyi a visszajáró pénz százasokra kerekítve?

Műveletek

Harmadik és negyedik osztályban a kibővített számkörben is szükségessé válik a műveletek értelmezése tárgyi megjelenítéssel, rajzzal, elvontabb ábrákkal és szöveggel. Különös figyelmet fordítunk a közelítő számokkal való műveletértelmezésekre. Kétirányú tevékenységek járulnak hozzá a matematikai modellek megértéséhez. Egyrészt kirakásokról, képekről, ábrákról műveleteket olvasnak le a gyerekek, másrészt adott matematikai modellhez példákat gyűjtenek, problémákat fogalmaznak meg. A nagyobb számok összeadásának, kivonásának értelmezéséhez segítséget jelent a szakaszokkal vagy területekkel való ábrázolás. Ezt előkészítheti a színes rudak használata.

Például:

Érjen a fehér kocka 100-at! Melyik kirakás közelíti a 246 + 467 összeget?

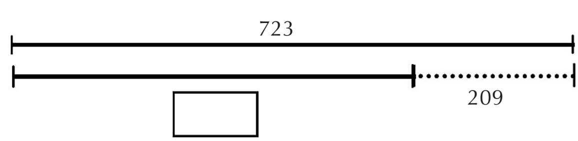


A kirakásokat, a kirakásokról a leolvasásokat követheti a szakaszok, illetve a területek használata. Ezek alkalmasak a számok közelítésekkel való ábrázolására, a számok közti viszonyok bemutatására.

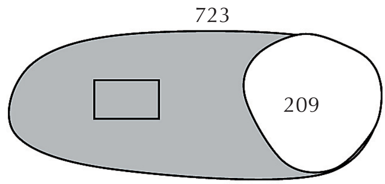
Például:

Az egyik szám a 723. Ez 209-cel nagyobb a másiknál. Melyik a másik szám?

Szakaszokkal:



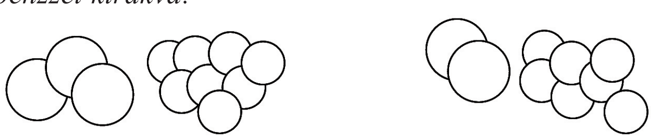
Területekkel:



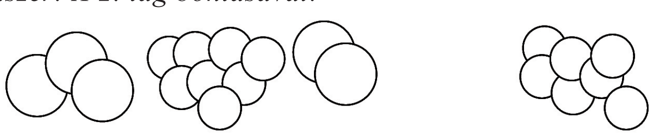
A kibővített számkörben a szóbeli számolási eljárásokat analógiák alapján végezzük. Ezek megértését jól támogatja a játék pénz használata. A tevékenységek során biztonságossá válik a gyerekek szóbeli számolási készsége a kerek számok körében. A 2. osztályban a 100-as számkörben megismert számolási eljárásokat végigjárják a gyerekek a 3. osztályban az 1000-es számkörben kerek százasokkal és kerek tízesekkel, majd a 4. osztályban a 10 000-es számkörben kerek ezresekkel és kerek százasokkal is. Számolásaikban egyszerűsítő eljárásokat alkalmaznak, melyek alapja az összeg, illetve a különbség változatlansága. Ezekről tevékenységekkel szereznek tapasztalatokat, majd alkalmazzák a számolások során.

Mennyi a 380 + 270?

Játék pénzzel kirakva:

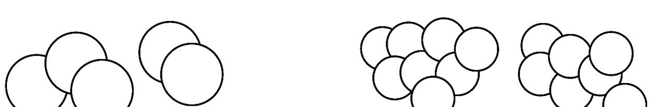


1. módszer: A 2. tag bontásával:



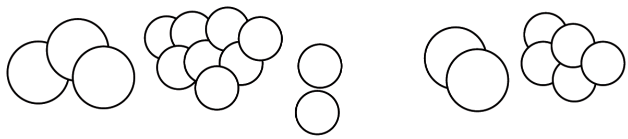
(380 + 200) + 70 = 580 + 70 = 650

2. módszer: A százasokat és a tízeseket összeadva:



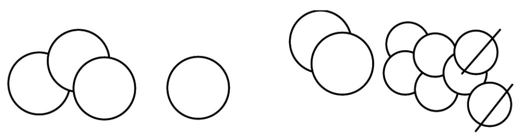
(300 + 200) + (80 + 70) = 500 + 150 = 650

3. módszer: Az egyik tagból a másikba helyezéssel:



(380 + 20) + (270 – 20) =400 + 250 = 650

4. módszer: Az egyik tag növelésével, majd az összeg csökkentésével:



(400 + 270) – 20 = 670 – 20 = 650

A kerekített értékek segítségével végzett közelítő számítások szükségesek lesznek az írásbeli műveletek eredményeinek előrebecslésénél is.

Az írásbeli műveletek algoritmusai, a számolás eredményeinek ellenőrzési módjai is építenek a műveletek tulajdonságaira, kapcsolataira. Ez is indokolja a tagok, tényezők felcserélhetőségének illetve csoportosíthatóságának ismeretét, célszerű alkalmazását.

Például 3. osztályban, amikor a gyerekek még nem tanulták a kétjegyűvel való írásbeli szorzást, képesek a 26 · 24 kiszámítására az egyjegyűvel való írásbeli szorzási eljárás alkalmazásával. Néhány számolási lehetőség: (26 · 8) · 3 = (26 · 6) · 4 = (26 · 3) · 2 · 2 · 2.

3–4. osztályban különös hangsúlyt kapnak a szöveges feladatok a problémamegoldó képesség fejlesztésében. Ezek a feladatok többnyire összetettek, nem oldhatók meg közvetlen úton. A probléma megoldásához célszerű megfelelő lépéseket betartva eljutni. A probléma megismerését az értelmezése, adatainak lejegyzése és az adatok összefüggéseinek megértése követi. Az ismert és az ismeretlen adatok közti kapcsolat kifejezésére sokféle modellt használhatnak a gyerekek. Lehet modell például a több műveletet tartalmazó számfeladat. Ezekben a lejegyzésekben célszerű zárójeleket használni akkor is, amikor ezeket csak az összetartozó adatok jelzésére használjuk.

Például:

Petiék családja háromnapos autós kirándulást tervezett. Az első nap 160 km-t tettek meg, a második napon 80 km-rel többet. A harmadik napon kétszer annyit, mint az első napon. Hány kilométert tettek meg Petiék a három nap alatt?

A feladat összefüggéseinek lejegyzése számfeladattal:
$160 + (160+80) + (160 \cdot 2) =$

Algebra

A számfeladatok mellett egyre nagyobb hangsúllyal jelennek meg a nyitott mondatok. Folytatva az 1. és 2. osztályban megkezdett tevékenységeket, a nyitott mondatokat igazzá, illetve hamissá tevő elemek keresése próbálgatással történik, de alkalmazzák a gyerekek a tervszerű próbálgatás módszerét is a megoldás keresésére véges alaphalmazokon. Képessé válnak ismert és keresett adatok között megfogalmazott kapcsolathoz adott nyitott mondatok közül kiválasztani (egyszerűbb kapcsolatok esetén önállóan megalkotni) az adott helyzetben megfelelő nyitott mondatot.

Gondoltam egy számot. Ennek 8-szorosát elvettem 800-ból, és megkaptam a gondolt szám 12-szeresét. Melyik számra gondoltam?

Nyitott mondattal: $800 - \square \cdot 8 = \square \cdot 12$

A feladatok összefüggéseit – kiemelten a fordított szövegezésű feladatokét – gyakran nyitott mondat formájában jegyezzük le. A 8–10 évesek számára egyszerűbb annak a műveletnek a felismerése és lejegyzése, amelyre a szöveg utal, mint az inverz műveletre való átfogalmazás.

Például:

Csabiék iskolája 12 évfolyamos. 160 alsó tagozatos tanulója van az iskolának. Az alsó tagozatra 2-szer annyi gyerek jár, mint a középiskolába. Az alsósok 40-nel többen vannak, mint a felsősök. Hány gyerek jár a felső tagozatra, és hányan járnak középiskolába Csabiék iskolájában?
A középiskolás gyerekek számát jelöljük így: $\square$
A felsősök számát jelöljük így: ∇

Ennek segítségével egyszerűen leírhatók a feladat kérdéseihez tartozó nyitott mondatok:

$\square \cdot 2 = 160 \qquad \nabla + 40 = 160$

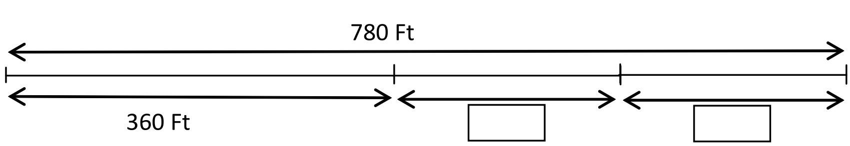
A szöveggel megfogalmazott feladatok megoldását segíthetik sorozatok, táblázatok, egyszerűsítő rajzok vagy grafikonok, még akkor is, ha a feladatnak csak egy megoldása van.

Például, ennek a feladatnak a megoldását táblázat kitöltésével is kereshetik a gyerekek:

A pénztárcámban csak 20 és 50 forintos érmék vannak, összesen 12 darab. A pénzérmék összesen 360 Ft-ot érnek. Melyik érméből hány darab van a pénztárcámban?
A feladathoz ilyen táblázat készülhet:

20 forintosok száma	2	4	5	6	7	8
50 forintosok száma	10	8	7	6	5	4
20 forintosok értéke	40	80	100	120	140	160
50 forintosok értéke	500	400	350	300	250	200
Az érmék értéke	540	480	450	420	390	**360**

Egyszerűsítő rajz járul hozzá a megoldáshoz ebben a feladatban:
Az írószerboltban két egyforma füzetet és egy tollat vásároltam, összesen 780 forintot fizettem. A toll 360 forintba került. Mennyibe került egy füzet?
Szakaszos ábra segítheti a megoldást:



A feladathoz választott matematikai modellen belül a számításokat azok ellenőrzése követi. Az ellenőrzés történhet az előzetes becsléssel való összevetéssel, inverz művelettel, és használhatunk zsebszámológépet is. Az inverz művelet választása az ellenőrzéshez erősíti a műveletek közti kapcsolatot.

Relációk, függvények

A relációk, függvények témakörben a 3–4. évfolyamon a fejlesztés fontosabb területei:

– összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés képessége, megfigyelőképesség;
– válogató-, osztályozó-, rendszerező- és lényegkiemelő képesség;
– adatok gyűjtése, rögzítése, rendezése;
– absztraháló- és konkretizálóképesség;
– összefüggések felismerése, oksági és egyéb kapcsolatok feltárása, analógiák felismerése, követése;
– tapasztalatok kifejezése különféle módokon (megmutatással, rajzzal, adatok rendezésével, példák, ellenpéldák gyűjtésével stb.), megfogalmazása saját szókinccsel, egyszerűbb esetekben matematikai szaknyelv, illetve jelrendszer alkalmazásával.

A felismert összefüggéseket képesek megfogalmazni a matematika nyelvén, kifejezni szavakkal, jelekkel, szabállyal (függvény esetében nyíljelöléssel, relációk esetében nyitott mondattal). A megkezdett párosításokat tudják folytatni adott és felismert összefüggés szerint.

Az összetartozó adatpárok kezelésében új elemként jelenik meg 3–4. osztályban a relációk grafikus ábrázolása Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben. Mivel az adatpárok ábrázolása során lényeges az adatpár tagjainak sorrendje, olyan gyakorlatokat is érdemes végezni, amelyekben az elő- és utótag cseréjével előálló adatpárokat közös koordináta-rendszerben tüntetjük föl.

A tanulók képesek adatokat, számokat tartalom, illetve nagyság szerint sorozatba rendezni, a folytatásra vonatkozó sejtéseket megfogalmazni. A felismert összefüggést a sorozat folytatásával vagy szavakkal fejezik ki. A megfogalmazott szabály alapján tudják folytatni a sorozatot, képesek ellenőrizni a szabály és az adatok megfelelőségét. Néhány elemével elkezdett sorozathoz többféle szabályt keresnek.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Mit kell tennünk a △ sorában lévő számokkal, hogy megkapjuk a □ sorában alatta lévő számot?

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

A tanulótól elvárható megoldás a következőképpen hangozhat: „A △ sorában lévő számhoz hozzáadok egyet, majd ezt a számot kettővel megszorozva megkapom a □ sorában lévő számot.” Ehhez a táblázathoz kapcsolódóan megfogalmazható egy olyan zárt feladat is, amelyben azt kérjük, hogy a tanuló válassza ki a táblázat adataihoz illő szabályt.

Mi lehet a szabály a következő táblázatban? Karikázd be annak az összefüggésnek a jelét, amelyik igaz a táblázatra, és húzd át annak a jelét, amelyik nem igaz!

△	3	4	6	7
□	8	10	14	

a) □ = (△ + 1)· 2
b) □ = (△ − 1) · 2
c) □ = (△ + 2) + 3
d) □ = △· 2 + 2

Geometria

A geometriai területen a 3. és 4. évfolyamokon ugyanaz a négy tartalmi részterület alakítja az tartalmi kereteket, mint az 1. és 2. évfolyamon. Az ott megismert konstruálások (1), transzformációk (2), tájékozódás (3) és mérés(4) területek átfogják mindazokat a követelményeket, amelyeket geometriai fogalmak, egyszerű rutinfeladatok, realisztikus és autentikus geometriai problémák esetén ezeken az évfolyamokon definiálunk.

Konstruálás

Az 1–2. évfolyam követelményeihez hasonlóan továbbra is a téglatest, kocka, téglalap és négyzet alakzatok felismerése és konstruálása szerepel a követelmények között. A tanulók elsajátítják az él és a lap fogalmakat.

A tanulók megismerik a testháló kifejezést, konkrétan a téglatest és kocka jellemző testhálóját.

A geometriai tulajdonságok közül – gyakorlati tevékenységeik során – elsajátítják a következő fogalmakat: forma, szomszédosság, irány, párhuzamosság, merőlegesség. A tanulók képessé válnak arra, hogy az egyes geometriai tulajdonságok szerint csoportosítsanak testeket és síkidomokat. A csoportosítás során megfigyelt további jellegzetes tulajdonságok: szögletesség, lyukasság, tükrösség, méretek azonossága és különbözősége.

A tükrösség (szimmetrikusság) fogalmát egyrészt papírhajtogatásos tevékenységek, másrészt térbeli alakzatok tükörképének megépítésével fejlesztjük.

A térbeli alakzatok elsőbbsége mellett nagyobb teret kapnak a síkidomokkal végzett tevékenységek. A tanulók képessé válnak testek és síkidomok másolására, síkidom és test tükörképének megalkotására. A másolás elsődlegesen kézbe vehető testekkel, pálcikákkal történik, de 3–4. osztályban a rajzolás nyújtotta absztrakciós lehetőséget is fokozottan kihasználjuk.

A tanulók képesek a körző és vonalzó használatára. A körző alapszintű használata valósul meg például akkor, amikor a tanuló a körzőnyílásba vesz 5 cm-es távolságot.

Transzformációk

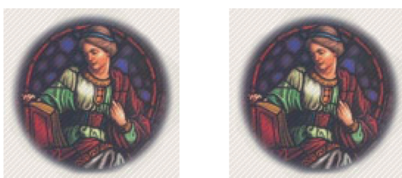
Az 1–2. osztályban megszerzett tapasztalatokra építve az egybevágóság és a hasonlóság fogalmának tapasztalati és képi szintű összetevőit alakítjuk ki. A tanulók képesek fölismerni, ha két alakzat vagy azok képe egybevágó vagy hasonló. A formai jegyek azonosságát és különbözőségét képesek megállapítani és megfogalmazni. Alakzatok különbözősége esetén képesek szavakkal megfogalmazni az adott szempontú különbséget (pl. hosszúkásabb, ferdébb).

Testek esetében az eredeti test alkotóelemeiből, síkidomok esetében a négyzetrácsos hálózat segítségével képesek alakzatokat kicsinyíteni és nagyítani. A tanulók képesek síkidomok tengelyes tükrözésére és elforgatására másolópapír segítségével.

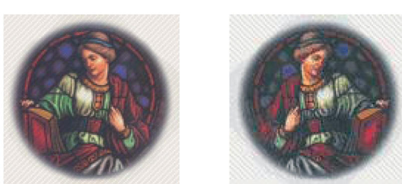
Az eltolással és a tengelyes tükrözéssel nyert alakzatok között képesek különbséget tenni, még összetett alakzatok esetén is.

Mintafeladatunk a tengelyes tükrözés és az eltolás közötti különbségtételt ellenőrzi olyan alakzatok esetén, amelyeknél a fogalmi tudás alapvető. A feladatok tartalma lényegében tetszőleges, nem történik hivatkozás (és nincs is igény) a hétköznapi tapasztalatok felhasználására.

Ebben a feladatban két, összetartozó ábráról kell eldöntened, hogy azok egy tengelyes tükrözéssel vagy egy eltolással egymásba átvihetők-e. Az ábrák betűjelét írd a megfelelő sorba!

a)


b)


c)


d)


Tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők: ....

Eltolással egymásba vihetők: ....

Tájékozódás

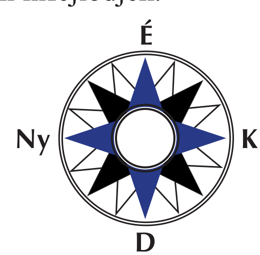
Előrebocsátjuk, hogy a geometriai értelemben vett tájékozódás jelentős része összefügg a földrajzi tudás kategóriájaként azonosított tájékozódással. A két terület kapcsolatát fölfoghatjuk úgy, hogy különböző kontextusban történik a tájékozódás képességeinek fejlesztése. A matematikai kontextusban fejlesztett tájékozódási képesség a koordináta-rendszer mint univerzális matematikai eszköz elsajátítását készíti elő, és ennek során a hétköznapokból ismert fogalmakat használunk föl. Ahogyan az 1–2. osztály követelményeinél jeleztük, a síkbeli koordináta-rendszer használata esetében jellemző két, egymástól független adat rendezett adatpárként a hétköznapi értelemben vett tájékozódás alapját jelenti.

A tájékozódás a térbeli mozgások során szerzett tapasztalatokból indul. 3–4. osztályban a tanulók képesé válnak egy, két vagy három adat alapján tájékozódni. A három adat alapján történő tájékozódást, amely a térbeli tájékozódás matematikai modelljét jelenti, a gyakorlatban sok esetben a két adat alapján történő tájékozódás helyettesíti. A tanulók tájékozódási képessége magában foglalja azt is, hogy képesek fogadni és megérteni a vonatkozó információt (pl. „ha előre lépsz ötöt, majd jobbra kettőt, akkor célba érsz") és képesek maguk is megfogalmazni a tájékozódást szolgáló információt.

A tájékozódás képi elemeinek konstruálását, például egyszerű térképvázlatok készítését a természettudományi tartalmi keretek földrajzi fejezeteiben tárgyaljuk.

Mintafeladatunk akár a földrajz vagy a természetismeret tantárgyak tesztjében is helyet kaphatna. Meggyőződésünk szerint ez nem jelent érvényességi problémát, hiszen a feladatok kontextusa, már pusztán a teszt címében szereplő matematika vagy természetismeret szó önmagában hatással van a tanulói teljesítményre. Kívánatosnak tartjuk, hogy a tájékozódás alapját jelentő képi és verbális tudás rendszere mind matematikai, mind más kontextusban megfelelő szinten kifejlődjék.

Az ábrán egy szélrózsát látsz, amelyen a négy fő égtáj van megjelölve. A kör közepéből elindulunk észak felé. Megfordulunk, és visszamegyünk a kör közepére. Melyik égtáj esik ekkor jobb kezünk felé?



Mérés

Amint az 1. 3. részben említettük, a hazai matematikadidaktikai hagyományban a mérés a geometria tárgykörével együtt szerepel, ugyanakkor a számunkra fontos viszonyítási pontként szereplő amerikai *„Principles and Standards for School Mathematics”* kötetében a mérés külön tartalmi területként jelenik meg. Ennek okát részben kulturális hagyományokban kell keresnünk (pl. a metrikus rendszer alkalmazásában mutatkozó különbségek), másrészt érvényesül az a hazai megközelítésmód, amely a mérést az ismert geometriai idomokhoz kapcsolódó tevékenységnek tekinti. Egy jóval általánosabb megközelítésmód szerint ugyanis – amely megközelítést a tudományok világában természetesnek vesszük – a mérés számok hozzárendelését jelenti objektumokhoz, eseményekhez, tulajdonságokhoz, valamilyen szabály alapján. Bár van törekvés arra, hogy a geometriai alakzatok mérésében ez utóbbi, általános megközelítést is bevigyük az iskolába (úgynevezett „alkalmi mértékegységekkel” történő mérés – lásd 1–2. osztály követelményei), az iskolai gyakorlatot mégis a szabvány mértékegységekre történő gyors áttérés, majd a mértékváltás számolásos műveleteiben való elmélyedés jellemzi.

3–4. osztályban a tanulóknak ismerniük kell az egység, a mennyiség és a mérőszám fogalmakat. A méréses tevékenységek során a kerület mérését körülkerítéssel, a terület mérését lefedéssel, a térfogat mérését alkalmi egységekkel („kis kocka”) végezzük el. A síkidomok közül a téglalap, a testek közül a téglatest szerepeljen a kerület-, terület-, illetőleg a térfogatmérés tárgyaként.

A tanulóknak ismerniük kell a következő mértékegységeket: mm, cm, dm, m, km, hl, l, dl, cl, ml, t, kg, g. Az egymással szomszédos mértékegységeket át kell tudniuk váltani egymásba. Az átváltás elsősorban gyakorlati tevékenységekhez kapcsolódjék, tehát az egyik mértékegység használatával lezajlott mérést követően egy szomszédos mértékegységgel ismételt mérést alkalmazunk. Az idő mérésére az órát, a percet és a másodpercet kell ismerniük, és tudniuk kell a szomszédos egységeket egymásba átváltani. A mérés témaköréhez kötődő szöveges gyakorlófeladatok jelentős része a mértékváltáshoz kapcsolódik.

Hány deciliter tej fogyott ma, ha három doboz literes tejet ittunk meg?

Ha egy negyedikes gyerek lépései 60 centiméteresek, akkor hány lépéssel tesz meg 12 métert?

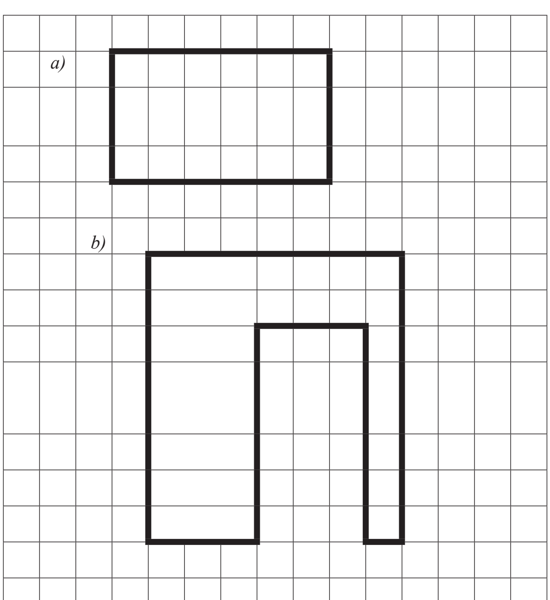
A rádióban két órahosszáig játszottak 5 perc hosszúságú zeneszámokat. Hány zeneszámot játszottak le ennyi idő alatt?

Angliában gyakran használják a mérföldet a távolság mérésére. Egy mérföld 1 km és még 609 méter. Hány méter egy mérföld?

Egy kis csomag teavaj tömege 100 gramm. Hány csomaggal vegyünk, ha 3 kg-ra van szükségünk?

A mértékváltás mellett egyszerű kerület- és területszámításos feladatokat tudunk szöveges gyakorlófeladatként megfogalmazni. A tanulók manipulatív tevékenységéből a képi szintű feladatmegoldáshoz jutunk a következő feladatokkal.

A négyzetrácsos táblán egy kis négyzet egy területegységet jelent. Számold ki a vastag vonallal keretezett két síkidom területét!



a) jelű síkidom
területe:____

b) jelű síkidom
területe:____

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanítása 3–4. osztályban is főleg a tapasztalatszerzést célozza.

A tanulók kombinatív gondolkodását továbbra is elsősorban a rendszerezés fontosságának megértetésén keresztül formáljuk. A gyerekeknek eleinte még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. A teljességre való törekvés kis elemszámú halmaz előállítása esetén ebben az életkorban már reális elvárás. Továbbra is segítséget kell adnunk a gyerekeknek a rendező elv megtalálásában, hiszen az összes eset megtalálásához ez fontossá válik. Csak nagyon kis elemszám esetén mondhatunk le arról, hogy támpontot adjunk legalább a feladat elkezdéséhez.

Az órai valószínűségi játékok alapvetően azt hivatottak bemutatni, hogy ami gyakrabban előfordult, az valószínűbb. Ilyenkor a pedagógus valódi résztvevője a tanulói kísérletezésnek, és bízik benne, hogy a játék kimenetele a „várt” eredményt hozza. Ezekben az években, a játékok elemzése során már az is megfigyelhető, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb (még akkor is, ha a tényleges kísérleti adatok ezt nem támasztják alá). Az értékelés során így követelményként jelenik meg a kisebb vagy nagyobb valószínűség intuitív megállapítása.

A „biztos”, „nem biztos”, „valószínű”, „lehetséges” fogalmak játékkal, tevékenységgel, az alapozó szakasz munkája eredményeként remélhetőleg beépültek a gyerekek szókincsébe. A tantervi követelmények a determinisztikus (biztos vagy lehetetlen) és nem determinisztikus események (lehetséges) elkülönítését fogalmazzák meg. Így természetesen csak közvetve kérdezhetünk rá arra, hogy egy adott eseményt mennyire tartanak valószínűnek.

A tantervi követelményekben is megjelenik az adatok megfigyelése, gyűjtése, rögzítése, rendezése. Ez a statisztikai témák mélyebb megértésén túl a valószínűségi döntések segítését is célozza.

A valószínűségi tevékenységek és feladatok általában nem önálló fejlesztési célként szerepelnek, hanem összekapcsolva más (pl. számolás, geometria, kombinatorika) területekkel. Mondjuk két dobókockával dobunk, és a szorzat paritására kell tippelni. A probléma megoldásához szükség van a gyerek számelméleti ismereteire, esetleg számolási képességére, és emellett valószínűséggel kapcsolatos gondolataira. Ezt érdemes figyelembe venni a mérőlapok készítése során.

Az összes eset keresésére, a talált esetek rendezésére és a rendszerben talált hiányok pótlására más feladatot jelent egy meglévő teljes rendszer hiányzó elemeinek megtalálása.

Ebben a feladatban jogos igény lehet az összes hiányzó elem megtalálása, hiszen előre megtervezett rendszer mutatja a megoldást. Emellett a táblázatban való eligazodás képességét is fejleszti a feladat. A fenti feladatok egyszerűsített változata lehet:

Az 5-ös, 2-es és 7-es számjegyekből alkoss 3-jegyű számokat. Írd le az összes különbözőt!

A gyerekeknek ebben a szakaszban még nem az a fontos, hogy hányféle lehetőség van, hanem a lehetőségek megkeresése, előállítása érdekes. Ha felismerik a tevékenységekben már kipróbált hasonlóságot, akkor már nagy lépést tettek az általánosítás felé. A kombinatorikai feladatokban (beleértve azok javítókulcsát is) ebből adódóan nemcsak az a lényeges, hogy az összes lehetőség száma mennyi, hanem a részmegoldások, a lehetőségek felsorolásában megnyilvánuló szabályszerűség is értékelhető és értékelendő.

Természetesen adódik a lehetőség az eljátszott, korábban megélt kombinatorikus tevékenységek szöveges feladattá való átfogalmazására. Továbbra sem mondhatunk le azonban a segítségadásról, mely lehet akár táblázat vagy megkezdett fa-diagram. Még mindig fontos, hogy nem elsősorban arra a kérdésre várjuk a választ, hogy valami hányféleképpen fordulhat elő, hanem az összes lehetőség előállítását kérjük a gyerekektől.

Például a következő két feladatot tekintve a táblázatos megoldás felkínálása tűnik célravezetőnek.

Nagymama éléskamrájának a feltöltésére készülődik, ezért a piacon vásárolt magának almát, körtét és szilvát. A gyümölcsöket három polcra szeretné pakolni. Egy polcra csak egyfajta gyümölcsöt tesz. Milyen sorrendbe pakolhatja be gyümölcseit?
A kezdőbetűk segítségével írd az összes megoldást a polcot jelölő táblázatba!

	Lehetőségek					
III. polc	**Sz**					
II. polc	**K**					
I. polc	**A**					

Állíts össze a Falánk családnak az étlapról háromfogásos menüt (leves, főétel, desszert) úgy, hogy ne legyen a család tagjai között olyan, aki pontosan ugyanazt a három fogást választja!

Étlap

Levesek:
- húsleves
- gyümölcsleves

Főételek:
- spagetti
- brassói aprópecsenye
- rakott krumpli

Desszert:
- somlói galuska

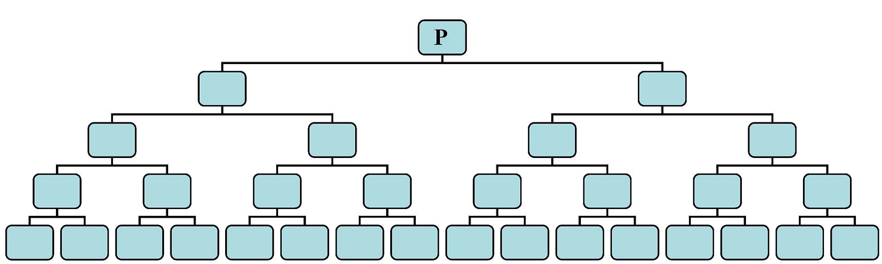
Töltsd ki a táblázatot az ételek nevének kezdőbetűjével!

Leves								
Főétel								
Desszert								

Legfeljebb hánytagú a Falánk család, ha nem volt közöttük két családtag, aki pontosan ugyanazt a három fogást válaszotta?

Egy másik esetben pedig a fa-diagram segít:

Évi gyöngyöt fűz. Sárga, piros és kék gyöngyei vannak. A láncra 5 szem gyöngy fér. Először mindig a piros gyöngyöt fűzi fel. Egymás mellé nem kerülhet azonos színű gyöngy. Hányféleképpen fűzheti fel a gyöngyöket Évi? Rajzold be az ábrába a színek kezdőbetűjével, hogy milyen lehetőségei vannak a gyöngysor elkészítésére!



Az 5–6. évfolyam részletes értékelési keretei

Számok, műveletek, algebra

Az 5. évfolyam elején körültekintően fel kell mérni, milyen matematikai felkészültséggel rendelkeznek a diákok ebben a témakörben. A leghitelesebb képet akkor kaphatjuk a tanulók felkészültségéről, ha egyéni képességeik felmérését megelőzi a sokirányú, változatos tevékenykedéshez kapcsolódó ismétlés.

Számok, számrendszerek
A tanulók a hatodik évfolyam végére megismerik a racionális számkört. A számkör bővítése (egészek, törtek, tizedes törtek), ezen belül a negatív számok értelmezése, a törtszám kétféle értelmezése (pl. 2/3 rész jelentheti azt, hogy egy egész tortát 3 egyenlő részre osztunk, s veszünk ezekből a részekből 2 darabot, vagy két – fentivel azonos – egész tortának vesszük az 1 harmad részét), az ellentett, abszolút érték fogalmának megismerése, a számok tulajdonságainak vizsgálata (pl. párosság, számszomszédok, felbontási lehetőségek) során képessé válnak a tanult számok helyes leírására és olvasására, értik és alkalmazni képesek a tört, tizedestört, negatív szám fogalmát.

Ezeken az évfolyamokon a tanulók a már kibővült számkörben értelmezik a kerekítés fogalmát, és alkalmazzák a kerekítés szabályát. Megismerik a százalék, alap, százalékláb, százalékérték fogalmát is. Fontos a más műveltségterületeken (pl. természettudományos tárgyak) gyűjtött tapasztalatok megbeszélése, mert ezen fogalmak gazdagítását szolgálja. Hasonlóan, a matematikai szaktárgyi tudásra a természettudományos tárgyak építenek, és a tudástranszfer lehetőségén keresztül a számolási készség a biológiai, kémiai, fizikai és földrajzi számításokban is meghatározó szerephez jut.

A számrendszerek (10-es alapú és az 5–6. osztályban csak bemutatásra kerülő − nem követelményt jelentő tananyag − 2-es alapú) tanítása kapcsán világossá tehető, hogy a számjegyek (alaki érték) elhelyezkedése (helyi érték) mennyire befolyásolja a szám valódi értékét. Itt újra alkalom nyílik a 0 helyi érték pótló szerepének bemutatására. Ezeken az évfolyamokon a tízes számrendszer biztos ismerete már követelmény.

A példasor alapján töltsd ki a táblázatot!

Tízes számrendszer									Számok Írása	Számok írása szavakkal
...	10^3	10^2	10	1	1/10	1/100	1/1000	...		
	2		1			3			2010,03	kétezer-tíz egész három század
										hétezer nyolcszázhét

Az egész számok tulajdonságainak, felbontási lehetőségeinek vizsgálata során megismerkedünk az egyszerűbb oszthatósági szabályokkal. *Követelményként fogalmazódik meg a 2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel, 100-zal való oszthatóság ismerete, alkalmazása feladatokban.* Fontos kitérni itt a 0 párosságának, oszthatóságának vizsgálatára is. A számelmélet témájához kapcsolódó feladatok alkalmasak a *bizonyítási igény kialakítására, fejlesztésére.* (Pl. hogyan lehetne igazolni, hogy a páratlan számok minden osztója páratlan?)

A számok sokféle megjelenítése, felírása az évek folyamán a tanulók *kombinatorikus gondolkodását is fejleszti*. Pl. a 6 = 3 + 3 (két egyenlő részre osztható, ezért páros egész) = 2 × 3 (tényezőkre bontásában szerepel a 2, ezért páros egész) = 4 + 2 = 7−1 = 4−(−2) = stb.

Az alábbi feladat is igazolja, hogy a negatív szám elvételének megértésében nagy szerepe van a számok különféle alakokban való megjelenítésének.

Műveletek

A bővülő számkörre vonatkozóan kiterjesztjük a tanult műveleteket, melyek tulajdonságai öröklődnek, mélyül a műveletfogalom, tudatosulnak a műveleti algoritmusok. A különböző előjelű egészekkel, a törtekkel, tizedes törtekkel végzett műveletek akár szóban, akár írásban történnek, a tudatosulásuk gyökere a 10-es számrendszer (helyi érték, alaki érték, valódi érték) pontos értése.

A műveletek kapcsán szólni kell a 0 és 1 számok műveletekben betöltött szerepéről is. Például a 0 szorzótényezőként való szereplésének következményeit az alábbi feladatokkal mutathatjuk be:

Számoljátok ki az alábbi műveletsor eredményét!
2 · 3 · 2 · 7 · 5 · 0 · 4 · 6 = ?

Megoldás: *A szorzat eredménye 0, mivel már egyetlen 0 szorzótényező szereplése esetén is 0-t kapunk eredményül. Papír-ceruza teszt esetén kevesebb szorzótényezőt használjunk.*

5	13	9	8	7
0	7	4	11	22
3	32	0	6	18
27	2	4	0	9
8	12	19	5	3

Az ábrán látható 5 x 5-ös rács mezőibe egész számokat írtunk.

Húzz egy vastag folytonos vonalat a rácsvonalak mentén úgy, hogy az a négyzetrács egyik határoló vonalának rácspontjából induljon, és egy másik határoló vonal rácspontjába érkezzen.

A vastag vonal egyik oldalán lévő számok szorzata azonos legyen a másik oldalon lévő számok szorzatával!

Megoldás: *A vastag vonal mindkét oldalán szerepeljen a 0 szám. Több megoldás van.*

Az évek során fokozatosan tudatosul a 0 és 1 szerepe a műveletekben, a műveleti tulajdonságok ismerete, alkalmazása. Az eredmények előzetes becslése, kiszámítása, majd ellenőrzése, a becsült és a számolással kapott eredmény összevetése, az eltérések lehetséges okainak megbeszélése fejleszti a számolási készséget, az algoritmikus gondolkodást, a becslési készséget, az önellenőrzés igényét. A műveleti sorrend helyes betartása következetességet, figyelem-összpontosítást igényel.

A tanulóknak tudni kell a pozitív törtek pozitív egészekkel történő szorzását és osztását, érteniük kell az alapműveleteket és a műveleti tulajdonságokat racionális számkörben, ismerni és alkalmazni kell a helyes műveleti sorrendet.

Tegyél ki az alábbi számok közé úgy műveleti és zárójeleket, hogy a megadott eredményt kapd!

3 7 3 3 = 4 Megoldás: $3 \cdot (7 - 3) : 3 = 4$
12 3 9 99 = 43 Megoldás: $12 \cdot (3 + 9) – 99 = 44$

Algebra

A kibővült számkörben a számfeladatok mellett a nyitott mondatokon belül az egyenletek, egyenlőtlenségek (olyan nyitott mondatok, melyekben állítmányként az egyenlő, kisebb, nagyobb, kisebb vagy egyenlő, nagyobb vagy egyenlő szerepel) is megjelennek. Az ismeretlent általában betűk jelölik. A betűkkel való műveletvégzéskor kikötéseket fogalmazunk meg a betűk helyébe írható számokra vonatkozóan (pl. 5/b esetben a b nem lehet 0). A számok, betűk (ismeretlenek) segítségével kapott kifejezésekkel (pl. 3a; −2b; c/4) műveleteket, műveletek közötti kapcsolatokat fogalmazunk meg, és keressük a megadott számhalmazon (alaphalmaz) a megoldásokat (megoldáshalmaz vagy igazsághalmaz). Ezek a tevékenységek előkészítik a későbbi évfolyamokon már önállóan szereplő algebra témakörét.

Oldd meg az egyenletet próbálgatással az 1; 3; −2; 0; 5; −4 számokból álló alaphalmazon!

$$2a+(-4)=6$$

Gondolj egy számra! Adj hozzá 7-et! Vedd az eredmény kétszeresét! Vonj ki belőle 14-et! A kapott eredményből vond ki az eredetileg gondolt számot!
Ha jól számoltál, eredményül a gondolt számot kaptad.
Miért?

Megoldás:

A fenti állítás valódiságát igazolhatjuk, ha a pontosan követjük a matematika nyelvén az utasításokat.
Jelölje a gondolt számot x.

Az utasítások egymásutánja alapján: $(x + 7) \cdot 2 - 14 - x = x$,
és ez az egyenlőség igaz.

Relációk, függvények

Az arányossági feladatok gyakorlatilag az iskoláztatás kezdetétől jelen vannak a matematikaoktatásban. A törtfogalom, a szorzás műveletének megértése és gyakorlása, az összehasonlítás, bizonyos számelméleti kérdések, a mérés, mértékváltás, kerület, terület meghatározása mind-mind arányossági gondolkodáson alapul. Gyakran előfordul sorozattal kapcsolatos feladat is, hiszen egy-egy művelet többszöri elvégzése valamilyen szabályosságot tartalmazó számsort eredményez. A szabályosságok felismerése, ezek alkalmazása kezdettől a szabályfelismerés, a következtetés képességének fejlesztését szolgálja. Az egyéb tantárgyakban a természeti, fizikai jelenségek, folyamatok időbeli változásainak vizsgálata, az ok-okozati összefüggések matematikai leírása, a mindennapi valóság modellezése megalapozza a függvényszemlélet kialakulását. Az ilyen tankönyvi feladatoknak nagy része a rutinfeladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak, valamint a feladatban megjelenő konkrét személyeknek, eseményeknek, jelenségeknek.

Az egyenes arányosságra vonatkozóan számos lehetőség adódik feladat kiválasztására. Minden mértékváltás, vásárlás, egyenletes mozgás, munkavégzés, leárazás, kamatozás, nagyítás, térkép méretaránya, területek összehasonlítása stb. alkalmas egyszerű rutinfeladatok megfogalmazására.

Példák:

Egy kocsi benzintankjába 47,5 l benzin fér. 2,5 l-es kannával töltögetjük a benzint. Hány kannányit tölthetünk bele, hogy tele legyen?

8,5 kg almát vettünk 340 Ft-ért. Mennyibe kerül 12 kg ebből a fajtából? Milyen összefüggés van az alma ára és tömege között?

A coll német mértékegység, 10 coll = 254 mm. Hány mm a számítógép-képernyő átlójának hosszúsága, ha 15 colos?

Az 1 : 30 000 000 méretarányú térképen Budapest és London távolsága 7 cm. A valóságban hány km a két város távolsága légvonalban?

Egy város lakossága 15%-kal gyarapodott egy év alatt. Hányan laktak év elején a városban, ha ez a gyarapodás 7500 főt jelentett?

A fordított arányosság fogalmának alkalmazására, vizsgálatára többnyire megfelelőek az egyenes arányosságnál használt összefüggések más megfogalmazásban. A tankönyvekben, iskolai gyakorlatban leginkább a munkavégzéssel, költségen-hasznon való osztozással, adott út megtételéhez szükséges idő-sebesség kapcsolattal, adott területű téglalap oldalhosszával kapcsolatos feladatok fordulnak elő.

Egy családban málnaszörpöt tesznek el télire. Ha félliteres üvegekbe töltik, 21 üvegre van szükség. 7 dl-es üvegekből hányra lenne szükség?

Két város közötti utat az átlagosan 80 km/h sebességgel haladó gyorsvonat másfél óra alatt teszi meg. Meddig tart az út a két város között személyvonattal, ha az átlagosan 45 km-t tesz meg óránként?

4 ember 12 nap alatt tud elkészíteni egy munkát. 6 ember ugyanakkora munkatempóval hány nap alatt lenne készen?

Mekkorák lehetnek a 24 cm^2 területű téglalap oldalai, ha az oldalak mérőszáma egész szám? Foglald táblázatba!

a (cm)											
b (cm)											

A különböző jelenségek, történések vizsgálatakor a felismert, kigyűjtött adatokat többféle módon (szöveggel, formulával, táblázattal, diagramon, grafikonon) rögzíthetik a tanulók. A különböző megadásokat át tudják alakítani egymásba. Képesek helymeghatározásra gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. A kapcsolatok, összefüggések diagramon, grafikonon való ábrázolására leginkább a mozgással, hőmérséklet-változással, vízállással összefüggő feladatok alkalmasak ebben az életkorban.

Jelöld a számegyenesen, ha:
– melegebb van, mint −2 ºC,
– nincs hidegebb −4 ºC-nál, de fagypont alatt van a hőmérséklet!

40 ºC-os vizet hűtünk. Percenként 6 ºC-kal csökken a hőmérséklete. Készíts táblázatot és grafikont a víz hőmérsékletének változásáról! Fogalmazd meg a matematika nyelvén, hogyan függ a víz hőmérséklete (T) az eltelt időtől (t)!

Geometria

Az 1–4. évfolyam megalapozza a geometriai fogalmakat és ismereteket. Dominálnak a cselekvéshez kötött, tapasztalatokra építő eljárások. Az alsóbb évfolyamok folytatásaként a felső tagozaton is sok, a tanár által előre megtervezett tudatos tevékenység kíséri a fogalmak bevezetését, megértését, érlelését.

Az 5–8. évfolyam összekötő szakasz az alsó évfolyamok szemléletformáló, tevékenykedtető, felfedeztető munkája és a 9–12. évfolyamok deduktív gondolkodásra nevelő fejlesztő munkája között. A felső tagozatos matematika oktatásában nagy hangsúlyt kell fektetni mind a konkrét, gyakorlati tevékenységekre, a gyerekek élményeinek a tanításba való bevonására, mind pedig az absztrakt gondolkodás fejlesztésére. Bár a hangsúlyok fokozatosan eltolódnak a konkrét tevékenységtől az absztrakció felé, ez a kétféle megközelítés a felső tagozaton végig párhuzamosan jelen van.

A geometria, mérések témakörök tanításának különösen fontos feladata a felső tagozaton, hogy tanulás közben a gyerekek az absztrakt fogalmaktól mindig vissza tudjanak térni a konkrét, gyakorlati jelentéshez és természetesen fordítva, a konkrét jelenségek világában felfedezzék az általánosat. A realisztikus matematikai mozgalom szóhasználatával élve: a geometria kiváló terepe a horizontális és vertikális matematikai tevékenységek fejlesztésének.

Az alsó tagozat geometriai témakörei a felső tagozaton ugyanúgy szerephez jutnak, és az alapozó szakaszban továbbvisszük az alsó tagozatos módszereket. Változatos tapasztalatszerzés, eszközhasználat, játékosság és játék segíti a konkréttól az általános felé haladó fogalomépítést. A gyerekek gondolkodása elsődlegesen induktív, de folyamatosan előtérbe kerül az általánosítás igénye is.

A tanítás során kiemelt figyelmet kell fordítanunk a rendszeres próbálkozás, becslés, ellenőrzés képességének a fejlesztésére, a megoldások előretervezésére és a megoldási menet érthető leírására.

Az 5–6. osztály geometriai tartalmi kereteinek leírásában követjük az alsó tagozatban megismert tartalmi részterületeket. A matematikai tantervi hagyományainknak megfelelően a tanulók egy-egy fogalommal többször is találkoznak iskolás éveik során, így több esetben is látszólag az alsó tagozatos követelmények ismétlődnek. A geometriai fogalmak verbális szintjén ez így is van, ugyanakkor a geometriai fogalmak fejlődésében meghatározó manipulatív tevékenységek és képi emlékek lehetővé teszik, hogy a már ismert fogalmak magasabb absztrakciós szinten építsék tovább a tanulók matematikai tudását. A korábbi évfolyamokon szereplő négy geometriai részterület közül a tájékozódást 5–6. osztályban már nem szerepeltetjük önálló területként. Az akár oda is sorolható tudáselemek ebben az életkori sávban vagy már nem bírnak differenciáló erővel az értékelés során, vagy pedig a mérés területéhez sorolhatók.

Konstruálások

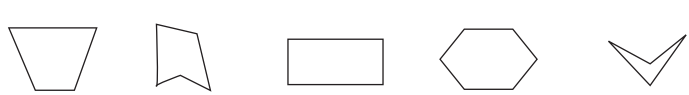
A tanulók képesek adott tulajdonságokkal rendelkező síkidomok és testek létrehozására manipulatív és képi szinten. Az ismert geometriai tulajdonságok között megjelenik a konvexitás. A tanulók képesek a síkidomokat és testeket a megismert geometriai tulajdonságok alapján csoportosítani.

A kocka és a téglatest tulajdonságait és testhálóját, valamint a háromszögek és négyszögek alapvető tulajdonságait ismerniük kell. A kör és a gömb fogalmának kialakulása, az alapvető tulajdonságok megismerése is követelmény.

A körző- és vonalzóhasználat terén követelmény, hogy a tanuló képes legyen szakaszt másolni, két vonalzóval párhuzamost és merőlegest rajzolni, szöget másolni, szakaszfelező merőlegest szerkeszteni.

A tanulók megismerik a szög fogalmát, a különböző szögfajtákat, és megtanulják a szögmérő használatát. 5–6. osztályban a pont, egyenes és szakasz fogalmakat pontosan tudják használni a tanulók.

Csoportosítsd az itt látható síkidomokat annak megfelelően, hogy konvex vagy konkáv sokszögek! Írd betűjelüket a megfelelő vonalra!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

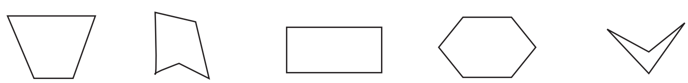
Konvex sokszögek: ....

Konkáv sokszögek: ....

Transzformációk

A tanulók képessé válnak arra, hogy megszerkesszék ismert alakzatok tengelyes tükörképét. Fel kell ismerniük a tengelyesen szimmetrikus alakzatokat. A szimmetriát fel kell ismerniük a hétköznapi életből és a művészetből ismert konkrét példákon is. Képesek a tengelyes tükrözés tulajdonságait szavakkal megfogalmazni.

A következő síkidomok közül melyiknek van tükörtengelye? Karikázd be annak a jelét, amelynek legalább egy tükörtengelye van, és húzd át annak a jelét, amelynek nincs tükörtengelye!



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Mérés

Az 5–6. évfolyamon már kibővült számkörben használhatjuk a mérőszámokat. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a mértékegységváltásnál nemcsak szomszédos, hanem távolabbi mértékegységek közötti átváltás is követelmény, viszont ezáltal már nemcsak a hétköznapi tapasztalatból ismerhető és rekonstruálható mérések szerepelnek, hanem a mértékegységváltás számos feladata tisztán számolási feladattá alakul. A kibővült számkör másrészt azzal is jár, hogy törtszámok szerepelnek a kerület-, terület- és térfogatszámításokban, valamint a négyzetre emelés mint új művelet felhasználásra talál a geometriai számításokban.

Ebben az életkori csoportban a tanulók képesek háromszögek és négyszögek kerületének, a kocka és téglatest felszínének és térfogatának kiszámítására. Nem általános képletek ismerete és alkalmazása a követelmény, hanem konkrét, ismert vagy meghatározandó számadatok esetében kell tudni elvégezni a számítást.

A tanulóknak ismerniük kell a hosszúság, a terület, a tömeg, az űrtartalom, a térfogat és az idő szabvány mértékegységeit. Képesnek kell lenniük a mértékegységek közötti átváltásokat elvégezni a milliós számkörön belül. Tudniuk kell a térfogat és az űrtartalom mértékegységeit is egymásba átváltaniuk.

Térfogat- és felszínszámítási feladatokban alkalmazzák az 5. osztályos ismereteket, meghatározzák téglatestből és kockából összeépített testek felszínét és térfogatát. 6. osztályban a téglalap területére visszavezethető területszámítási feladatokban alkalmazzák az előző évfolyamon megszerzett ismereteket, illetve megismerkednek a derékszögű háromszög és a tükrös háromszög területének, a konvex és konkáv deltoid, rombusz, négyzet területének kiszámításával.

A méréses tevékenységekhez kapcsolódóan az előzetes becslésekkel a mérések területét a hétköznapi tapasztalatokhoz kapcsoljuk.

A mérés témaköréhez kapcsolódó legegyszerűbb feladatok, amelyekben a megismert matematikai fogalmak és szimbólumok ellenőrzése történik, jellemzően a következő néhány alaptípusba tartoznak:

Mértékváltás

125 cm = ... mm
40 hl = ...cl
117 000 cm = ... km

Terület- és kerületszámítás

Számítsd ki annak a téglalapnak a kerületét, amelynek rövidebb oldala 2 cm, a hosszabbik oldala pedig 3 cm!

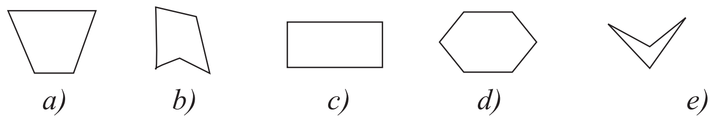
Milyen oldalhosszúságú négyzet területe 49 m^2?

Térfogatszámítás

Mekkora annak a téglatestnek a térfogata, amelynek magassága 6 cm, a másik két éle pedig 8 és 10 cm?

A mérés témakörében születő egyszerű szöveges feladatoknál a feladat megszövegezése a mérés mikéntjét vagy a méréssel nyert számokkal végzendő további műveleteket határozza meg.

Vonalzód segítségével mérd meg az alábbi síkidomok kerületét! Állítsd őket a kerületük nagysága szerinti csökkenő sorrendbe!

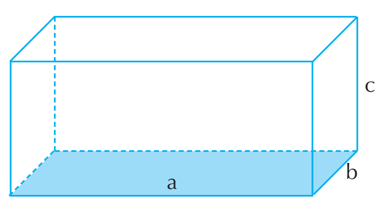


A síkidomok betűjele a kerületük szerinti csökkenő sorrendben: ....

A következő feladat esetében talán magyarázatra szorulhat, hogy miért tekintjük egyszerű, rutinszerűen megoldható szöveges feladatnak, és miért nem tartjuk realisztikus feladatnak. A kulcs abban van, hogy a feladatban szereplő számadatok és geometriai fogalmak a hétköznapi tapasztalatokkal való összevetés nélkül is elvezetnek a megoldáshoz. Nincs szükség arra, hogy matematikai szimbólumok és fogalmak segítségével modellt készítsünk a feladatban leírt szituációról, hanem elsősorban a feladat szövegében szereplő dolgokhoz keressük a megfelelő matematikai fogalmakat és műveleteket. A feladat szövegében szereplő medence méretei ugyan a hétköznapi tapasztalatokkal összevethetők, azonban belátható, hogy a megadott méretek tetszés szerint variálhatók a már ismert számkörben, és a tanulók többsége számára nem válik könnyebbé a feladat akkor, ha szabványos kerti vagy uszodai medence méretét adjuk meg.

A nemrégen átadott városi fürdő gyermekmedencéje 0,5 méter mély, 10 méter széles és 15 méter hosszú. Mennyi vízzel lehet feltölteni ezt a medencét?

További megfontolást tesz szükségessé az a kérdés, hogy vajon a feladathoz készített rajz vagy éppen a megoldás részeként elvárt rajz menynyiben módosít a feladat nehézségén. Ha az előző feladathoz vázlatrajzot is adunk, amelyen egy téglatest három éléhez adatokat rendelünk, akkor ugyanúgy a rutinszerűen megoldható szöveges feladatok kategóriájában maradunk, amikor alkalmazni kell a tanult szabályokat a matematika fogalmi keretein és szimbólumrendszerén belül.



Amennyiben a tanulóktól kérjük vázlatrajz elkészítését a feladathoz, akkor ugyanúgy nem változik a feladat besorolása a matematikai tudás alkalmazási kategóriái szerint, viszont az értékelés során az elkészült vázlatrajz minőségének megítélése, valamint a tanulói vázlatrajz és a tanulói számítások közötti esetleges disszonancia jelenthet további értékelési szempontot.

A mértékváltással kapcsolatos feladatok mint egyszerű szöveges feladatok a pusztán szimbólumok segítségével felírt feladatokhoz képest a szövegértést tehetik próbára. Elképzelhető, hogy nem ugyanazok a tanulók tudják helyesen megoldani a következő két feladatváltozatot:

1. feladatváltozat:

32 dm^3 = ... liter

2. feladatváltozat:

Adjuk meg annak az edénynek az űrmértékét, amelynek térfogata 32 dm^3!

Az iménti feladatok a mértékváltás készségének értékelési problémáit mutatják meg. A mértékváltással kapcsolatos feladatok egy része ismeret jellegű tudás alapján megoldható, más részük a számolási készség működtetését igényli. Az is lehetséges, hogy a feladatkitűzés szövegétől függ, hogy a tanuló számolási feladatként vagy inkább a mértékegységekre vonatkozó ismereteit számon kérő feladatként kezeli a mértékváltásos problémákat.

Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A hazai matematikaoktatásban jelentős változás volt az utóbbi évtizedben, hogy a valószínűségszámítás és statisztika témakörök bekerültek az érettségi követelmények közé, ezáltal visszahatva a középiskolai oktatásra, és jelentősen átformálva azt. Ugyanakkor érdemes azt is hangsúlyoznunk, hogy az 1960-as évektől lebonyolított nemzetközi rendszerszintű pedagógiai felmérésekben a kezdetektől jelen van már a legfiatalabb, 10 év körüli korosztály mérésében is a leíró statisztika témaköre. A hazai oktatási gyakorlatban az ide tartozó tudáselemek jórészt a matematikai neveléshez, de a természettudományi nevelés integrált tantárgyaihoz (környezetismeret, természetismeret) is kötődnek.

A tanulók – változatos feladatok és kísérletek megoldása során – olyan fogalmakat sajátítanak el, amelyek használata alapvetően megegyezik matematikai és hétköznapi kontextusban: eset, esemény, kísérlet.

Képesek a valószínűségi kísérletek különböző lehetséges kimeneteleit meghatározni és ábrázolni eseményfa és táblázat segítségével. Használják a biztos esemény és a lehetetlen esemény fogalmakat. Ismerik a tanulók az egymást kizáró és egymást nem kizáró események fogalmát. Események gyakoriságát képesek táblázatban és többféle ábratípuson – gyakorisági oszlopdiagramon, kördiagramon – megjeleníteni. Képesek meghatározni a legkisebb és legnagyobb gyakoriságú eseményt, és képesek néhány szám számtani közepét kiszámítani. Képesek rendezetlen adatsokaságot az előforduló események gyakorisága vagy más szempontok szerint rendezni lista, táblázat vagy diagram formájában.

A valószínűség fogalmát ebben az életkorban a „kedvező esemény / összes esemény" törtszám segítségével értelmezik a tanulók, és megfogalmazhatnak néhány nevezetes valószínűségi értéket is: a lehetetlen ……. valószínűsége 50-50%. Találkoznak bizonyos tévképzet kiküszöbölésére alkalmas feladattal is.

Ilyen szólhat például a következőkről: egy kétgyermekes családban (fiú-lány születésre 50-50%-os valószínűséget feltételezve) az egy-fiú – egy lány eset előfordulásának a valószínűsége nem $^1/_3$, hanem ½, vagy a kétszer feldobott pénzérme esetén egy fej és egy írás bekövetkezésének valószínűsége nem $^1/_3$, hanem ½.

A tanulók ismerik a dobókockát mint a véletlen események szemléltetőeszközét. Egyszerű kísérletekkel kipróbálják, hogy ha sokszor dobunk a dobókockával, a hat lehetséges érték nagyjából megegyező számban fordul majd elő.

Az összes lehetséges eset összeszámlálásának módszerei közül tapasztalati úton (formális képlet nélkül) ismerik a tanulók az ismétlés nélküli és ismétléses permutációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját tízeleműnél kisebb halmazok esetén; az ismétléses és ismétlés nélküli variációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját, ha a végeredmény a százas számkörben marad; az ismétlés nélküli kombinációval kapott lehetőségek összeszámlálásának módját legföljebb hatelemű halmazból induló részhalmazválasztás esetén.

Egy olyan példafeladatot mutatunk, amely alapvetően matematikai szimbólumokkal kitűzött feladat (tehát nem soroljuk a szöveges gyakorlófeladatok közé), és amelyben a nyelvi elemek kizárólag a feladat matematikai struktúrájának közvetítését szolgálják.

Az 1, 2 és 3 számjegyekből hány kétjegyű számot készíthetünk, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk föl?

Az iménti feladat szöveges rutinfeladattá minősül, ha az egyik szereplő számjegyet 0-ra cseréljük.

A leíró statisztika területén megfogalmazható követelmények egy része a függvények, relációk témakörbe is tartozik. Grafikonok, ábrák elemzése, a leggyakoribb érték leolvasása, a megfigyelhető értékek terjedelme jelenti az elvárt tudáselemeket.

A kombinatorika területe hagyományosan integrált része a magyar matematikatanításnak. Kifinomult hagyományai vannak a manipulatív, képi és szimbolikus szintű feladatkitűzésnek, amelyekben lehetőségek számát kell meghatározni. Ezeknek a tankönyvi feladatoknak a túlnyomó része a rutinfeladatok közé sorolható, hiszen gyakran szövegbe öltöztetett alapvető matematika struktúrák jelennek meg, de általában nincs valódi, releváns szerepe a hétköznapi ismereteknek és tapasztalatoknak. Tipikus feladatkitűzési stratégia ilyen esetekben az „Anna, Béla, Cili és Dani…” kezdetű feladat, ahol például négyféle, egyenrangú tevékenység társítható a gyereknevekhez. Hasonló jellegzetes megoldás, amikor a tanulók tapasztalataitól idegen témakör válik megszokottá a feladatszövegekben: vízvezetékrendszerek, telefonvonal-hálózatok, vezetői kinevezések stb.

Anna, Béla és Cili testvérek. Egyikük mindennap leviszi a szemetest, másikuk pedig meglocsolja a virágokat. Hányféleképpen lehetséges beosztaniuk a házimunkát?

A korosztályi jellemzőkből következik, hogy a kombinatorika területén várhatóan alulreprezentáltak lesznek a tanpéldák a realisztikus feladatokhoz képest. Az alapvető leszámlálási feladatok képlet nélküli megoldása általában akkor elvárható, ha a memóriából előhívható emlékképek vagy például rajzos modellek segítik a feladat megértését.

A kötet szerzői

Csapó Benő
Egyetemi tanár, az MTA doktora, a Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola, az SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoport és a MTA-SZTE Képességfejlődés Kutatócsoport vezetője. Kémia-fizika szakos középiskolai tanári diplomáját a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karán szerezte 1977-ben. A Brémai Egyetemen Humboldt-ösztöndíjas kutatóként dolgozott 1989-ben, 1994–95-ben pedig Stanfordban, a Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences meghívott kutatója volt. Fontosabb kutatási területei: kognitív fejlődés, a tudás szerveződése, longitudinális vizsgálatok, pedagógiai értékelés, tesztelmélet, technológia alapú tesztelés.

Csíkos Csaba
A Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézetének habilitált docense. Matematika-földrajz szakos tanári és pedagógiai értékelési szakértői végzettséget követően a neveléstudomány területén szerzett PhD-fokozatot. 2002–2005 között Békésy György posztdoktori ösztöndíjas. Kutatási témái elsősorban a 10-12 éves korosztály stratégiai gondolkodásának vizsgálatához kapcsolódnak; angol és magyar nyelvű publikáció elsősorban e korosztály matematikai gondolkodásának és olvasási folyamatainak kutatásából születtek.

Gábri Katalin
Matematika és számítástechnika szakos középiskolai tanár, oktatásirányítási és értékelési szakértő. Tízéves tanári munka után a Nógrád Megyei Pedagógiai Intézetben, majd a Magyar Gallup Intézetben dolgozott pedagógiai tanácsadóként. Területi és országos tanulói felméréseket, iskolai hatékonyságvizsgálatokat végzett, valamint kutatást folytatott a pedagógiai hozzáadott érték mérésének lehetőségeiről. A matematika tantárgy

gondozójaként részt vett az alapműveltségi vizsga koncepciójának és tesztjeinek kidolgozásában. Pedagógus-továbbképzés keretében rendszeresen tart előadásokat tanulói- és intézményértékelés területeken.

Lajos Józsefné
Az Oktatási Hivatal osztályvezetője, tanügyigazgatási, pedagógiai értékelési és akkreditációs szakértő. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán szerzett matematika-fizika szakos diplomát. Részt vett az érettségi tartalmi munkálatainak megszervezésében. Számos közoktatási matematikai fejlesztési feladat résztvevője, bekapcsolódott a Nemzeti alaptanterv előkészítésébe, taneszközök fejlesztésébe, tanulmányi versenyek szervezésébe. Az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Kuratórium tagja.

Makara Ágnes
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszékének adjunktusa. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán matematika, fizika és ábrázoló geometria szakon végzett, majd két évtizeden keresztül a közoktatásban dolgozott. Fő kutatási területe a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének lehetőségei a geometriatanulásban.

Terezinha Nunes
Egyetemi tanár és a Gyermekkori Tanulás Kutatócsoport vezetője az Oxfordi Egyetem Neveléstudományi Tanszékén. Fő kutatási területei az olvasás és a matematikai gondolkodás fejlődésének kognitív és a kulturális aspektusaihoz kapcsolódnak. Brazíliában „az utca matematikájával” kapcsolatban folytatott vizsgálatai, melyek feltárták a gyermekek és felnőttek informális matematikatudásának jellegzetességeit, ma már a matematikatanítás klasszikus munkái közé tartoznak. Könyvei a hétköznapi és az iskolai matematika kognitív folyamataival, a siket tanulók matematikatanításával, a kora gyermekkori matematikatanítással és az olvasástanítás eredményességének javításával foglalkoznak.

Szendrei Julianna
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Karának tanszékvezető főiskolai tanára. Középiskolai matematika-fizika tanári diplomát, majd matematikai statisztikából PhD-fokozatot szerzett. 2000–2004 között Széchenyi Professzori Ösztöndíjas. A Debreceni Egyetem matematika-didaktika PhD-alprogramjának alapító tagja. Több magyar és nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottsági tagja. Két cikluson át a CIEAEM nemzetközi matematikatanítási szervezet elnöke. Kutatási témái az óvodás és a kisiskolás korosztály, illetve az őket nevelő pedagógusok matematikai gondolkodásával kapcsolatosak. Számos magyar, angol, olasz és spanyol nyelvű szakcikk szerzője.

Szendrei Mária
Egyetemi tanár, a matematikai tudomány doktora, a Szegedi Tudományegyetemen az Algebra és Számelmélet Tanszék vezetője, a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola törzstagja. Matematikus diplomáját a József Attila Tudományegyetemen szerezte 1976-ban. Kutatási területe az absztrakt algebra. Számos nemzetközi konferencia meghívott plenáris előadója, nemzetközi kutatási pályázat résztvevője és vezetője. Humboldt ösztöndíjas kutató a Darmstadti és a Kasseli Egyetemen. Több nemzetközi matematikai folyóirat szerkesztője, egynek főszerkesztője. Aktívan részt vesz a matematikusok és matematikatanárok képzését megújító bizottságok munkájában. Egy egyetemi tankönyv társszerzője.

Szitányi Judit
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszékének adjunktusa. A Budapesti Tanítóképző Főiskolán szerzett főiskolai diplomát, majd nyolc évig tanítóként dolgozott. Egyetemi diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, matematika szakon szerezte. Kutatásai az óvodás és kisiskolás korosztály valószínűségi gondolkodásához kapcsolódnak. Szerepet vállalt a kompetencia alapú matematikaoktatás kidolgozásában és elterjesztésében. Aktívan részt vesz a Bolyai Társulat munkájában, az Oktatási Bizottság tagjaként szervezi a Rátz László Vándorgyűlések alsó tagozatos szekciójának munkáját.

Lieven Verschaffel

Egyetemi tanár a Lőveni Katolikus Egyetem Pszichológiai és Neveléstudományi Karán. Kutatásai területei a matematikatanítás pszichológiai kérdéseihez kapcsolódnak, elsősorban a gyermekek aritmetikai feladatmegoldó stratégiáit és a matematikai problémamegoldás folyamatait vizsgálja. Számos nemzetközi tudományos folyóirat szerkesztőbizottságának tagja, az „Új irányzatok a matematika és természettudomány tanításában” c. könyvsorozat szerkesztője. A Flamand Tudományos Kutatási Alap által támogatott „Kritikai és flexibilis gondolkodás stimulálása” nemzetközi tudományos együttműködési hálózat koordinátora és a „Számérzék: analízis és fejlesztés” című kutatási program vezetője.

Zsinkó Erzsébet

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszékének főiskolai docense. Tantervíróként, szakmai tanácsadóként, programfejlesztőként és szerkesztőként szerepet vállalt a kompetencia alapú képzés és oktatás matematika programjának kidolgozásában. Részt vett abban a pedagógiai kutató-fejlesztő munkában, amelynek során kidolgozásra került a négyéves tanítóképzés programja. Folyamatosan részt vesz a matematika tanításával, tanulásával kapcsolatos kutatásokban.

Nemzet Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Raktári szám: 42686
ISBN 978-963-19-7211-5

9 789631 972115